XIII CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
CIAEM 2011
26 - 30 Junho, 2011
Recife, Brasil
50 anos do Comitê Interamericano de Educação Matemática

A complementaridade e a noção de número real

Rogério Ferreira da Fonseca
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC/SP
Brasil
rffonseca@pucsp.br
Sonia Barbosa Camargo Igliori
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC/SP
Brasil
sigliori@pucsp.br

Resumo

No presente artigo apresentamos alguns aspectos da pesquisa desenvolvida para a elaboração de tese de doutorado a qual tem como objeto de estudo a conceituação de número real. Reflexões sobre a questão "O que é número?", que por muito tempo ocupou filósofos e matemáticos, direcionaram essa pesquisa ao estudo de uma nova teoria para conceituar número real, a teoria do matemático inglês da Universidade de Princeton, John Horton Conway. Essa teoria permite responder essa questão epistemológica, conceitua número dos naturais aos transfinitos e, tem a vantagem de preencher de forma *complementar* os dois aspectos essenciais do conceito de número: o *intensional* e o *extensional*. É uma pesquisa de cunho teórico, as análises foram referenciadas pela noção de *complementaridade.* Como resultado está o afloramento da fecundidade da teoria de Conway, do ponto de vista epistemológico e, por conseguinte a indicação de uma abordagem a ser explorada no ensino de número real.

Palavras chave: complementaridade, número real, números, jogo Hackenbush, Conway.

Introdução

O objeto de estudo deste artigo é um dos conceitos basilares do Cálculo Diferencial e Integral, o conceito de número real, e a abordagem utilizada foi por meio do estudo de uma nova conceituação de número real apresentada pelo matemático inglês Jonh Horton Conway da Universidade de Princeton. O estudo teve por objetivo destacar potencialidades dessa conceituação perante questões levantadas sobre a conceituação de número real nas abordagens clássicas. Nelas o conjunto dos reais pode ser concebido como conjunto de classes de equivalência de sequências de Cauchy de números racionais (completamento do Q); como conjunto de cortes no conjunto dos racionais (Dedekind); ou a conceituação do conjunto dos números reais como um corpo ordenado completo (conceituação axiomática).

Vários matemáticos e filósofos incomodaram-se com as condições apresentadas por essas abordagens clássicas para responderem de forma única a questão: o que é número? e para satisfazerem de forma complementar a *intensionalidade* e a *extensionalidade* do conceito de número.

As análises aqui realizadas são orientadas pelo princípio da *complementaridade*, levando-se em conta que os objetos matemáticos têm natureza dual, isto é, por um lado podem ser caracterizados axiomaticamente e por outro, devem ser complementados por possíveis aplicações, ou seja, modelos que traduzam seus processos lógicos (propriedades). Assim, analisar um objeto matemático na perspectiva da *complementaridade* significa buscar identificar sua capacidade de não dissociar os aspectos que compõem essa dualidade.

Os procedimentos metodológicos desta pesquisa baseiam-se principalmente no estudo de referências bibliográficas pertinentes à teoria de J. H. Conway, à Filosofia da Matemática, a livros de Análise Matemática e a artigos científicos de Filosofia ou Educação Matemática, que abordam o conceito de número. É um estudo de cunho teórico, as análises efetuadas são de natureza epistemológica, e tem por foco o estudo da conceituação de número real. Não faz parte de seu escopo a realização de análises didáticas. Mas buscamos evidenciar algumas das possibilidades dessa teoria do ponto de vista cognitivo.

Contextualização da problemática

A Filosofia e a História da Matemática evidenciam as complexidades inerentes ao desenvolvimento do conceito de número. Desde quando os primeiros pensadores gregos e o místico Pitágoras (aproximadamente séc. V a.C.) inseriram os números como elementos de conhecimento do mundo, as entidades e os métodos fundamentais da Matemática ocuparam um papel destacado na Filosofia. Assim, as abordagens históricas ou epistemológicas dos números são essenciais para a compreensão e propostas de evolução da Matemática.

Os matemáticos que atuam em vários domínios têm, de uma forma ou outra, utilizado os números dos naturais aos transfinitos. É no desenvolvimento histórico dos diversos tipos de números que está a evolução das ideias matemáticas desde a Antiguidade.

Essa força da evolução histórica não implica tranquilidade, mas sim conflitos e complexidade. As transformações matemáticas, filosóficas e epistemológicas que envolvem a conceituação de número demonstram esse fato.

Muitas críticas foram feitas às concepções de número que tinham como fundamento a experiência e a intuição, por exemplo, as críticas apresentadas por Frege (1992) colocando em xeque as visões empiristas em relação ao conceito de número. Ele propôs uma teoria que buscava agregar elementos lógicos a certo tipo de conceitualismo, no qual os números eram vistos como entidades lógico-ideais, objetos do pensamento. Buscava eliminar o recurso à intuição e à linguagem comum, considerando de certa maneira que a Aritmética deveria ser um ramo da Lógica, dessa forma libertando-a de fundamentos baseados na experiência e intuição.

Ressalta-se uma questão que permanece implícita ou explicitamente ligada aos debates acerca da natureza dos números, a saber: "uma definição para o objeto matemático 'número' deve partir do pressuposto de que esse é puramente um objeto do pensamento ou deve basear-se nas coisas externas que fazem parte da nossa realidade sensível?" Essa é uma questão filosófica que permeia todo o desenvolvimento do conceito de número, as respostas apresentadas por matemáticos e filósofos acerca da existência dos números dão indícios de um debate em torno da primazia entre a Matemática Pura e a Aplicada.

Os números naturais, os racionais e alguns irracionais (como o pi) já eram conhecidos desde a Antiguidade. No entanto, os sistemas de números não foram tomados como extensão do campo dos naturais, e durante séculos os números não obtiveram um estatuto de objeto matemático.

Os números negativos, e os números complexos, os quais foram descobertos na Índia no século VI, e no século XVI (1545) por Cardano, respectivamente, durante muito tempo foram considerados duvidosos. Somente no século XIX é que eles vão adquirir o estatuto de número. A partir desse mesmo século os números reais foram logicamente bem fundamentados por alguns matemáticos como Richard Dedekind, Karl Weierstrass, Charles Méray e Georg Cantor.

É admitido desde o século XIX que o sistema de números reais é construído partindo-se dos números naturais, e, por construções sucessivas, obtêm-se os inteiros, os racionais e finalmente os números reais.

As conceituações clássicas dos números reais (cortes de Dedekind, classes de equivalência de sequências de Cauchy de racionais e a abordagem axiomática) apresentam inconvenientes epistemológicos e filosóficos, que mereceram discussões.

Para Frege (1992, p. 30), a Matemática deveria sofrer uma revisão crítica a respeito de seus fundamentos; ele afirmava que os números negativos e os números irracionais deveriam ser analisados e submetidos a uma credencial de número, e isso requeria discutir a natureza e a definição de tais números.

A partir das críticas de Frege mostrou-se claramente que o caminho construtivo tradicional não era suficiente para incluir todos os números. A continuidade dos números reais, por exemplo, teve que ser introduzida por meio de um axioma. Constatada essa problemática na segunda metade do século XIX, começou-se a pensar em fundamentos axiomáticos para os números.

Entre as mudanças necessárias para a axiomatização dos números, destaca-se a compreensão dos axiomas, que deviam transformar-se de verdades objetivas e intuitivamente claras para premissas hipotéticas do pensamento; não havia mais a necessidade de atribuir conteúdo intuitivo aos conceitos utilizados, pois tais conceitos teriam o seu papel determinado pelos axiomas da teoria e deveriam expressar-se em termos de relações e equações.

Como consequência, a noção de objeto matemático também necessitava de uma mudança, e a axiomatização formal no sentido de Hilbert e Peano teve que ser completada por um pensamento pautado em modelos.

Objetos matemáticos podem ser vistos como elementos de um modelo, ou seja, de um mundo “artificial”. As dificuldades para conceituar número (como os números negativos ou irracionais) podem estar relacionadas ao concretismo ou empirismo no pensamento cotidiano. É preciso criar “mundos artificiais”, modelos para fornecer um conteúdo adequado.

A ausência de uma conceituação para número real que o apresente de forma única e que garanta a *complementaridade* dos aspectos *extensional* e *intensional* desse conceito torna as críticas dos filósofos às conceituações clássicas atuais e pertinentes.

Um desafio que se põe à Matemática é justamente o desenvolvimento de teorias que possam ser concebidas axiomaticamente e complementadas por modelos, aplicações ou interpretações.

A Matemática não é um formalismo vazio, e também não trata de objetos empíricos e concretos, mas precisa de um conteúdo criado por meio de modelos de vários tipos. O plano de Gauss dos números imaginários foi um primeiro exemplo histórico representativo dessa necessidade. É também o caso dos números de Conway, números esses que encontram em uma classe de jogos um novo modelo para os números reais.

A teoria de Conway (2001) possibilita a construção dos números de forma única, dos naturais aos transfinitos e pode ser realizada por meio de conjuntos e de algumas classes de jogos. Assim, a teoria é constituída por um par, de um lado temos uma caracterização axiomática e de outro temos os modelos (os jogos) que fornecem uma aplicabilidade da teoria e explicitam propriedades que constituem a conceituação dos números.

As conceituações clássicas dos números reais apresentam inconvenientes epistemológicos e filosóficos, por exemplo, a impossibilidade de responder a questão "O que é número?" e a construção dos números de forma única, que até então permaneciam sem encaminhamento.

Diante deste contexto buscamos explorar uma nova teoria para abordar os números reais, propondo a reflexão e discussão a respeito de suas potencialidades perante as abordagens clássicas, tendo como pressuposto teórico a noção de *complementaridade*.

Nesta pesquisa, temos como objetivos explicitar de que forma as abordagens clássicas dos números reais favorecem explorar os aspectos *intensional* e *extensional* do conceito de número; propor uma possível resposta para a questão "O que é número?"; explorar a teoria de Conway, mostrando suas potencialidades em relação à noção de *complementaridade*, e fazer algumas comparações entre essas abordagens tendo como pressuposto o referencial teórico.

Uma breve introdução às ideias de Conway

Apresentamos aqui de modo informal apenas algumas ideias de Conway, introduzindo sua conceituação de número, a associação que ele faz desse conceito com um jogo não será apresenta aqui devido à limitação de um artigo, o leitor interessado poderá encontrar uma apresentação mais completa da teoria em Fonseca (2010). O objetivo aqui é apenas familiarizar o leitor com as noções que inspiraram a teoria de Conway.

A noção de número de Conway é uma generalização dos cortes de Dedekind e merece o qualificativo de nova não apenas em função do tempo em que foi apresentada, mas pelos avanços epistemológicos que ela possibilita.

Ela foi elaborada na década de 1970, e oferece respostas às questões colocadas pelos filósofos a respeito da constituição do conceito de número, por exemplo, "o que é número?", abrange os aspectos *intensional* e *extensional* do conceito de número e evita os inconvenientes da construção dos números reais passo a passo, como nas abordagens clássicas.

Conway conceitua número utilizando a noção de corte, generalizando a definição de Dedekind, e também emprega como recurso uma classe especial de jogos e a teoria dos conjuntos.

A noção de corte de Conway é generalização da noção de Dedekind na medida em que prescinde do conjunto dos racionais como ponto de partida, abrangendo todos os números "grandes" e "pequenos": os números reais como 0, 1, ..., n, -1, 1/2, $\sqrt{2}$, π, ...; os números transfinitos como ω (o primeiro ordinal infinito); e também os números infinitesimais como $1/\omega$. A definição de ordem, no conjunto dos cortes, é conseguida tomando como modelos dos "cortes generalizados" uma classe especial de jogos.

Conway chama a atenção para o fato de o método de Dedekind construir os números reais a partir dos racionais, lembrando que antes deles também Eudoxo assim se conduz no quinto livro de Euclides. E que essa construção é obtida dividindo o conjunto dos racionais em dois conjuntos *E* (esquerdo) e *D* (direito) não vazios e de tal modo que nenhum número do conjunto *E* seja maior que algum número do conjunto *D*. Um número real então será o corte nos racionais obtidos com esses dois conjuntos. O corte é indicado por $\{E, D\}$. Um novo número irá aparecer quando *E* e *D* não possuírem elemento extremo.

Conway critica essa forma de construir os reais, que necessita construir antes os racionais. Seu argumento é que os racionais são reconstruídos como certos cortes de Dedekind, e que a distinção entre o "antigo" e o "novo" racional parece artificial, mas é essencial (CONWAY, 2001, p. 4).

O método de Conway, generalização de Dedekind, constrói **No** uma classe mais ampla de números, os Números Surreais. **No** é mais ampla na medida em que inclui os números reais, os transfinitos e os infinitesimais, e até mesmo os complexos, isto é, **No** é a classe de todos os números.

Vejamos como Conway generaliza o método de Dedekind. Em primeiro lugar considera duas classes de números *E* (classe da esquerda) e *D* (classe da direita). Impõe a essas classes a condição de que nenhum elemento da classe *E* seja maior ou igual que algum elemento da classe *D*. Então define número como o conjunto cujos elementos são as duas classes *E* e *D*, ou seja, o conjunto $\{E \mid D\}$.

A definição de Conway para um número x = $\{E \mid D\}$ supõe que as classes *E* e *D* sejam classes de números definidos anteriormente a x. Ou seja, a construção dos números se dá por recorrência. Vejamos como isso ocorre.

O conjunto vazio é utilizado para construir o primeiro número $\{\varnothing \mid \varnothing\}$. É evidente que tal conjunto de classes define um número. Esse número é o zero, isto é, $\{\varnothing \mid \varnothing\} = 0$. A partir dele obtêm-se outros números encontrando-se suas duas classes: a da esquerda e a da direita. O número 1, por exemplo, será o número $\{\{0\} \mid \varnothing\}$, o número 2, o número $\{\{0,1\} \mid \varnothing\}$, o número 3, o número $\{\{0,1,2\} \mid \varnothing\}$, e, assim por diante, obtêm-se todos os números inteiros. Os demais números racionais e irracionais também têm sua representação, porém não faremos referência aqui.

A associação número/jogo elaborada por Conway considera determinadas classes de jogos, aquelas que satisfazem certas condições. A classe de jogos Hackenbush é uma que se encaixa nas classes de jogos de Conway. Essa classe é derivada do conhecido jogo NIM regido pela teoria matemática elaborada por Bouton (1901). Em nossa pesquisa escolhemos uma versão da classe de jogos Hackenbush. A seguir apresentaremos de modo sucinto algumas ideias acerca da noção de *complementaridade*.

A noção de complementaridade

Pesquisadores da área de Educação Matemática, têm se utilizado da noção de *complementaridade* em seus estudos, em geral, para capturar aspectos cognitivos e epistemológicos relacionados ao desenvolvimento das ciências e de conceitos matemáticos (SKEMP, 1976; KUYK, 1977; SFARD, 1991; OTTE, 2003).

No artigo intitulado Complementary, Sets and Numbers, do filósofo e matemático Michael Otte (2003), a noção de *complementaridade* é utilizada para analisar e explicar o desenvolvimento epistemológico e cognitivo de conceitos matemáticos, em especial as noções de conjuntos e números. Para ele, a *complementaridade* relacionada à noção de número é concebida segundo os aspectos *intensional* e *extensional*, que não devem ser vistos apenas como uma dualidade, mas, sim, *complementares* no desenvolvimento do conceito de número. Entendemos por "*complementares* dois conceitos opostos que porém se corrigem reciprocamente e se integram na descrição de um fenômeno" (ABBAGNANO, 1982, p. 144).

No mesmo artigo, Otte evidencia o papel da *complementaridade* no desenvolvimento histórico de alguns conceitos matemáticos, e principalmente como a *complementaridade* interfere nas tentativas de explicação da noção de número.

As ideias expostas por Otte (2003) nos ajudam a entender e a responder algumas questões que envolvem a problemática de nossa pesquisa no que diz respeito à epistemologia e à cognição.

O debate em torno das concepções *intensional* e *extensional* da Matemática atinge particularmente e de forma intensa o conceito de número. A visão *intensional*, de número, a ordinalidade e a axiomatização sofrem críticas dos que privilegiam as aplicações matemáticas.

A noção de *intensão* de termos matemáticos explicita as relações entre classes de objetos matemáticos, assim como suas relações estruturais. No entanto, tal noção não esgota a conceituação do objeto matemático em si, por exemplo, uma abordagem axiomática dos números reais.

A noção de *extensão* de termos matemáticos concerne à interpretação dos objetos matemáticos, assim como às aplicações, caracterizando modelos da teoria. Uma abordagem *complementarista* torna-se relevante em razão da impossibilidade de definir a realidade matemática independentemente de suas possíveis representações e da própria atividade cognitiva, de forma semelhante à caracterização dos fenômenos de Bohr.

Uma teoria axiomática moderna transformou-se em um par, no seguinte sentido: de um lado ela é uma teoria *intensional*, descrevendo a relação entre seus termos teóricos por meio de axiomas. E, de outro lado, ela constitui referências ou *extensões* de tais termos, evidenciando as aplicações, interpretações ou modelos da teoria (OTTE, 2003).

Objetos matemáticos possuem uma natureza dual, eles podem ser dados *intensionalmente* por um sistema axiomático, mas devem ser complementados com "referências" e "atributos". Além das características relacionais dadas pela axiomática, teremos também possíveis interpretações de seus termos.

As características *intensional* e *extensional* são relativamente independentes, e conectam-se de modo circular ou *complementar*. Isto fica visível quando se observa a gênese do conhecimento matemático, e a relação entre o sujeito e objeto matemático (atividade matemática). Assim, o par *intensão* e *extensão* de termos matemáticos podem ser distinguidos da mera dualidade, concentrando-se no caráter evolutivo do conhecimento matemático.

Nessa perspectiva o foco está na relação entre o sujeito e o objeto matemático, e não somente no objeto em si. Esses fatores evidenciam a relevância da noção de *complementaridade* no que concerne a estudos epistemológicos da aprendizagem matemática (OTTE, 2003, p. 205).

O debate sobre a relação entre o aspecto *intensional* e as visões *extensionais* da Matemática foi particularmente intenso a respeito do conceito de número.

De acordo com Russell, nem Peano nem Hilbert, com suas axiomáticas, seriam capazes de definir o que é número. Frege também tinha uma ideia semelhante, para ele uma aritmética feita apenas com símbolos, sem nenhum significado, não teria qualquer tipo de aplicação.

A determinação axiomática de conceitos matemáticos estará sempre incompleta, e deve-se fazer uma análise consciente a respeito da possibilidade de que um conceito tenha uma extensão vazia (os axiomas podem ser inconsistentes). Se pretendermos introduzir todos os conceitos por meio de definições completas, tais definições devem necessariamente fazer suposições metafísicas e psicológicas sobre o mundo, caso contrário, faremos um empreendimento fútil (OTTE, 2003, p. 224).

Finalmente, não há, de fato, nenhuma possibilidade de determinar o significado de número desconectado de uma estrutura conjunto teórica. Em um artigo intitulado "What numbers could not be", Benacerraf (1965) mostra que o conceito de número pode ser reduzido ao conceito de conjuntos de várias maneiras distintas, sem possibilidade de escolher dentre as interpretações conjunto teóricas aquela que realmente caracteriza a verdadeira identidade dos números naturais em termos de conjuntos. Ele conclui que os números não podem ser reduzidos exclusivamente a conjuntos, ou conjunto de conjuntos.

Diversos filósofos e matemáticos buscaram responder a pergunta "O que é número?". As respostas apresentadas por diversas correntes filosóficas são insuficientes do ponto de vista da *complementaridade*. Na verdade o que ocorre é uma forma de "reducionismo" conforme descrito por KuyK (1977), ou seja, nas tentativas de respostas são considerados apenas os aspectos *intensionais* ou apenas *os extensionais* do conceito de número, e não a *complementaridade* entre eles.

A teoria de Conway pode fornecer uma resposta à questão. Podemos afirmar que número é um "jogo", assim como fez Conway (2001). Certamente devemos considerar que Conway não estava buscando responder a pergunta "O que é número?" do ponto de vista filosófico quando sustentou que "números são jogos", mas sua teoria pode ser usada para apresentar uma resposta a essa questão, visto que garante a *complementaridade* na conceituação de número.

Número real e a noção de complementaridade

Apresentaremos agora algumas considerações acerca das abordagens clássicas dos números reais (axiomática, classes de equivalência de sequências de Cauchy de racionais e corte de Dedekind) tendo como pressuposto teórico a noção de *complementaridade*. Ressaltamos ainda algumas potencialidades teóricas em relação à proposta de conceituação de número elaborada por Conway.

Uma abordagem axiomática dos números reais baseia-se na apresentação de uma lista contendo fatos elementares admitidos como axiomas, explicitando como estes objetos matemáticos se relacionam. Esses axiomas tornam o conjunto dos números reais num corpo ordenado completo. No bojo de uma abordagem axiomática não há qualquer tipo de descrição, interpretação ou aplicação para o objeto matemático. Apenas as relações entre os objetos são enfatizadas, caracterizando de forma unilateral o aspecto *intensional* dos números.

A noção de *intensão* estabelece apenas as relações entre classes de objetos matemáticos (relações estruturais). Uma abordagem axiomática dos números reais não descreve o objeto matemático em si, evidenciando apenas como se deve realizar operações com esses números, tratando-os como objetos ideais. Visto dessa forma o método axiomático torna-se incompleto, pois não garante o aspecto *extensional* do conceito de número.

Uma abordagem axiomática dos números reais estará sempre incompleta, pois apenas evidenciará o aspecto *intensional* dos números.

A construção dos números reais, proposta por Richard Dedekind em 1872 pressupõe os números racionais e suas propriedades e desenvolve o conceito de número apenas como um objeto do nosso pensamento, ou seja, de forma puramente abstrata.

Tradicionalmente para se obter os números, dos naturais aos reais, pode-se utilizar o seguinte caminho: os números naturais podem ser caracterizados pelos axiomas de Peano, em seguida, constrói-se o conjunto dos números inteiros por meio de classes de equivalência de pares ordenados de números naturais, o próximo passo é construir os números racionais por meio de classes de equivalência de pares ordenados de números inteiros, e por fim os números reais por meio dos cortes Dedekind ou por classes de equivalência de sequências de Cauchy (de números racionais).

Esse tipo de abordagem poderá tornar-se insuficiente do ponto de vista da *complementaridade*, de modo que apenas uma cadeia de deduções deverá ser aplicada; nessa construção não haverá nenhuma interpretação para os números, nenhum modelo ou aplicação.

Além disso, há certo tipo de ruptura na passagem dos números racionais para os reais. Essa ruptura caracteriza-se pela mudança de método, abandonam-se as operações com pares ordenados (de números naturais ou inteiros) para utilizar "novos" objetos, os cortes de Dedekind ou as classes de equivalência de sequências de Cauchy.

Normalmente, neste tipo de abordagem não são explorados possíveis modelos, aplicações ou interpretações dos números, os aspectos *extensionais* não são contemplados e a desejada *complementaridade* entre os aspectos *intensional* e *extensional* do conceito de número não ocorre.

Na construção dos números reais por meio de cortes de Dedekind ou por classes de equivalência de sequências de Cauchy apenas os aspectos lógicos dedutivos são explorados, em geral não há uma interpretação ou modelo intrínseco a essas teorias. Neste caso, se evidencia apenas o aspecto *intensional* dos números.

Para propor uma abordagem de acordo com a *complementaridade* seriam necessários modelos que propiciassem a interpretação dos números reais (cortes ou classes de equivalência de sequências), de suas operações e propriedades, o que permitiria explorar os aspectos *extensionais* do conceito de número.

A conceituação de número proposta por J. H. Conway e complementaridade

Faremos agora algumas considerações a respeito da teoria de Conway diante da noção de *complementaridade*.

A abordagem proposta por Conway fornece em seu bojo, alguns axiomas e definições com base nas teorias dos conjuntos, o que permite explorar o aspecto *intensional* do conceito de número. Além disso, temos também a interpretação de tais números por uma classe específica de jogos, ou seja, temos um modelo que permite a interpretação dos números, favorecendo o aspecto *extensional* do conceito de número.

Os jogos nessa teoria não têm um simples papel de aplicação para a axiomática, ele fornece uma interpretação e um modelo intrínseco à própria teoria, visto que a ordenação para os números encontra-se ser inspirada nos jogos.

Quando afirmamos que se trata de uma *complementaridade* que ocorre de forma natural, queremos dizer que não há uma hierarquia entre os aspectos *intensional* e *extensional*, de acordo com o exposto por Kuik (1977).

Assim, uma abordagem para os números, dos naturais aos reais, por meio da teoria de Conway pode ser realizada de várias maneiras.

Por exemplo, os números podem ser construídos concomitantemente por meio de conjuntos e por meio dos jogos, nesse caso, os jogos poderiam ser vistos como um modelo empírico que certamente favoreceria a criatividade, às conjecturas e suas respectivas verificações, a motivação e a experimentação. Esses aspectos estão intimamente ligados à atividade matemática envolvendo um processo de investigação matemática. Esse processo servirá de base para a compreensão do aparato lógico e das deduções que envolvem as definições, os teoremas e suas respectivas demonstrações.

Outra possibilidade de abordagem poderia basear-se na construção informal dos números por meio de jogos, e num segundo momento o desenvolvimento da parte formal da teoria por meio de conjuntos. Novamente os jogos forneceriam um modelo empírico que serviria de suporte para a abordagem formal, motivando a as principais ideias desenvolvidas na teoria e propiciando as experiências e verificações.

Podemos considerar ainda a possibilidade de inicialmente construir os números por meio de conjuntos (a partir dos axiomas de Conway), explorando o aspecto *intensional* do conceito de número, e posteriormente abordar os jogos; esses seriam vistos como uma interpretação, aplicação e modelo da teoria.

As possibilidades aqui descritas buscam apenas mostrar como a *complementaridade* surge de forma natural na conceituação de número proposta por Conway. Evidentemente, existirá a necessidade de uma organização didática da teoria de Conway antes de qualquer tipo de abordagem, o que possivelmente exigirá algum tipo de transposição didática e com certeza o desenvolvimento de outras pesquisas.

A abordagem de Conway pode possibilitar um trajeto original que permite construir por meio de um único processo todos esses números, dos naturais aos reais e dos infinitésimos e os transfinitos.

Considerações Finais

Com base em nossa pesquisa podemos dizer que o pensamento moderno em relação aos números pode ser descrito por três tendências, conforme descrevemos sucintamente abaixo.

A primeira tendência que foi proposta por Frege e apoiada por Russel (que pode ser chamada de logicismo) defende que a essência do conceito de número baseia-se apenas na consideração de algumas leis do próprio pensamento. Número de acordo com essa tendência é apenas uma consequência *conceitual* totalmente deduzida de alguns princípios originais.

Por outro lado temos a tendência das abordagens axiomáticas, como a axiomática de Peano ou a axiomática dos números reais, que pode ser chamada de formalismo, que constrói o campo numérico em um campo de operações, com base em alguns axiomas singulares.

Por fim as tendências que se baseiam na noção conjunto-teórica como as de Dedekind e Cantor que determinam os números em um caso particular de hierarquia de conjuntos. Nesse caso o conceito de número faz um retorno ontológico, de modo que as grandes ideias são os axiomas clássicos da teoria dos conjuntos. Nesse contexto, “número”, é um caso particular de predicado com certas propriedades distintivas.

A essência do conceito de número é a multiplicidade dotada de certas propriedades correspondentes à ordem interna, ou seja, sua aplicabilidade a todas as coisas e suas características estruturais. A conceituação de número deve ser concebida por meio da *complementaridade* entre seus aspectos *intensional* e *extensional*.

Acreditamos, à luz da complementaridade, que a perspectiva logicista deve ser abandonada por razões de consistência conforme demonstrou Gödel; não pode satisfazer às exigências do pensamento e especialmente do pensamento filosófico.

As perspectivas axiomáticas têm a tendência de socializar a tese de que os números circunscrevem apenas um projeto técnico, fornecendo para esse conceito apenas uma característica operacional ou estrutural, de modo que são exploradas exclusivamente as relações entre os objetos matemáticos, com ênfase no aspecto *intensional* do conceito de número.

A tese conjunto-teórica (cortes de Dedekind e classes de equivalência de sequências de Cauchy) não favorecem a exploração do aspecto *extensional* do conceito de número, pois não fornecem um modelo ou uma interpretação intrínseca à suas teorias.

Nenhuma dessas perspectivas oferece uma unificação do conceito de número. Para nós uma abordagem que forneça um conceito unificado para tais objetos matemáticos deve ser considerada dentro de uma conjuntura que envolva a Filosofia e a Matemática.

Frege (1992) propôs uma conceituação para os números que envolviam a noção de cardinal com um significado conjunto-teórico, mas ao mesmo tempo excluía os negativos e os irracionais. Ele afirmava que tais números deveriam ser analisados e submetidos a uma credencial de número, isso requeria discutir a natureza e a definição de tais números.

Os números naturais são geralmente determinados pela axiomática de Peano, os números negativos são abordados por meio de manipulações algébricas, com uma introdução que não abrange a essência do conceito de número, mas apenas seu arranjo operacional, em estruturas (simétrico aditivo). As manipulações algébricas se repetem da mesma forma para a obtenção dos números racionais (simétrico multiplicativo). E por fim há uma ruptura que marca a passagem aos números reais, que usualmente pode ser feita de forma axiomática, ou por meio de classes de equivalências de sequências de Cauchy de números racionais, ou por cortes de Dedekind.

Como se pode obter uma ideia única de número por meio de tal processo se todas essas abordagens envolvendo as extensões dos conjuntos privilegiam apenas os aspectos operacionais do conceito de número, em outras palavras podemos dizer que apenas o aspecto *intensional* do conceito de número é explorado e o aspecto *extensional* não é contemplado.

Diante desse contexto, apontamos para a possibilidade de uma "nova" abordagem, a proposta de J. H. Conway. Tal proposta possibilita a construção dos números naturais aos reais por um processo único, sem rupturas, permite uma abordagem *complementar* entre os aspectos *intensional* e *extensional* do conceito de número e ainda fornece uma possibilidade de resposta à questão "O que é número?". Nesse caso, a resposta "número é um jogo".

As potencialidades em relação à teoria de Conway descritas nesta tese mostram como a *complementaridade* surge de forma natural na conceituação de número proposta por Conway. De um lado temos alguns axiomas e definições com base nas teorias dos conjuntos, caracterizando o aspecto *intensional* do conceito de número. Por outro lado temos uma classe de jogos, que fornecem um modelo para interpretação de tais números, caracterizando o aspecto *extensional*.

Nosso objetivo com este estudo não é propor a utilização do método de Conway como substituição das conceituações clássicas no processo de ensino e aprendizagem dos números reais, mas sim acrescentar argumentos que possam subsidiar as reflexões em relação às problemáticas que envolvem o conceito de número real, como, a constituição epistemológica de tal conceito.

Acreditamos que este estudo poderá ser relevante à Educação Matemática sob dois prismas, o primeiro de cunho teórico e o segundo de um ponto de vista mais prático. O primeiro refere-se ao contexto epistemológico, buscando explicitar a natureza e os critérios de verdade utilizados por matemáticos no desenvolvimento de suas teorias, explicitando a diversidade de formas conceituais que traduz as noções matemáticas, mais especificamente o conceito de número real. O segundo, de caráter mais prático, na medida em que pode subsidiar algumas reflexões acerca da conceituação de número real, em especial novas abordagens para introduzir o conceito de número no Ensino Superior.

O fato de poder conceituar número a partir de uma classe de jogos pode ser considerado particularmente interessante, pois como sabemos o ato de jogar é uma atividade que desde muito cedo acompanhou nossa civilização. A história da Matemática mostra que grandes matemáticos ao longo do tempo se ocuparam de alguns tipos de jogos e assim nasceram alguns ramos da Matemática.

Para a Educação Matemática o estabelecimento desse elo também pode ser vantajoso na medida em que associa um conceito matemático que é abstrato a uma atividade humana bastante concreta e cultivada desde sempre.

Às essas ideias acrescenta-se o fato de que os jogos possibilitam a ação dos sujeitos e a interação dos mesmos na atividade matemática, e que nesse caso o jogo sendo um modelo concreto poderá favorecer o levantamento de conjecturas a respeito da construção dos números.

No processo de construção dos números serão fundamentais as comparações e análises das configurações dos jogos. Assim, nosso interesse não se fundamenta no jogo em si próprio, pelo simples prazer de jogar, mas sim nas descobertas das relações envolvidas na construção dos números por meio dos jogos.

Finalmente apontamos alguns desdobramentos da nossa pesquisa. Uma possibilidade de desdobramento deste estudo baseia-se na organização de uma sequência didática fundamentada na teoria de Conway para abordar os números de forma única (dos naturais aos reais), no Ensino

Superior, possivelmente nos cursos de Licenciatura ou Bacharelado em Matemática. Tal pesquisa certamente necessitará de uma análise *a priori* em relação aos conhecimentos prévios dos estudantes a respeito dos números, a partir de tal estudo pode-se organizar uma sequência de atividades para abordá-los.

Referências Bibliográficas

ABBAGNANO, N. (1982). *Dicionário de Filosofia*. Tradução de Alfredo Bosi. 2 ed. São Paulo: Mestre Jou.

BENACERRAF, P. (1965). *What Numbers Could not Be*. The Philosophical Review. Duke University Press on behalf of Philosophical Review. Vol. 74, n.1. (Jan. 1965), p. 47-73. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/2183530>. Acesso em: 09 nov. 2009.

BOUTON, C. L. (1901). *Nim, a game with a complete mathematical theory*. Annals of mathematics, ser II, vol. 3, nº 1, p. 35.

CONWAY, J. H. (2001). *On Numbers and Games*. 2nd ed. Natick, Massachusetts: A K Peters.

DEDEKIND, R. (1901). *Essays on the Theory of Numbers*. Tradução Woostre Woodruff Beman. Chigago: The Open Court Publishing Company, 1901. Disponível em: <http://www.gutenberg.org/files/21016/21016-pdf.pdf>. Acesso em: 04 de abril, 2010.

FONSECA, R. F. da. (2010). *A complementaridade entre os aspectos intensional e extensional na conceituação de número real proposta por John Horton Conway*. Tese (Doutorado em Educação Matemática). PUC-SP. São Paulo.

FREGE, G. (1992). *Os fundamentos da aritmética*. Tradução, prefácio e notas de Antônio Zilhão. Rio de Janeiro: Imprensa Nacional; Casa da Moeda.

KNUTH, D. E. (2002). *Números surreais*. Tradução de Jorge Nuno Silva. Lisboa: Gradiva.

KRAUSE, D. (2002). *Introdução aos Fundamentos Axiomáticos da Ciência*. São Paulo: EPU.

KUYK, W. (1977). *Complementarity in Mathematics*. Dordrecht, Holland: Reidel Publishing Company.

OTTE, M. (2003). *Complementarity, Sets and Numbers*. Educational Studies in Mathematics. Printed in the Netherlands: Kluwer Academic Publishers. vol. 53, p. 203-228.

RUSSELL, B. (2007). *Introdução à Filosofia Matemática*. Tradução Maria Luiza X. de A. Borges; revisão técnica, Samuel Jurkiewicz. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2007.

SFARD, A. (1991). *On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin*. Educational Studies in Mathematics. Printed in the Netherlands: Kluwer Academic Publishers. vol. 22, p. 1-36.

SKEMP, R. R. (1976). *Relational Understanding and Instrumental Understanding*. Mathematics Teaching, 77, 20–26.