Conocimiento profesional de los profesores-formadores sobre la didáctica del cálculo

Edson **Crisostomo** dos Santos[1]

Universidade Estadual de Montes Claros ï UNIMONTES

Brasil

edson.crisostomo@unimontes.br

Resumen

Se aborda el problema de la identificación de criterios para el diseño y desarrollo curricular de contenidos matemáticos específicos teniendo en cuenta los conocimientos profesionales de los profesores-formadores, y su articulación con los resultados de la investigación en el tema correspondiente. Se trata de un estudio de casos centrado en la enseñanza de la integral a futuros profesores de matemática de secundaria. Describimos el procedimiento metodológico seguido así como las principales conclusiones obtenidas. Utilizamos de manera sistemática las herramientas conceptuales elaboradas por el llamado ñEnfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticaò.

Palabras clave: conocimiento profesional, didáctica del cálculo, formación de profesores de matemáticas, profesores-formadores.

Área problemática y organización del estudio

La problemática didáctica general que abordamos en nuestra investigación se refiere al diseño, desarrollo e implementación de programas de enseñanza y aprendizaje de un contenido matemático específico, *la integral*, en el contexto socio-profesional de la formación de profesores de matemáticas de secundaria.

La complejidad del problema ante las diversas facetas y dimensiones a tener en cuenta, nos lleva a abordarlo desde dos aproximaciones complementarias: (1) estudio sistemático de los resultados de investigaciones académicas realizadas en el campo; (2) caracterización de los conocimientos didáctico-matemáticos de profesores-formadores expertos en la enseñanza del cálculo en el nivel universitario.

En las investigaciones actualmente desarrolladas sobre formación y pensamiento de profesores (Swoder, 2007; Philipp, 2007; Wood, 2008) se pone de manifiesto distintos modelos teóricos utilizados para llevar a cabo los procesos de estudio. Esto es relevante para la organización de programas de estudio y evaluación de su eficacia. En nuestra investigación, centramos nuestra atención en la formación de profesores de matemáticas, especialmente a partir de los conocimientos profesionales de los profesores-formadores sobre dicha formación.

[1] Profesor del Departamento de Ciencias Exactas de la Universidad Estatal de Montes Claros, Brasil. Doctorando en Didáctica de la Matemática en la Universidad de Granada, España. edson.crisostomo@unimontes.br

La enseñanza de cualquier contenido matemático, sea en los niveles de educación básica o secundaria, o bien orientada a la formación de profesionales es el tema central de la investigación didáctica, y también el ámbito de actuación y reflexión de los profesores de matemáticas. En ambas comunidades de prácticas (investigación y docencia) se desarrollan y aplican conocimientos sobre una misma realidad, aunque con frecuencia dichas comunidades están desconectadas. La separación entre la ñteoríaò y la ñprácticaò, entre los resultados de la investigación académica y la práctica de la enseñanza de las matemáticas es un tema de reflexión frecuente, como describe Ruthven (2002). Este autor analiza los vínculos entre la investigación y la enseñanza, proponiendo una cooperación entre los conocimientos derivados de la investigación académica y los conocimientos derivados de la práctica profesional. ñUna preocupación particular se refiere a cómo se puede promover una mayor sinergia entre estas dos prácticas específicas, sus formas características de conocimiento, y los procesos asociados de creación de conocimientoò (Ruthven, 2002, p. 581).

En general, las investigaciones desarrolladas en el campo ñPensamiento del profesor de matemáticasò y sobre ñDidáctica del cálculoò suelen abordar aspectos parciales del problema, centrándose principalmente en cuestiones de tipo cognitivo. El diseño y desarrollo curricular, tanto a nivel macro como micro-didáctico, requiere tener en cuenta, además de las ñconcepciones, errores y dificultadesò de los estudiantes, las dimensiones epistémicas (significados institucionales), la mediacional (uso de recursos tecnológicos y temporales), los modos de interacción docente-discente en el clase, así como los aspectos que podemos calificar de ecológicos, esto es, el estudio de los condicionantes sociales, económicas, etc.

Por otra parte, conocer lo que piensan, opinan y creen los profesores sobre las matemáticas y su enseñanza es una tema de investigación necesario para poder abordar con fundamento las cuestiones del desarrollo profesional de los profesores de matemáticas. ñExtraer y codificar este conocimiento artesanal tiene el potencial de mejorar la efectividad con que se puede realizar la formación de profesores, proporcionando marcos más explícitos para analizar los procesos de enseñanza, para articular mecanismos y funciones, y para comprender su adaptación a condiciones diferentesò (Ruthven, 2002, p. 596). Se trata, por lo tanto, de establecer un concurso activo y concertado entre el *conocimiento profesional docente* y el *conocimiento académico* sobre estos problemas didáctico-matemáticos.

El contenido matemático general, en el que fijamos nuestra atención, será el Cálculo, y el estudio se llevará a cabo sobre los procesos de estudio de la integral en la enseñanza universitaria, particularmente en la formación de profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria. Se trata de elaborar una metodología de estudio sistemático de las diversas facetas o componentes, implicadas en la didáctica del cálculo que tenga en cuenta los aportes de la investigación académica y el conocimiento profesional docente de los profesores-formadores. Utilizaremos para este fin el marco teórico desarrollado por Godino y colaboradores (Godino y Batanero, 1998; Godino, Batanero y Font, 2007), que se describe como ñEnfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticaò (EOS), al considerar que aporta una perspectiva global sobre las dimensiones epistémica, cognitiva e instruccional, y herramientas de análisis potentes para abordar nuestro problema de investigación.

En nuestro estudio describimos el procedimiento metodológico seguido para ñextraer y codificarò el *conocimiento profesional* de una muestra de expertos (profesores-formadores y autores de libros de texto de Cálculo con una amplia experiencia profesional en la enseñanza universitaria de Cálculo), indicando las principales conclusiones obtenidas. En este trabajo nos restringimos al análisis de los conocimientos profesiones puesto en juego sobre la enseñanza universitaria de la integral por uno de los profesores-formadores entrevistado.

Antecedentes

Los estudios de interés de nuestra investigación están relacionados con los conocimientos, creencias y concepciones de los profesores, y con la didáctica del cálculo integral, los cuales sintetizamos a continuación.

Conocimientos, creencias y concepciones de los profesores sobre las matemáticas y su enseñanza

Como se afirma en Font y Ramos (2005), hay básicamente dos maneras de enfocar la investigación sobre creencias, concepciones y conocimiento del profesor que son el trasfondo de la clasificación que habitualmente se utiliza. Una tiene como trasfondo la filosofía de la conciencia mientras que la otra se basa en la filosofía de la acción**.** Dicha clasificación (Marcelo, 2002) distingue entre las investigaciones sobre el *pensamiento del profesor* y las que se interesan por el *conocimiento del profesor*. La investigación sobre el pensamiento del profesor, mayoritaria en los años 80, se realizó fundamentalmente bajo un enfoque cognitivo.

En la última década este tipo de investigación dio paso a una preocupación por el conocimiento del profesor, ya que se tomó conciencia de que los profesores generan conocimiento sobre la enseñanza a partir de su práctica que conviene ser investigado. En este sentido, Ponte y Santos (1999) consideran que, en esta nueva etapa, las investigaciones están centradas en ñestudiar el conocimiento y las concepciones del profesor, así como sus procesos de formación y desarrollo profesional como profesor de matemática y miembros de la institución escolarò (p. 1).

Para referirse al *conocimiento profesional* docente (Fenstermacher, 1994; Munby, Russell y Martín, 2001), suelen ser utilizadas dos categorías: el conocimiento formal y el conocimiento práctico del profesor. Mientras el conocimiento práctico, construido por el profesor a partir de su propia práctica u orientado a las actividades prácticas, se caracteriza por ser más personal, situado, tácito, relacional o ligado al saber-hacer, el conocimiento formal se acerca al conocimiento proposicional, declarativo, teórico o científico.

Según Pires (2006), tanto la psicología cognitiva (Borko y Putman, 1995) como la identificación y sistematización de los dominios de conocimiento profesional (Bromme, 1994; Elbaz, 1983; Ponte, 1999; Shulman, 1986) contribuyen para la mejor comprensión del conocimiento formal. Por otra parte, el conocimiento práctico ï concebido a partir de la integración de los *saberes experienciales* y de los *saberes teóricos* ï presenta una naturaleza contextualizada y se modeliza a través de valores e intenciones del profesor (Clandinin, 1989; Elbaz, 1983); además, puede ser caracterizado como un conocimiento en acción enmarcado en la práctica reflexiva.

Según Hielbert, Gallimore e Stigler (2002), el conocimiento práctico se desarrolla como respuestas a los problemas específicos de la práctica de la cual se originan. Se trata, por tanto, de un conocimiento integrado, pormenorizado, concreto y específico que se convierte en conocimiento profesional al tornarse público, acumulable y comunicado en una comunidad de prácticas.

En la literatura específica también se utiliza la expresión ñcraft knowledgeò (conocimiento artesanal) para referirse al conocimiento que los profesores usan en la enseñanza que diariamente realizan en su clase. Se trata de un conocimiento orientado a la acción, que generalmente no se hace explícito por el profesor y que puede ser para ellos difícil de articular, o que incluso pueden ser inconscientes de su uso.

> ñDesde un punto de vista cognitivo, el conocimiento profesional se desarrolla como un producto de la acción profesional, y se establece en sí mismo mediante el trabajo y el ejercicio de la profesión, no simplemente mediante la acumulación del conocimiento teórico, sino mediante la integración, ajuste y reestructuración del conocimiento teórico a las demandas y restricciones de las situaciones prácticasò (Bromme y Tillema, 1995, p. 262; citado por Ruthven, 2002, p. 590).

Nosotros compartimos la idea de Ruthven (2002, p. 590) que la ñconversiónò del conocimiento no tiene que darse solo en la dirección de la ñteoríaò hacia la ñprácticaò, sino que también puede tener lugar en la dirección opuesta, esto es, mediante la ñextracción y codificaciónò del conocimiento profesional. ñArticulado mediante la investigación, el conocimiento profesional puede llegar a contribuir al desarrollo del propio conocimiento académicoò (p. 590).

Por tratarse del conocimiento profesional que el profesor-formador manifiesta sobre la integral, sintetizaremos también algunas investigaciones realizadas en el campo de la didáctica del análisis matemático centradas en el ñpensamiento matemático avanzadoò (PMA), especialmente las relacionadas con la integral.

Algunas investigaciones en didáctica del cálculo

La investigación, entendida de manera científica o académica, sobre el ñpensamiento matemático avanzadoò (Tall, 1991; 1996) es ya abundante, incluso sobre el tema específico de la integral; además, podemos resaltar las aportaciones encontradas en los PME de la última década a través de las investigaciones de Bezuidenhout y Olivier (2000); Czarnocha et al. (2001); Rasslan y Tall (2002); Carlson et al. (2003) centradas en la problemática relativa a la enseñanza y aprendizaje del Cálculo. Para Dreyfus y Eisenberg (1990) esto está ligado no solamente con el hecho de que el cálculo es la rama de la matemática avanzada a la que se dedica una mayor cantidad de tiempo en los estudios, sino por el número de problemas no triviales que suelen presentarse en su proceso de aprendizaje.

Artigue (1998, 2003) apunta también a la formalización que se requiere en niveles universitarios, y que obliga al alumno a romper con el trabajo algebraico ordinario y a reconstruir significados como el de igualdad. En otro estudio previo, Artigue (1991) señaló las dificultades que surgen para los estudiantes en un curso de introducción al Cálculo, destacando que en la enseñanza tradicional de dicha disciplina esto se resuelve a través de una excesiva algebrización, resaltando principalmente el predominio de la manipulación de fórmulas en lugar de las funciones; del cálculo de derivadas en lugar de la teoría de aproximaciones lineales; del cálculo de primitivas en lugar de la búsqueda de significados para la integral; de algoritmos (o recetas) para calcular ecuaciones diferenciales en lugar de solucionarlas a través de aproximaciones numéricas y gráficas.

Tall (1991) al abordar la transición del pensamiento matemático elemental para el pensamiento matemático avanzado, resalta que:

> ñel cambio del pensamiento matemático elemental al avanzado involucra una significativa transición: desde la descripción a la definición, desde el convencimiento a la demostración de manera lógica basada en las definiciones. Esta transición requiere una reconstrucción cognitiva,

> que se manifiesta durante los conflictos iniciales de los estudiantes universitarios con las abstracciones formales enfrentadas por ellos en el primer año de universidadò (p. 20).

En estudios anteriores (Crisóstomo, 2004; Crisóstomo, Ordóñez, Contreras y Godino, 2006) hemos sistematizados algunos resultados de investigaciones previas relacionadas con la caracterización de los significados institucionales de referencia de la integral definida, en el contexto de la formación de profesores de matemática de la enseñanza secundaria. En dichos estudios utilizamos algunas herramientas teóricas del ñEnfoque ontosemiótico de la cognición y la instrucción matemáticaò que serán ampliadas y sintetizadas en la sección 3.

Marco teórico y definición del problema específico

En este estudio estamos interesados en caracterizar los conocimientos profesionales sobre la didáctica de un contenido específico, la integral, en el contexto de la formación de profesores de matemática de la enseñanza secundaria en Brasil. Para eso, es necesario aplicar un marco teórico que permita tener en cuenta las distintas facetas y dimensiones inherentes al proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Consideramos que el denominado ñEnfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticaò (EOS), desarrollado por Godino y Colaboradores, aporta herramientas adecuadas para abordar el problema de investigación que proponemos estudiar desde una perspectiva nueva.

Por ello, la aplicación del referido marco teórico al campo específico abordado en esta investigación (caracterización de los significados personales de profesores-formadores expertos sobre un objeto matemático) requiere desarrollar algunos aspectos del mismo en la dirección iniciada por Font y Ramos (2005).

Enfoque ontosemiótico del conocimiento matemático

Los postulados o supuestos básicos del EOS se relacionan principalmente con la antropología, la ontología y la semiótica, pero también se articulan de manera coherente supuestos socioculturales y psicológicos. La matemática se concibe como una actividad humana, intencionalmente orientada a la solución de cierta clase de situaciones-problemas, realizada en el seno de instituciones o comunidades de prácticas; dicha actividad está mediatizada y apoyada por los recursos lingüísticos y tecnológicos disponibles. De los sistemas de prácticas realizadas para resolver los problemas emergen dos categorías primarias de entidades: institucionales (sociales, relativamente objetivas) y personales (individuales o mentales); de esta manera se asume que la matemática es, además de una actividad, un complejo de objetos culturales (institucionales), axiomática y deductivamente organizado. Se atribuye un papel esencial al lenguaje (en sus diversas modalidades), que tiene una función no sólo representacional sino también instrumental o constitutiva de los objetos matemáticos.

Para hacer operativos estos principios el EOS propone como herramientas analíticas el par de nociones, ñsistema de prácticas operativas y discursivasò y ñconfiguración onto-semióticaò, ambas en la doble versión personal e institucional.

Las configuraciones articulan los siguientes tipos de objetos matemáticos primarios: *lenguaje*, *situaciones-problemas*, c*onceptos-definición y argumentos*.

La noción de ñsistema de prácticasò es útil para ciertos análisis de tipo macrodidáctico, particularmente cuando se trata de comparar la forma particular que adoptan los conocimientos matemáticos en distintos marcos institucionales, contextos de uso o juegos de lenguaje. Para un análisis más fino de la actividad matemática es necesario introducir los seis tipos de entidades primarias indicadas anteriormente. En cada caso, estos objetos estarán relacionados entre sí formando *configuraciones*, definidas como las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos. Estas configuraciones pueden ser *epistémicas* (redes de objetos institucionales) o *cognitivas* (redes de objetos personales). Los sistemas de prácticas y las configuraciones se proponen como herramientas teóricas para describir los conocimientos matemáticos, en su doble versión, personal e institucional.

La relatividad socioepistémica y cognitiva de los significados, entendidos como sistemas de prácticas, y su utilización en el análisis didáctico lleva a introducir la siguiente tipología de significados institucionales: implementado, evaluado, pretendido y referencial. Respecto de los significados personales se introducen los siguientes tipos: global, declarado, logrado

Enfoque ontosemiótico de los conocimientos didácticos

El EOS ha sido desarrollado inicialmente para caracterizar los significados de objetos matemáticos (función, derivada, integral, ...). Pero en Godino, Batanero y Font (2007) se inicia su aplicación y desarrollo para los conocimientos didácticos. En este caso los problemas tendrán una naturaleza distinta:

- ✓ ¿Qué contenido enseñar en cada contexto y circunstancia?
- ✓ ¿Cómo distribuir en el tiempo los distintos componentes y facetas del contenido a enseñar?
- ✓ ¿Qué modelo de proceso de estudio implementar en cada circunstancia?
- ✓ ¿Cómo planificar, controlar y evaluar el proceso de estudio y aprendizaje?
- ✓ ¿Qué factores condicionan el estudio y el aprendizaje?, etc.

En este caso, las acciones (prácticas didácticas) que se pongan en juego, su secuenciación (procesos didácticos) y los objetos emergentes de tales sistemas de prácticas (objetos didácticos) serán diferentes respecto del caso de la solución de problemas matemáticos.

En el marco del EOS tanto los objetos matemáticos como sus significados son relativos a los marcos institucionales, contextos de uso o juegos de lenguaje, por lo que resulta conveniente hablar del ñobjeto O relativo al contexto Cò ($O/_C$). Por ejemplo, $O/_C$ puede ser ñla integral en el contexto socioprofesional de formación de profesores de matemáticas de secundaria en Brasilò. Asociado al objeto matemático $O/_C$ existe otro objeto didáctico, ñla didáctica de $O/_C$ò que vamos a representar por $D(O/_C)$. El sistema de prácticas operativas y discursivas en las que interviene $D(O/_C)$ será considerado como su significado que representaremos por $S[D(O/_C)]$.

El significado de este objeto didáctico será relativo a marcos institucionales (I) y a las personas P sujetas a dichas instituciones; tales significados serán representados por la notación, $S_I[D(O/_C)]$, y $S_P[D(O/_C)]$, respectivamente. De los sistemas de prácticas se postula que emergen nuevos objetos (matemáticos o didácticos, institucionales o personales). La tipología de significados institucionales y personales mencionada anteriormente será también aplicable a estos nuevos ñsignificados didácticosò, los cuales se describirán así mismo mediante las correspondientes configuraciones epistémicas y cognitivas, pero en este caso referidas a los tipos de objetos didácticos introducidos en el modelo teórico.

El problema que abordamos en este trabajo podemos formularlo dentro del marco teórico descrito en los siguientes términos: ¿Cuáles son los significados personales de profesores-formadores expertos en Cálculo sobre la Didáctica de la integral en el contexto de la formación de profesores de matemáticas de secundaria en Brasil?

Los significados personales que los profesores-formadores ponen de manifiesto sobre la enseñanza de la integral en dicho contexto pueden asociarse con sus conocimientos profesiones. Dichos significados personales sobre la integral, junto con el significado institucional global u holístico de esta noción matemática, determinado mediante la indagación sistemática de las investigaciones didácticas realizadas en el campo de la Didáctica del cálculo, proporcionará criterios para elaborar significados de referencia para los procesos de formación de profesores de matemáticas en el contexto institucional fijado.

Consideramos que este ñenfoque ontosemióticoò de los conocimientos didácticos aporta una nueva aproximación a los problemas sobre conocimientos, concepciones y creencias del profesor sobre las matemáticas y su enseñanza. Consideramos que como la cuestión central de nuestra investigación se relaciona con aspectos históricos, epistemológicos, semióticos y pedagógicos del proceso de enseñanza del cálculo en la formación de profesores de matemática de la enseñanza secundaria, la búsqueda de respuestas a la misma requiere tener en cuenta distintas dimensiones del análisis del proceso de enseñanza. Para llevar a cabo dicho análisis y aportar posibles interpretaciones y explicaciones al problema, se propone una investigación predominantemente cualitativa-interpretativa realizada a través de un estudio de caso.

Conocimientos profesionales del profesor-formador sobre la didáctica de la integral

A continuación, trataremos de presentar, sintéticamente, la caracterización de los conocimientos profesionales de P2. Para ello hemos contemplado solamente uno de los indicadores contemplados la epistémica referente a las situaciones-problemas en el proceso de estudio de la integral. Por cuestión de espacio, no discutiremos en este estudio los demás indicadores de la dimensión epistémica, así como también las demás dimensiones desarrolladas en el Enfoque Ontosemiótico (cognitiva, mediacional, interaccional, emocional y ecológica). Las categorías usadas para sistematizar la dimensión epistémica de la integral fueron extraídas, por una parte, de algunos estudios previos que hemos desarrollado sobre el tema y, por otra, de las propias informaciones obtenidas por P2 a través de la entrevista realizada.

Dimensión epistémica de la integral

La noción de integral presenta distintos significados institucionales en el contexto de la Licenciatura en Matemática. A partir de un estudio previo que hemos realizado y según las informaciones extraídas de la entrevista con P2, podemos describir la dimensión epistémica de la integral a través de cinco configuraciones epistémicas: *intuitiva, primitiva, geométrica, aproximada* y *aplicada*. Cada una de las referidas configuraciones toma como punto de partida las situaciones-problemas, articulándolas con las demás entidades primarias de análisis del EOS (conceptos-definición, lenguaje, procedimientos, proposiciones, y argumentos).

En este apartado analizamos, sintéticamente, las aportaciones de P2 relativas a la dimensión epistémica de la integral. Para sistematizar este análisis, utilizamos las *configuraciones epistémicas* de la integral, resaltando sus relaciones y articulaciones, así como los abordajes y adaptaciones curriculares.

Las situaciones-problemas en la visión de P2

P2 considera que se puede introducir y desarrollar las nociones de cálculo, en la enseñanza universitaria, a partir de algunos problemas prototípicos. En esta dirección, P2 ha comentado el abordaje de las nociones de derivada e integral que considera más apropiadas para esta finalidad en un curso introductorio de cálculo en la enseñanza universitaria. Según ha declarado P2:

> Pienso que es posible trabajar las nociones del cálculo a partir de los problemas. (é) Tradicionalmente lo que se hablaba era del cálculo de velocidad y del cálculo de áreas. (...) La cuestión entonces es cómo pasar de esta situación introductoria para la generalización de la integral en el ámbito de la matemática. Esto tiene que realizarse con cautela. Pienso que la idea de tasa de acumulación es interesante, porque hay momentos que se gana (acumula positivamente) y otros que estará perdiendo (restando). Así que la noción del área orientada es más sencilla que cuando introducimos la integral como área y después intentamos generalizar (P2, 2006).

Las nociones de *tasa de variación* y *tasa de acumulación* (o crecimiento acumulado) son sugeridas por P2 como una alternativa al proceso tradicional de enseñanza de las nociones de derivada e integral, que suelen desarrollarse en los cursos de cálculo a partir de los problemas de velocidad y de áreas, respectivamente. Esta idea está presente en el trabajo de Tall (1996). Según el referido autor ñla teoría de funciones y cálculos puede ser resumida como el estudio del hacer y deshacer de los procesos involucradosò (p. 293). En este sentido, Tall propone el desarrollo de la integral a partir de la noción de *crecimiento acumulado*.

P2 argumenta que la ventaja de desarrollar la integración a partir de la *tasa de acumulación (o crecimiento acumulado)* se basa en la posibilidad de utilización de dicha noción para abordar tanto las situaciones-problemas que se relacionan con una ganancia, como aquellas en las cuales se produce una perdida. Además, considera que el crecimiento acumulado emerge, naturalmente, de la noción de integral definida (sumándose o restándose en el caso de que la función sea positiva o negativa, respectivamente). En otras palabras, para P2 los problemas prototípicos para introducir y desarrollar la integral en los cursos universitarios de Cálculo deben estar relacionados con *tasa de acumulación (o crecimiento acumulado)*. Concretamente, P2 ha planteado que le gustaría introducir y desarrollar el proceso de enseñanza de la integral a partir de la idea de *crecimiento acumulado*. En su opinión:

> Si empezamos con la tasa de variación, podemos plantear un problema del tipo: si cierta función representa una tasa de variación de una variable, después de un intervalo de tiempo, ¿cuál fue el crecimiento acumulado? Estamos hablando de la integral definida; esta es una manera que me gustaría empezar actualmente (P2, 2006).

Esta concepción de la integral, emergente de los relatos de P2, nos lleva a considerar la *configuración epistémica avanzada* como otro significado personal de la integral en la formación de profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria. En esta concepción, la problemática general de la integración: integral definida (*crecimiento acumulado*) e integral indefinida (*curvas que tienen derivadas conocidas*) han sido sintetizadas por P2 de la siguiente manera:

> Tenemos las curvas cuyas tangentes son dadas por determinadas expresiones que podemos obtenerlas por medio de las integrales indefinidas; en el caso de la integral definida tenemos áreas, volúmenes,..., o sea, se refiere a las tasas de acumulación de manera general. Al pensar en la integral indefinida, la cuestión sería cuáles son las curvas cuya derivada es conocida (P2, 2006).

Por otra parte, hemos identificado en la entrevista de P2 algunas situaciones-problemas específicas relacionadas con algunas de las demás configuraciones epistémicas de la integral.

Dichas situaciones-problemas serán descriptas y relacionadas con las demás configuraciones epistémicas de la integral que emergen de los relatos de P2.

P2 considera que la construcción de la noción de integral indefinida está basada en la problemática relacionada con cuáles son las curvas cuya derivada es conocida. No obstante, resalta que ñgeneralmente los estudiantes suelen resumir todo el significado de la integral al de antiderivadaò (P2, 2006). Todo ello revela la fuerte presencia de la *configuración epistémica primitiva* en el proceso de estudio de la integral en la enseñanza universitaria.

Por otra parte, P2 afirma que el desarrollo de la integración en los libros de texto de Cálculo de enseñanza universitaria, tradicionalmente se realiza con las nociones de áreas y volúmenes. Sin embargo, asume que es fundamental que los estudiantes universitarios comprendan la noción de integral definida y sepan utilizarla en la resolución de las situaciones-problemas de naturaleza geométrica. En este sentido, P2 presenta el siguiente ejemplo:

> Si tienes un buen concepto de la integral definida, para hallar la integral de la función *f(x)= senx*, en el intervalo cerrado de *0* a *2´*, si la representas geométricamente, si sabes qué representa la integral definida sabes que el resultado es igual a cero sin necesidad de hacer ningún cálculo (P2, 2006).

Por lo tanto, P2 resalta no solamente la utilización de la integración en los típicos problemas geométricos de áreas y volúmenes, sino en la interpretación de la integral definida partir de su representación gráfica y del significado de la referida noción matemática. Así, podemos identificar la *configuración epistémica geométrica* en el relato de P2.

No obstante, P2 discute la problemática presente en los estudiantes relativa a los diversos significados que asume la integral definida (a partir de las distintas situaciones-problemas) y su actitud de simple memorización de los conceptos que requieren el empleo de la referida integral en su solución. En la opinión de P2:

> Los estudiantes deben percibir que la lectura de la integral definida depende de su contexto de uso, lo que cambia son los problemas. Es decir, los problemas pueden producir distintos significados de la integral y, en muchos casos, los estudiantes solamente memorizan los conceptos. Por ejemplo, memorizan el concepto de trabajo, pero no saben porqué es una integral (P2, 2006).

En este sentido, P2 resalta la necesidad de la visualización geométrica como recurso para atribuir una integral adecuada para la solución de cada situación-problema que requiere su aplicación. Asimismo, en lo que se refiere a las aplicaciones de la integración a las *situaciones-problemas extramatemáticas*, P2 ha relatado la siguiente situación anteriormente planteada en sus clases de cálculo:

> Yo proponía un problema relacionado con la integral definida de la siguiente manera: si consideras que la fuerza es constante en determinado intervalo y el trabajo es X, ¿Cuál puede ser una idea para resolver esta situación cuando la fuerza no sea constante? Les dejaba discutir y presentar las ideas y, luego les preguntaba cuál sería la integral que representaría esta situación (P2, 2006).

Esta situación-problema se relaciona con la *configuración epistémica aplicada*. Entretanto, cábenos resaltar que el énfasis ha sido puesto por P2 en la interpretación de la referida situación-problema por los estudiantes y, consecuentemente, en el hecho de asociarla con una integral definida aplicada a un problema físico. Lo que P2 ilustra, con este ejemplo, es la importancia del profesor de propiciar las condiciones para que los estudiantes reflexionen y desarrollen un coherente razonamiento sobre determinados tipos de problemas, que pueden ser resueltos por medio de la integración. Además, se les propone que expliciten una integral que a través de la cual se podría solucionar dicha situación-problema.

Consideramos que lo que sugiere la situación anteriormente ejemplificada por P2 es un cambio del énfasis en la presentación de la integración en un curso introductorio de cálculo en la enseñanza universitaria. Es decir, el énfasis no debe ser colocado en la presentación de ciertas nociones (como la de trabajo) a través de una integral, sino en la proposición de situaciones-problemas que posibiliten a los estudiantes interpretarlas y modelarlas por medio de una integral.

Síntesis y conclusiones

La articulación coherente entre la teoría y la práctica a través de la investigación es un objetivo a ser logrado en la educación. Consideramos que la ñextracciónò y ñcodificaciónò (Ruthven, 2002) de los conocimientos, concepciones y creencia de los profesores expertos en Matemática, particularmente en Cálculo, pueden convertirse en importantes aportaciones para el área de Didáctica de la Matemática;

Las herramientas teóricas del ñEnfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemáticaò se han revelado potentes para la caracterización de los significados personales del profesor-formador P2 sobre un cierto objeto didáctico, *la integral*, en un contexto socio-profesional específico, *la formación de profesores de matemática de la enseñanza secundaria en Brasil*. Para la caracterización de sus conocimientos profesionales aunque en este trabajo hemos abordado apenas una parte de la dimensión epistémica, en nuestro estudio más amplio utilizamos las seis dimensiones desarrolladas en el EOS: *epistémica, cognitiva, mediacional, interaccional, emocional y ecológica*.

Consideramos que este ñenfoque ontosemióticoò de los conocimientos didácticos aporta una nueva aproximación a los problemas sobre conocimientos, concepciones y creencias del profesor sobre la matemática y su proceso de enseñanza en los distintos niveles educativos.

Referencias

Artigue, M. (1991). Analysis. En D. Tall (eds.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 167-198). Dordrcht: Kluwer, A.

Artigue, M. (1998). Lôévolution des problématiques en didactique de lôanalyse. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18 (2): 231-262.

Artigue, M. (2003), ¿Qué se puede aprender de la investigación educativa en el nivel universitario? *Boletín de la Asociación Venezolana*, (X): 2, 117-134.

Bezuidenhout, J. y Olivier, A. (2000), Studentsô conceptions of the integral. Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol. 2, pp. 273- 280.

Borko, H., y Putman, R. (1995). Expanding a teacherôs knowledge base: A cognitive psychological perspective on professional development. In T. Guskey & M. Huberman (Eds.), *Professional development in education: New paradigms and practices*. Nova Iorque: Teachers College Press, 35-65.

Bromme, R. (1994). Beyond subject matter: A psychological topology of teachersô professional knowledge. In R. Biehler, R. Scholz, R. Sträßer & B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 73-88.

Bromme, R. y Tillema, H. (1995). Fusing experience and theory: The structure of profesional knowledge. *Learning and Instruction*, 5: 261-267.

Carlson, M. P.; Persson, J. and Smith, N.(2003) Developing and connecting calculus studentsô notions of rate-of-change and accumulation: the Fundamental Theorem of Calculus. Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol. 2 pp. 165-172. Proceedings of the 2003 Joint Meeting of PME and PMENA. Editores: Pateman, N.A.; Dougherty, B.J.; Zilliox, J.

Clandinin, J. (1989). Developing rhythm in teaching: The narrative study of a beginning teacherôs personal practical knowledge of classrooms. *Curriculum Inquiry*, 19(2), 121-141.

Crisostomo, E. (2004). *Estudio del cálculo en didáctica de la matemática: reconstrucción del significado de referencia de la integral definida*. Trabajo de Investigación Tutelada. Universidad de Granada.

Crisostomo, E.; Ordóñez, L.; Contreras, A. y Godino, J. (2006). Reconstrucción del significado global de la integral definida desde la perspectiva de la didáctica de la matemática. In A. Contreras, C. Batanero y L. Ordóñez (Eds.). *Primer Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas* (pp. 125-166). Universidad de Jaén.

Czarnocha, B., Loch, S., Prabhu, V. y Vadakovic, D. (2002). The definite integral: A coordination of two schemas. *Conference: ICTM-2: 2. International Conference on the Teaching of Mathematics at the Undergraduate Level*, Grecia.

Dreyfus, T. y Eisenberg, T. (1990). On difficulties with diagrams: theoretical issues. *Proceedings of the Fourteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, 2: 27-33.

Elbaz, F. (1983). *Teacher thinking: A study of practical knowledge*. Londres: Croom Helm.

Fenstermacher, G. (1994). The knower and the knowen: The nature of knowledge in research on teaching. *Review of Research in Education*, 20, 3-56.

Font, V. y Ramos, A. B. (2005). Objetos personales matemáticos y didácticos del profesorado y cambio institucional. El caso de la contextualización de funciones en una facultad de ciencias económicas y sociales. *Revista de Educación*, 338: 309-346.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3): 325-355.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. In A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer, A. P.

Godino, J. D., Batanero, C. Y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135. (Versión ampliada en español disponible en, http://www.ugr.es/local/jgodino).

Hiebert, J., Gallimore, R., & Stigler, J. (2002). A knowledge base for the teaching profession: What would it look like and how can we get one?. *Educational Researcher*, 31(5), 3-15.

Munby, H., Russell, T., y Martin, A. (2001). Teachersô knowledge and how it develops. In V. Richardson (Ed.), *Handbook of Research on Teaching*. Washington, DC: American Educational Research Association, 877-904.

Rasslan, S. and Tall, D. (2002). Definitions and images for the definite integral concept. Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol. 4, pp. 89-96.

Pires, M. V. (2006). *A construção do conhecimento profissional: um estudo com três professores*. X SEIEM. Lisboa: APM. Disponible en http://www.apm.pt.

Philipp, R. A. (2007). Mathematics teachersô beliefs and affect. In F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 257-315). Charlote, NC: National Council of Teachers of Mathematics.

Ponte, J. P. (1999). Didácticas específicas e construção do conhecimento profissional. In J. Tavares, A. Pereira, A. Pedro & H. Sá (Eds.), *Investigar e formar em educação: Actas do IV congresso da SPCE*. Porto: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, 59-72.

Ponte, J. P. y Santos, L. (Eds.) (1999). Editorial. *Quadrante. Revista Teórica e de Investigação*, 8, 1-3.

Ruthven, K. (2002). Linking researching with teaching: Towards synergy of scholarly and craft knowlege. In L.D. English, M. Bartolini-Busi, G. A. Jones, R. Lesh, R. and D. Tiroshm, *Handbook of International research in mathematics education*, pp. 581-598. London: Lawrence Erlbaum Ass.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.

Swoder, J. T. (2007). The mathematical education and development of teachers. In F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 157-223). Charlote, NC: National Council of Teachers of Mathematics.

Tall, D. (1991). The psycology of advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 3-21). Netherlands: Kluwer, A. P.

Tall, D. (1996). Functions and calculus. En A. Bishop et al. (Eds.). *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 289-325). Netherland: Kluwer, A. P.

Wood, I. (Ed.) (2008). The International Handbook of Mathematics Teacher Education. Rotterdam: Sense Publishers.