Descomposición genética de la función exponencial: mecanismos de construcción

Jeannette Vargas Hernández
Universidad Colegio Mayor de Cundinamarca
Colombia.
jeannettevargash@gmail.com
María Teresa González Astudillo
Universidad de Salamanca
España
maite@usal.es
Salvador Llinares Císcar
Universidad de Alicante
España
sllinares@ua.es

Resumen

La elaboración de una descomposición genética del concepto de función exponencial surge en el entorno de una investigación más amplia que pretende describir la práctica del docente. Se ha construido partiendo de los presupuestos del marco teórico APOE, de un estudio histórico del concepto de función exponencial, así como en los informes de investigaciones en el ámbito de la Educación Matemática. La descripción de la descomposición genética del objeto función exponencial se realiza a través de los mecanismos de construcción: interiorización, coordinación, encapsulación y generalización. Se reflexiona para ello sobre los vínculos con otras nociones matemáticas como: función, razón de cambio, proporcionalidad y potenciación generalizada.

Palabras clave: función, exponencial, descomposición genética, mecanismos de construcción.

1.- Introducción

A partir de la teoría cognitiva de la construcción del conocimiento desarrollada por Piaget, Dubinsky propuso la teoría APOE para describir cómo las acciones son interiorizadas en procesos que se encapsulan en objetos mentales, para, finalmente, construir esquemas cognitivos más sofisticados. Dubinsky construye esta teoría considerando que "El conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder ante situaciones matemáticas problemáticas reflexionando sobre ellas en un contexto social y construyendo y reconstruyendo acciones, procesos y objetos matemáticos y organizándolos en esquemas con el fin de manejar las situaciones” (Dubinsky, 1996, pp. 32-33).

De esta forma, la construcción del conocimiento matemático “comienza con la manipulación de objetos físicos o mentales previamente construidos para formar acciones; las acciones son interiorizadas para formar procesos que son encapsulados para formar objetos. Los objetos pueden ser desencapsulados de nuevo en los procesos a partir de los cuales fueron formados. Finalmente, las acciones, procesos y objetos pueden ser organizados en esquemas” (Asiala et al, 1996).

Las dos afirmaciones anteriores determinan la propuesta del modelo de comprensión APOE y, con ello, uno de los “aspectos” fundamentales de dicho modelo como es la descomposición genética de un concepto. Una descomposición genética de un concepto es una propuesta hipotética de la secuencia de construcciones mentales específicas que un estudiante realiza para aprenderlo, es decir, “un conjunto estructurado de construcciones mentales, los cuales pueden describir cómo el concepto puede ser desarrollado en la mente de un individuo” (Asiala et al., 1996).

Para realizar la descomposición genética de un concepto, es decir, una detallada identificación de cada una de las construcciones mentales que un individuo debe hacer para llegar a comprenderlo, algunos investigadores (Dubinsky y Harel, 1992; Vidakovic, 1997) parten inicialmente de la experiencia del profesor o investigador, de las revisiones de los resultados de investigaciones previas de los procesos utilizados por los estudiantes cuando tratan de comprender el concepto (Dubinsky y Lewin, 1986), y del análisis epistemológico del concepto. Cordero y Miranda (2002) consideran que el análisis teórico inicial debe descansar en la epistemología del concepto puesto que este conocimiento enriquece dicho análisis teórico

Uno de los objetivos que justifica el análisis de la práctica del profesor de matemáticas en el ámbito de la educación matemática es determinar en qué medida lo que el profesor hace en el aula (su discurso matemático) y los problemas y recursos que utiliza facilitan el que los estudiantes doten de significado a las ideas matemáticas (Gavilan et al, 2007a, 2007b). En este contexto la secuencia de construcciones mentales y los mecanismos cognitivos por los cuales los estudiantes pueden desarrollarlos se convierte en un referente para determinar en qué medida la práctica del profesor permite esa construcción. De esta manera, la descomposición genética de un concepto se convierte en un referente para identificar y explicar aspectos relevantes de la práctica del profesor de matemáticas.

La función exponencial es un concepto que se incluye en los cursos de precálculo a nivel universitario en Colombia y cuya importancia radica en que es la única función cuya derivada es proporcional a la propia función. Sin embargo, su aprendizaje no está exento de dificultades relacionadas con las restricciones sobre los valores de la base (Davis, 2009), los cómputos tanto si el exponente es natural como cuando no lo es (Confrey y Smith, 1995) o el significado de su crecimiento (Lezama, 1999). Desde el punto de vista de su enseñanza, se ha realizado una inversión respecto a su génesis histórica dado que lo habitual es que se enseñe previamente a la función logaritmo cuando, en realidad, surgió como inversa de ésta. Esto ha conducido a que se descuiden aspectos que la dotan de significado y que tienen que ver tanto con dicha génesis histórica como puede ser la relación entre la estructura aditiva de los exponentes y la multiplicativa de la variable dependiente como con las aplicaciones de la función exponencial en ámbitos muy diversos como las ciencias naturales o la economía. Esto pone de manifiesto los prerrequisitos para su construcción como los nuevos significados que deben ser generados: razón de cambio, covariación y crecimiento.

2. Una propuesta de descomposición genética de la función exponencial en el ámbito del análisis de la práctica del profesor.

Para realizar la descomposición genética de la función exponencial hemos tenido en cuenta tanto la génesis y evolución del concepto de función exponencial (Martínez, 2000; Boyer, 2003; Kline, 1972; Colerus, 1972; Colette, 1985; Paradís, 1993; Wieleitner, 1932; Dunham, 2000) como los resultados de las investigaciones previas sobre los procesos utilizados por los estudiantes para comprenderla (Weber, 2002; Radley 2004) junto con propuestas de situaciones y secuencias didácticas (Martínez, 2006; Lezama, 1999 y 2003; Ferrari 2001; De Faria Campos, 2006; Bradie, 1998; Hernández y Arrieta 2005) lo que ha permitido desglosar todos los pasos necesarios para la adquisición de la función exponencial a nivel de precálculo.

En el campo de la Educación Matemática se han realizado diversas investigaciones vinculadas con aspectos como la potenciación, la comprensión de los exponentes, la razón de cambio, las progresiones, el número *e* y las funciones exponenciales que nos muestran evidencias para construir la descomposición genética puesto que permiten responder a preguntas como, ¿Cuáles son los conceptos previos necesarios para la comprensión de la función exponencial?, ¿Cómo construye o entiende un alumno el concepto de función exponencial? , ¿Cuáles son las estructuras mentales y las conexiones con otros conceptos matemáticos necesarios para la comprensión de la función exponencial?

2.1 **Revisión histórico-epistemológica**

Como resultado de la revisión histórico-epistemológica, se establecieron diversas etapas del desarrollo matemático del concepto. Así, inicialmente, el concepto de potencia, se encuentra por un lado relacionado con la geometría, concretamente con los conceptos de área y volumen; y por otro con la numeración puesto que ya Arquímedes evidenció la necesidad del desarrollo de una notación para algunas potencias ligadas a números grandes provenientes de cálculos astronómicos. En la etapa siguiente se introduce el uso de exponentes negativos, se establecen algunas regularidades que relacionan las progresiones aritméticas con las geométricas y se introduce por primera vez la palabra exponente Stifel (1487-1567).

Estos cambios en la naturaleza de los exponentes son consolidados por Descartes (1596 – 1650) que es considerado uno de los principales gestores de la ruptura con la tradición griega ya que no sólo considera x^2 y x^3 como un área y el volumen sino simplemente como segmentos, lo que hace que su álgebra sea mucho más flexible. En una etapa posterior, el estudio de curvas, la necesidad de homogeneidad en las operaciones entre monomios y la ampliación de índices (exponentes) fraccionarios y negativos, con John Wallis (1606-1703), como principal representante, marcan la evolución de esta noción hacia la conceptualización de los denominados exponentes continuos. Finalmente, la definición de función da paso a otra etapa (Vargas y González, 2007), en la que Leonard Euler (1707-1783) define la función exponencial y la incluye dentro de las llamadas funciones trascendentes.

2.2.- Procesos de construcción de la función exponencial

La revisión de las investigaciones en Educación Matemática sobre la función exponencial ha permitido determinar los conceptos previos necesarios para la construcción de esta función, así como las estructuras mentales y conexiones con otros conceptos matemáticos necesarias para su comprensión.

Desde una perspectiva curricular, Ferrari (2001) plantea la organización de los conceptos de un curso de precálculo en el que se aborda inicialmente el estudio de desigualdades, valor absoluto, repaso del sistema numérico e intervalos. Se pasa luego a las ecuaciones lineales y su representación gráfica, para luego realizar un acercamiento a la noción de función lineal. El mismo enfoque se le da al tratamiento de la función cuadrática en el que se incluye la relación de las cónicas con la geometría analítica. Se presentan luego otras funciones como las funciones constantes, racionales o exponenciales, tanto desde el punto de vista gráfico como el analítico. Finalmente se abordan las funciones inversas y se presentan como tales a la función logarítmica y la exponencial. Esto nos informa de cuáles son los conocimientos previos que usualmente tienen los alumnos antes de trabajar con la función exponencial.

Si tratamos, ya concretamente, de lo que implica la construcción de la función exponencial, un elemento esencial es el relativo a los exponentes. Habitualmente, la construcción de la noción de exponente parte de los exponentes naturales como una convención matemática para simplificar la escritura de una multiplicación reiterada (Martínez, 2006). Para los demás exponentes, racionales o enteros, se considera una extensión del dominio de valores que conserva las leyes de la potenciación (Martínez y Penalva, 2006). Desde el punto de vista de la comprensión de estos conceptos, esto produce que la mayoría de los estudiantes entienda la exponenciación sólo como una acción, no como un proceso (Weber, 2000). Así, al considerar la función $f(x)= 2^x$ y tratar de interpretar $f(1/2)$ los estudiantes no razonan que $2^{1/2}$ es igual $\sqrt{2}$. Los estudiantes deben comprender las expresiones exponenciales como objetos matemáticos que son el resultado del proceso de exponenciación, para lo cual la noción de la operación exponencial como "multiplicación repetida" es inadecuada (Weber, 2002). Un estudiante con la comprensión del proceso de exponentes debe imaginar b^x como el número que resulta de la aplicación de la operación de exponenciación, lo cual es necesario para comprender las leyes de los exponentes y concebir el proceso reversible de exponenciación para llegar a conceptuar el proceso de logaritmo.

Para poder concebir las exponenciales como objetos matemáticos, un aspecto a tener en cuenta en la construcción de la función exponencial es la génesis histórica del concepto de logaritmo como la relación entre dos progresiones, una geométrica y otra aritmética de la que, sin embargo, se prescinde en el ambiente escolar. Una idea potente que da sentido al concepto de función exponencial desde su epistemología y puede ayudar a la comprensión de dicha función (Ferrari, 2001).

En este sentido la noción de covariación (Confrey y Smith, 1995) que vincula la relación entre dos valores de una variable coordinándola con la relación entre los correspondientes valores de la otra variable es esencial para construir la función exponencial. El enfoque de la covariación, que tiene como fin crear y conceptualizar funciones, incluye la formación de vínculos entre los valores del dominio de una función y los de su recorrido. Saldhana y Thompson (1998) describen la comprensión de la covariación como “*mantener en la mente, de manera simultánea, una imagen sostenida de dos cantidades*” (p. 298). De acuerdo a estos autores, “*en cada desarrollo, uno coordina dos cantidades pensándolas como una, entonces la* *otra, entonces la primera, entonces la segunda, y así contínuamente*". Una imagen operativa de covariación es aquella en la cual una persona imagina ambas cantidades por algún tiempo y, con la correspondencia establecida, comienza una propiedad emergente de la imagen (Thompson, 1994). Esta idea presentada por Confrey y Smith (1994 y 1995) concibe el desarrollo de la función exponencial a través del modelo de yuxtaposición de la estructura aditiva con la multiplicativa, donde los elementos y estructura del domino y el rango son generados a través de acciones simultáneas pero independientes creando un modelo de función de covariación.

Por otro lado, se ha de tener en cuenta, además, el papel de los diferentes sistemas de representación para que los alumnos construyan una adecuada imagen del concepto (Tall y Vinner, 1981) que conduzca a la comprensión del concepto (González, 2002). El papel de las conversiones y traslaciones entre los diferentes modos de representación apoya la generación y consolidación de los diferentes mecanismos cognitivos que deben ser generados para dotar de sentido a la función exponencial.

De esta forma, si se consideran los puntos de vista geométrico, gráfico y analítico para poder integrar todos estos aspectos y conseguir una comprensión del concepto, se hace imprescindible la construcción de ciertos objetos geométricos y el establecimiento de relaciones con los aspectos analíticos. Así, Lezama (1999) diseña, aplica y analiza una ingeniería didáctica para la función 2^x propiciando la realización de acciones a partir de criterios geométricos; localizar puntos en el plano, escribir tablas, identificar regularidades que propicien posteriormente generalizaciones pertinentes. Este desarrollo atiende a unas características como:

- La construcción de elementos geométricos y gráficos en las que solicita a los estudiantes que efectúen trazos y localicen puntos de la forma 2^x según ciertos valores de x en un sistema de coordenadas rectangular.
- La inducción de lo local a lo global para localizar más puntos a partir de los ya construidos y argumentar a partir de ciertas tablas, sobre las relaciones entre los cocientes de la variable dependiente y las diferencias de la independiente.
- La generalización a partir del análisis de las regularidades observadas para 2^x para extenderlo a otras bases.

Uno de los resultados de esta investigación fue que el concepto de potencia entera positiva es estable en la mayoría de los estudiantes, pero elevar a potencias fraccionarias carece de significado para la casi totalidad de ellos lo que está en consonancia con Weber (2002). Además, la mayoría los estudiantes asocia la función exponencial con crecimiento, pero son incapaces de reconocer la modalidad de crecimiento pues la mayoría representó dicho crecimiento con líneas rectas crecientes.

Para organizar los mecanismos de encapsulación y generalización de la función exponencial, diversas investigaciones afirman que para dotar de sentido a la función exponencial hay numerosas situaciones tanto científicas como sociales que permiten contextualizarla. Bradie (1998) señala que, usualmente, se introduce la función exponencial sin explicar cómo se aplica en ciertos contextos (por ejemplo, en el crecimiento de una colonia de bacterias); se les pide simplemente que sustituyan ciertos valores en la fórmula y hagan los cálculos correspondientes. Como consecuencia los estudiantes no desarrollan la habilidad de reconocer el uso de las funciones exponenciales en otros fenómenos. Para trabajar la modelización de estos fenómenos es necesario que los alumnos consideren la función exponencial como aquella en la que la tasa de cambio es proporcional al valor de la función, para lo cual no es necesario que posean conocimientos del concepto de derivada que se puede suplir mediante el uso de herramientas tecnológicas.

En este mismo sentido, Hernández y Arrieta (2005) proponen una enseñanza de la función exponencial en la que se parte de una situación real como la toma de datos del enfriamiento del silicón, se construye un modelo numérico (tabla de datos), se plantean conjeturas al analizar las características de la tabla de datos, se realizan predicciones con ella y se construye un modelo gráfico como una nube de puntos para argumentar acerca de las conjeturas realizadas.

2.3 Una Descomposición genética

A partir de las consideraciones anteriores se hace una propuesta de descomposición genética de la función exponencial. Se elabora y examina la propuesta teniendo presente que la descomposición genética del concepto hace referencia a dos componentes del modelo de comprensión APOS: las formas de conocer: acción, proceso, objeto y esquema, y los mecanismos de construcción: interiorización, inversión, coordinación encapsulación y desencapsulación. En la siguiente figura (Dubinsky, 1991) se pueden ver las relaciones entre estos dos componentes lo cual es una ayuda al esbozar las ideas que se presentan en las descomposiciones.

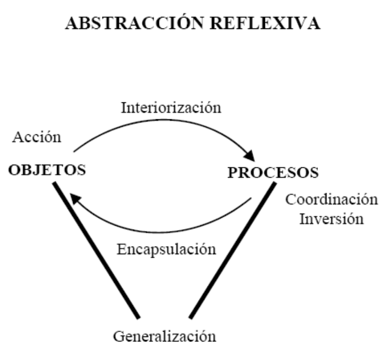

Figura 1. Formas de conocer y mecanismos de construcción en la teoría APOS

Para realizar la descomposición genética se establecieron unos prerrequisitos para luego describir cada uno de los mecanismos de construcción en dos grupos de registros de representación: el analítico-tabular y el gráfico-analítico, considerando así tanto los aspectos aritméticos y algebraicos por un lado como los geométricos y gráficos por otro.

La idea inicial es partir de la noción de potencia como operación, junto con los diferentes significados del exponente; considerar los exponentes naturales mayores que uno como una multiplicación reiterada en la que se busca una economía en la escritura y luego la noción de exponente no natural como una convención matemática para uniformizar las operaciones entre monomios a partir de las leyes de las exponenciales. Esta introducción permitirá generar en los estudiantes formas de conocer la potencia como una acción que posteriormente permitirán generar mecanismos de interiorización de la idea de potencia con exponente natural.

Además, en el contexto de las funciones se parte de las funciones lineales y polinómicas, entre ellas las funciones potenciales, para llegar a la función compuesta y la función inversa.

Así los prerrequisitos se concretan en:

- Representación gráfica de objetos matemáticos; puntos, rectas y curvas en un sistema de coordenadas cartesianas.
- La función como objeto matemático.
- Comprensión de la potenciación generalizada para cualquier número real.
    - El concepto de exponente natural mayor que uno. La existencia de la potencia que surge de la interacción entre base y exponente, como una acción de multiplicar de manera reiterada una misma cantidad atendiendo a los requerimientos de economía en la escritura y en la sintaxis aritmética y algebraica.
    - La noción de exponente no natural como una convención matemática para uniformizar las operaciones entre monomios.
    - Propiedades de los exponentes.
- Concepto de proporcionalidad directa.
- Análisis de monotonía de las funciones.
    - Crecimiento; análisis de la pendiente en funciones lineales y razón de cambio promedio en funciones potencia.
    - Concavidad
    - Continuidad

A continuación iremos describiendo la descomposición genética a partir de: los elementos matemáticos que configuran el concepto de función exponencial, las relaciones lógicas establecidas entre estos elementos donde se incluyen las construcciones mentales específicas que un estudiante realiza para aprenderlo y las diferentes formas de representación. Se entiende por elemento matemático "*el producto de una disociación o de una segregación del concepto vinculada al concepto y a sus propiedades*" (Piaget, 1963). Estos elementos matemáticos se han obtenido a partir de la investigaciones descritas en el apartado anterior y de las propuestas curriculares y se concretan en: el concepto de exponente, la estructura aditiva de los exponentes, la estructura multiplicativa de las potencias, la noción de covariación, el dominio y rango, la razón de cambio de la función, el crecimiento y la tendencia.

Comienza la construcción de la función exponencial por medio de las llamadas acciones en la teoría APOE, transformaciones de objetos percibidas por el estudiante como externas. Estas transformaciones se producen como una reacción a una indicación que ofrece información sobre los pasos a seguir. Se realiza en dos planos, el analítico y el gráfico para los cuáles se consideran algunos casos particulares como bases enteras y racionales, teniendo en cuenta, además que las funciones exponenciales $f(x)=b^x$ son aquellas funciones cuya razón de cambio es proporcional al valor de la función y, por tanto, los estudiantes deben ser conscientes de esta razón de cambio. Por otro lado hay que tener en cuenta la noción de covariación entre las dos estructuras, la aditiva de la variable independiente y multiplicativa de la dependiente. Estos dos últimos aspectos deben permitir al estudiante identificar la naturaleza creciente o decreciente de la función. En cuanto a los aspectos gráficos, hay que considerar la representación en el plano cartesiano de los puntos de la curva exponencial para lo que se requiere el uso de elementos geométricos como la media geométrica, la semejanza o el producto de segmentos. En definitiva, se trata de:

- Analítico-tabular

  Acción de evaluar numéricamente la expresión de función exponencial con una base dada.

  Acción de calcular las diferencias entre dos valores de la variable independiente y los valores correspondientes de la variable dependiente.

  Acción de comparación de diferencias y cocientes de dos valores de la variable independiente e dependiente respectivamente.

- Gráfico- analítico

  Acción de ubicar en el plano cartesiano puntos correspondientes a parejas de coordenadas donde la segunda componente es una potencia de exponente la primera componente, recurriendo a construcciones geométricas cuando la ubicación de puntos lo requiera.

El mecanismo de **interiorización** es la construcción mental de un proceso que tiene que ver con una serie de acciones sobre objetos cognitivos, es decir, las acciones se interiorizan en procesos. Este mecanismo permite ya la comparación de funciones exponenciales de diferente base, distinguiendo de este modo el tipo de crecimiento relacionado con los valores de la base tanto desde el punto de vista analítico como gráfico, la adquisición del proceso asociado a la covariación de la función exponencial y del proceso de proporcionalidad de la razón de cambio con el valor de la función asociado a la función exponencial.

- Analítico- tabular

  Interiorización de las acciones en un proceso cuando se realizan iteraciones correspondientes a elevar una base fija cuando se varía el exponente, considerando los casos en que la base es mayor que uno o cuando tiene un valor entre cero y uno.

  Interiorización de las acciones de comparación de diferencias y cocientes de dos valores de la variable dependiente e independiente respectivamente, para buscar las relaciones entre ellas $\frac{y_2}{y_1} = a^{x_2 - x_1}$.

  Interiorización de las acciones del cambio que se efectúa en la variable *x*, para *x* muy grande en el caso de la función decreciente y *x* muy pequeño en el caso de la función creciente para comparar el cambio que se genera en *y*.

  Interiorización de las acciones de comparación de la razón de cambio promedio en un punto con el valor de la función en ese punto.

- Gráfico-analítico.

  Interiorización de las acciones de ubicar diferentes puntos en el proceso gráfica de la función exponencial sin recurrir a realizar las acciones de reemplazar en la fórmula esos diversos valores en donde está definida la función.

  Representación del triángulo característico para diferentes puntos de la gráfica de una función.

El mecanismo de **coordinación** es el acto cognitivo de asociar dos o más procesos para construir un nuevo proceso, en este caso los procesos construidos mediante el mecanismo de interiorización son coordinados para formar el proceso función exponencial en el plano analítico y en el plano gráfico.

- Analítico -tabular.

  Coordinación entre el proceso función exponencial, cuya razón de cambio promedio es directamente proporcional al valor de la función en ese punto y el proceso de funciones crecientes para bases mayores que uno y decrecientes para bases mayores que cero y menores que uno con corte en (0,1) y asíntota al eje x.

- Gráfico-analítico.

  Coordinación entre el proceso curva de la función exponencial asíntota al eje x con corte en el eje *y*; y el proceso función creciente para bases mayores que uno y decrecientes para bases mayores que cero y menores que uno.

El mecanismo de **encapsulación** es la transformación mental de un proceso dinámico en un objeto cognitivo estático Este objeto puede ser visto como una entidad total y puede ser transformado mentalmente por otras acciones o procesos. En este caso se dice que el proceso ha sido encapsulado en un objeto cognitivo.

Encapsulación del proceso función exponencial en el objeto función exponencial y su representación $f(x)=b^x$ con $b>0$ y $b\neq1$, dominio en el conjunto de los números reales y rango los número reales positivos, que tiene como asíntota el eje x, es una función creciente para $b<1$ y decreciente para $0<b<1$ con una raíz para $x=1$ y relación de proporcionalidad entre la función y su razón de cambio.

Finalmente el mecanismo de **generalización** permite considerar la función exponencial en diferentes contextos tanto matemáticos como no matemáticos incrementando la imagen del concepto y con ello dotando al concepto de sentido.

Generalización de la función exponencial objeto $f(x)=b^x$ por diversas transformaciones relacionando los diferentes parámetros de la representación analítica con sus efectos en la representación gráfica.

Aplicación de la generalización anterior con los procesos de solución de ecuaciones exponenciales.

Utilización de la función exponencial en diferentes contextos: crecimiento de poblaciones, decaimiento, temperatura e interés compuesto, comportamiento radiactivo.

3.- Consideraciones finales

La descomposición genética del concepto función exponencial propuesta se apoya en el conocimiento de los investigadores, en la epistemología del concepto y en los resultados de las investigaciones previas sobre los procesos mentales necesarios para comprenderla que se han obtenido a través de diversas investigaciones en educación matemática. La descomposición genética del objeto función exponencial se describe a través de los mecanismos de construcción: interiorización, coordinación, encapsulación y generalización. Se reflexiona para ello sobre los vínculos con otras nociones matemáticas; función, razón de cambio, proporcionalidad y potenciación generalizada.

La posibilidad de incluir en la descripción de los mecanismos de construcción de la función exponencial su caracterización como aquella función cuya razón de cambio es proporcional al valor de la función y de incluir la percepción de la función desde el punto de vista de la covariación conduce a que el alumno, no sólo sea capaz de concebir la función exponencial como un proceso sino llegar a construirla como objeto. De esta forma, a partir de las acciones iniciales que le permiten elaborar tablas y gráficas para las funciones exponenciales puede organizar dos familias de funciones, una creciente y otra decreciente dependiendo de los valores de la base, lo que le lleva a una reorganización cognitiva de la función exponencial en un nivel superior al precedente.

Esta propuesta de descomposición genética de la función exponencial, es solamente un camino de los posibles a plantear; con ella se pretende analizar las construcciones mentales que tienen que hacer los alumnos para construir este concepto teniendo en cuenta tanto la epistemología del concepto como los resultados de investigaciones centradas en la compresión de los alumnos. Esta descomposición genética se convierte en un instrumento para el análisis de la práctica del profesor de matemáticas al ser considerada como un referente de las acciones y recursos usados por el profesor cuando intenta que sus estudiantes doten de significado a las ideas matemáticas.

Referencias y bibliografía

Asiala, M. et al. (1996) A framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. *Research in Collegiate Mathematics Education*, vol. II, num. 3, pp.1-32.

Bradie, B. (1998). Rate of Change of Exponential Functions: A Precalculus Perspective. *Mathematics Teacher*, 91 (3), page 224 - 237.

Boyer, C.(2003*): Historia de la matemática*. Alianza Editorial: Madrid.

Colerus, E. (1972): *Breve historia de las matemáticas*, Vols. 1 y.2. Altamira: Madrid

Collette, J. P.(1985): *Historia de las matemáticas*. Siglo XXI: Madrid.

Confrey, J. & Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics* 26, 135-164.

Confrey, J. & Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education* 26(1), 66-86.

Cordero, F. y Miranda, E. (2002). El entendimiento de la transformada de Laplace: Una Epistemología como Base de una Descomposición Genética. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 5 (2), pp. 133-168.

Davis, J.D. (2010) Understanding the influence of two mathematics textbooks on prospectiv secondary teachers' knowledge. *Journal of mathematics teacher education*, 12, 365-389.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática*, 8, 3, 24-41.

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking, En D. Tall. (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking*,. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 95-123.

Dubinsky, E. y Harel, G.(1992) The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy, *MAA Mathematical Association of America*, 25, 85-106.

Dubinsky, E. y Lewin, P. (1992). Reflexive abstraction in mathematics education: The genetic decomposition of induction and compactness. *Journal of Mathematical Behavior*. 5, 55-92.

Gavilán, J.M.; García, M; Llinares, S. (2007). Una perspectiva para el análisis de la práctica del profesor de matemáticas. Implicaciones metodológicas, Enseñanza de las Ciencias , vol. 25, pp. 157–170.

Gavilán, J.M.; García, M.; Llinares, S. (2007). La modelación de la descomposición genética de una noción matemática. Explicando la práctica del profesor desde el punto de vista Del aprendizaje potencial de los Estudiantes. EDUCACION MATEMATICA , vol. 19, pp. 5- 39.

González, M.T. (2002) Sistemas simbólicos de representación en la enseñanza del análisis Matemático: Perspectiva histórica. Tesis doctoral Salamanca. Ediciones Universidad de Salamanca

Ferrari, M. (2001). *Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo*. Tesis de maestría. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav-IPN). México

Hernández , M. y Arrieta, J (2005). Las Prácticas Sociales de Modelación y la Emergencia de lo Exponencial. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Vol.18*. 537-542

Kline. M. (1972). *Mathematical Thought form ancient to modern times.* Volumen 1.Oxford University Press.

Lezama, J. (1999). *Un estudio de reproducibilidad: El caso de la función exponencial*. Tesis de maestría inédita. México. Departamento de Matemática Educativa.

Lezama, J. (2003). *Un estudio de reproducibilidad de situaciones didácticas.* Tesis doctoral inédita. México. Departamento de Matemática Educativa.

Martínez, G. (2000): Hacia una explicación sistémica de los fenómenos didácticos. El caso de las convenciones en el tratamiento de los exponentes no naturales. Tesis de maestría inédita. México. Departamento de Matemática Educativa.

Martínez, G. (2006): Sobre la naturaleza y significados de los exponentes. Un caso de los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento. En: C. Dolores, G. Martínez, R. Farfán y C. Navarro (Eds.) *Matemática Educativa. Algunos aspectos de la socioepistemología y visualización en el aula* (pp. 131-173). México: Editorial Díaz de Santos.

Martínez, C.; Penalva, M.C. (2006). Proceso de simbolización del concepto de potencia: análisis de libros de texto de secundaria. *Enseñanza de las Ciencias , vol. 24*, pp. 285–297.

Piaget, J. (1963) Las Estructuras Matemáticas y las Estructuras Operatorias de la Inteligencia. *La Enseñanza de las Matemáticas.* Madrid: Editorial Aguilar.

Paradís, J. (1993). La triparty en la Science des Nombres de Nicolas Chuquet. En Teresa Rojano & Luis Puig (Eds.) *Memorias del tercer simposio internacional sobre investigación en educación matemática. Historia de las ideas algebraicas*. Valencia. España. 1991. (pp. 31-63). México: Departamento de la didáctica de la matemática Universitat de Valencia –PNFAMP-México

Radley, M. (2004). An exponential function: is its description not problematic? En The Mathematics Education into the 21st Century Project. The Future of Mathematics Education. Pod Tezniami, Ciechocinek, Poland. s/p.

Saldhana, L. & Thompson, P. W. (1998). Re-thinking covariation from a quantitative perspective: Simultaneous continuous variation. En S. B. Berensen, K. R. Dawkins, M. Blanton, W. N. Coulombe, J. Kolb, K. Norwood, y L. Stiff (Eds.), *Proceeding of the 20th Annual Meeting. North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol 1, 298-303. Columbus, OH: ERIC Cleainghouse for Science, Mathematics and Environmental Education.

Tall, D. y Vinner, S. (1981) Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.

Thompson, P. W. (1994) Imagines of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus. *Educational Studies in Mathematics*, **26, 299-274.**

Vargas, J. y González, M.T. (2007) Segmentos de la historia: la función logarítmica. *Matemática: Enseñanza Universitaria*, 15(2), 129-144.

Vidakovic, D. (1997) Learning the concept of inverse function in a group versus individual environment. In Dubinsky, E., Mathews, D. & Reynolds, B., (Eds.), *Readings in Cooperative Learning* , MAA Notes No 44, 173-195.

Weber, K. (2002). Students' understanding of exponential and logarithmic functions. En North *American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (24th, Athens, GA, October 26-29. Disponible en internet. http://www.eric.ed.gov/ERICDocs/data/ericdocs2sql/content_storage_01/0000019b/80/1a/a7/65.pdf

Wieleitner, H. (1932): *Historia de las Matemáticas*. Editorial Labor: Barcelona.