Interpretaciones erróneas de conceptos básicos de cálculo vectorial

Angélica **Arnulfo**
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura. Universidad Nacional de Rosario
ARGENTINA
aarnulfo@fceia.unr.edu.ar
Martha Elena **Guzmán**
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura. Universidad Nacional de Rosario
ARGENTINA
guzmartha@yahoo.com
Alicia Isabel **Kurdobrin**
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura. Universidad Nacional de Rosario
ARGENTINA
kurdobri@fceia.unr.edu.ar
Mariana del Valle **Pérez**
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura. Universidad Nacional de Rosario
ARGENTINA
mperez@fceia.unr.edu.ar
Pablo Agustín **Sabatinelli**
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura. Universidad Nacional de Rosario
ARGENTINA
pablos@fceia.unr.edu.ar

Resumen

Este trabajo pertenece al Proyecto de Investigación (1Ing332) *"Matemática en ingeniería. El libro de texto, factor coadyuvante en la producción de los conocimientos*", dirigido por la Prof. Martha Guzmán (Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, Universidad Nacional de Rosario). En él, analizamos y clasificamos según Movshovitz-Hadar, Zaslavksy e Invar (1987) respuestas equivocadas sobre varias cuestiones en las que había que determinar su veracidad o falsedad, correspondiente a una evaluación parcial de la asignatura Análisis Matemático III en la Facultad de Ingeniería (UNR).
Hemos detectado algunos errores recurrentes en la interpretación de conceptos claves de la asignatura. Creemos que dichos errores podrían ser debido a la errónea interpretación al leer el material bibliográfico, lo que conduce a respuestas contradictorias en el contexto del trabajo propuesto. Nos planteamos si lo que no comprenden los alumnos es el texto o la situación de aprendizaje y enseñanza en la que están inmersos.

*Palabras clave***:** errores, interpretaciones, definiciones, conceptos, lectura

Descripción de la asignatura

Análisis Matemático III es una asignatura común a todas las ingenierías, ubicada en el 1º semestre del 2º año. Sus contenidos básicos son: Ecuaciones Diferenciales, Integrales Triples, Cálculo Vectorial, Sucesiones y Series Numéricas, Series de potencia, Series de Taylor y

MacLaurin. Para desarrollar los contenidos se utiliza el libro de texto "Cálculo" de G. Thomas (*Cálculo varias variables*. 2008, Editorial Internacional Thomson Editores) y apuntes de cátedra para el tema de Ecuaciones Diferenciales. La ejercitación mínima sugerida a los alumnos corresponde a una selección de ejercicios del libro de texto y una práctica adicional en Ecuaciones Diferenciales. Posee una carga horaria de 6 horas reloj semanales. Durante el cursado se rinden dos evaluaciones parciales con posibilidad a recuperar una. La primera evaluación parcial cubre los contenidos de Ecuaciones Diferenc iales, mientras que la segunda cubre los contenidos de Cálculo Vectorial incluyendo el Teorema de Green. En un tercer parcial, al finalizar el semestre, se evalúan los contenidos que no hayan formado parte de las evaluaciones parciales anteriores: Teorema de Stokes, Teorema de la Divergencia, Sucesiones y Series Numéricas, Integrales Impropias.

Para poder cursar esta asignatura se debe tener aprobada la correlativa correspondiente, Análisis Matemático II, que cubre los siguientes contenidos: Integrales Definidas y sus aplicaciones (área, volumen, masa y centro de masa, trabajo), Técnicas de Integración, Cálculo Diferencial para Funciones de Varias Variables, Funciones Vectoriales, Coordenadas Polares e Integrales Dobles.

Introducción

Entre las conclusiones del proyecto 1Ing 163: "*Dificultades de la enseñanza y aprendizaje de la matemática en carreras de Ingeniería*", radicado en la misma unidad académica que el proyecto al que pertenece este trabajo, señalamos dentro de las dificultades que enfrentan los alumnos, la falta de dominio de los conceptos básicos, la falta de habilidades para el análisis y resolución de problemas, las dificultades en el abordaje de cualquier cuestión que involucre el "pensamiento formal", un insuficiente desarrollo de la capacidad creadora y la imposibilidad de transferir conocimiento a nuevas situaciones.

Estas dificultades estarían entre otras, asociadas a la problemática relación de los estudiantes con los libros de texto: falta de hábito de lectura y reflexión sobre lo leído, dificultades para comprender lo leído, deficiente capacidad de atención, insuficiente desarrollo de la capacidad lectora, inconvenientes de decodificación y dificultades para comunicar conocimientos.

Mejorar la utilización del libro de texto, como recurso de aprendizaje de los estudiantes, se convierte entonces en un problema de interés educativo.

En general el alumno que ingresa hoy a la Universidad, quiere "aprender" las cosas de manera rápida, fácil y sin esfuerzo, como docentes nos sentimos compelidos a explicar y explicitar con todos los detalles posibles los diferentes temas que se desarrollan en cada materia, entorpeciendo en muchos casos el proceso de desenvolvimiento autónomo. De esta manera, el alumno adopta una actitud pasiva y receptiva únicame nte, limitándose a copiar y luego "memorizar". Esta memorización irreflexiva lo incapacita para realizar razonamientos lógicos-deductivos y establecer conjeturas, pilares que creemos fundamentales para aprender Matemática.

Miguel De Zubiría Samper (2006), subraya en su Teoría de las seis lecturas:

"La lectura es el puerto por el cual ingresan la mayor parte de conocimientos, la puerta cognitiva privilegiada". "La lectura de los textos involucra: compresión, interpretación e inferencia. Ella implica un proceso cognitivo muy complejo que incida en el conocimiento de las estructuras lingüísticas, la cultura y el contexto. En la vida estudiantil es imposible concebir una actividad académica de aprendizaje sin la presencia de la lectura. Por lo tanto, ella es la clave para la formación profesional".

Los libros de textos constituyen uno de los medios más empleados en todas las culturas para adquirir conocimiento. Por tal razón, la lectura es el medio principal para estudiar y formar intelectuales.

Adherimos a la idea de que la educación es un proceso de formación, de acceso al pensamiento crítico y a la construcción del saber. Desde esta postura, la didáctica en el ámbito universitario debe ser orientada fundamentalmente a fomentar en los estudiantes la conciencia de aprender, la capacidad de estudiar.

Hemos detectado algunos errores recurrentes en la interpretación de conceptos claves de la asignatura, como función potencial, integral de línea y campo conservativo. Suponemos que estos errores podrían ser debido a la interpretación errónea de la lectura del material bibliográfico y que conducen a respuestas contradictorias en el contexto del trabajo propuesto. El objetivo de este trabajo es describir estos errores y sugerir a modo de hipótesis didáctica algunas causas que conducen a ellos en relación con lo que plantea Emilio Sánchez Miguel (1989).

Desarrollo

Adherimos a la postura del Dr. Luis Rico (1995), el cual señala que:

"La falibilidad del conocimiento humano, es decir, la capacidad de considerar como verdaderos conceptos y procedimientos que están deficientemente desarrollados, que incluyen ideas contradictorias o interpretaciones y justificaciones falsas, ha sido una preocupación constante en filósofos y pensadores que se han ocupado de estudiar la capacidad del hombre por conocer y comprender. El error es una posibilidad permanente en la adquisición y consolidación del conocimiento y puede llegar a formar parte del conocimiento científico que emplean las personas o los colectivos".

Esta posibilidad no es una mera hipótesis. Basta con observar lo que ha ocurrido a lo largo de la historia de diversas disciplinas en las que se han aceptado como conocimientos válidos multitud de conceptos que, hoy día, sabemos que son erróneos.

La preocupación por el conocimiento erróneo, por las condiciones que lo hacen posible y por las funciones que puede desempeñar en el dominio y avance de la ciencia, ha ocupado parte importante de las reflexiones de filósofos de las ciencias y epistemólogos, entre los que podemos destacar a Popper, Bachelard, Russell y Lakatos.

Estudiar y analizar los errores cometidos por los estudiantes ha emergido en los últimos años como una gran línea de estudio e investigación en Educación Matemática.

Brousseau, G., Davis, R., Werner, T. (1986), señalan cuatro vías mediante las que el error puede presentarse:

1) Los errores son a menudo el resultado de grandes concepciones inadecuadas acerca de aspectos fundamentales de la matemática.

2) Frecuentemente los errores se presentan como resultado de la aplicación correcta y crédula de un procedimiento imperfecto sistematizado, que se puede identificar con facilidad por el profesor.

3) También los errores pueden presentarse cuando el alumno utiliza procedimientos imperfectos y posee concepciones inadecuadas que no son reconocidas por el profesor.

4) Los alumnos con frecuencias inventan sus propios métodos, no formales pero altamente originales, para la realización de las tareas que se les propone y la resolución de problemas.

En la línea de investigación de nuestro trabajo seguimos entre distintas corrientes de investigación sobre errores la que estudia las causas que los producen y que además los clasifican según una determinada taxonomía. Movshovitz-Hadar, Zaslavksy e Invar (1987), hacen una clasificación empírica de los errores, sobre la base de un análisis constructivo de las respuestas de los alumnos a diversos problemas planteados.

De acuerdo con la metodología propuesta los autores, determinan seis categorías descriptivas para clasificar los errores encontrados. Estas categorías son:

1) Datos mal utilizados: errores que se han producido por alguna discrepancia entre los datos que aparecen en un problema y el tratamiento que le ha dado el alumno.

2) Interpretación incorrecta del lenguaje: errores que ocurren al poner un problema en ecuaciones expresando una relación diferente a la enunciada, también cuando se designa un concepto matemático mediante un símbolo distinto del usual y operan con el según las reglas usuales.

3) Inferencias no válidas lógicamente: errores que se producen por falacias en el razonamiento y no se deben al contenido específico. Encontramos dentro de esta categoría aquellos errores producidos por: derivar de un enunciado condicional su recíproco o su contrario; derivar de un enunciado condicional y de su consecuente, el antecedente; concluir un enunciado en el que el consecuente no se deriva del antecedente, necesariamente.

4) Teoremas o definiciones deformados: errores que se producen por deformación de un principio, regla, o definición identificable. Tenemos en este caso la aplicación de un teorema sin las condiciones necesarias; realizar una valoración o desarrollo inadecuado de una definición, teorema o fórmula reconocibles.

5) Falta de verificación en la solución: errores que se presentan cuando cada paso en la realización de la tarea es correcto, pero el resultado final no es la solución de la pregunta planteada; si el alumno hubiese contrastado la solución con el enunciado, el error hubiera podido evitarse.

6) Errores técnicos: errores de cálculo y otros derivados de la ejecución de algoritmos básicos.

La experiencia que mostramos consiste en el análisis y clasificación de los errores del siguiente enunciado:

Establezca si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas, justificando adecuadamente la respuesta.

a) $rot(\nabla f) = \overline{0}$, f : función real con derivadas parciales segundas continuas.

b) $div\left(f\vec{F}\right)= f\, div\vec{F} + \nabla f . \vec{F}$, *f*: función real, $\vec{F}$: campo vectorial

c) Si $C_2 = -C_1$, entonces $\int_{C_1} f(x,y)ds + \int_{C_2} f(x,y)ds = 0$

d) Si $\overline{F}(x,y) = y\overline{i} + x\overline{j}$ y *C* viene dada por $\overline{r}(t) = (4sen t)\overline{i} + (3\cos t)\overline{j}$ con $0 \le t \le p$, entonces $\int_C \vec{F}\, d\overline{r} = 0$.

e) La $\frac{1}{2}\oint_C (\cos x + \frac{1}{2}y)\, dx + (\ln y - \frac{1}{2}x) dy$ representa el área de la región plana D limitada por la curva simple cerrada suave *C*.

El enunciado elegido fue aplicado en uno de los parciales de la asignatura, donde se evaluaban, entre otros, los conceptos de: integrales de línea y sus aplicaciones físicas (masa y centro de masa, trabajo), campos conservativos, independencia de la trayectoria, Teorema de Green.

Análisis de respuestas que refieren a la situación

Según la clasificación que señaláramos oportunamente los errores detectados corresponden en su mayoría a las categorías 2, 3 y 4. A continuación hacemos un detalle pormenorizado de algunas respuestas en este sentido.

Creemos que existe una confusión importante en cuanto a diferenciar integrales de línea de un campo escalar y de un campo vectorial. Así ocurre cuando en el apartado c) de la propuesta el 94% de los alumnos contesta verdadero, con esta "justificación"

$$\int_{C_1} f(x,y)ds + \int_{C_2} f(x,y)ds = \int_{C_1} f(x,y)ds + \int_{-C_1} f(x,y)ds = \int_{C_1} f(x,y)ds - \int_{C_1} f(x,y)ds = 0$$

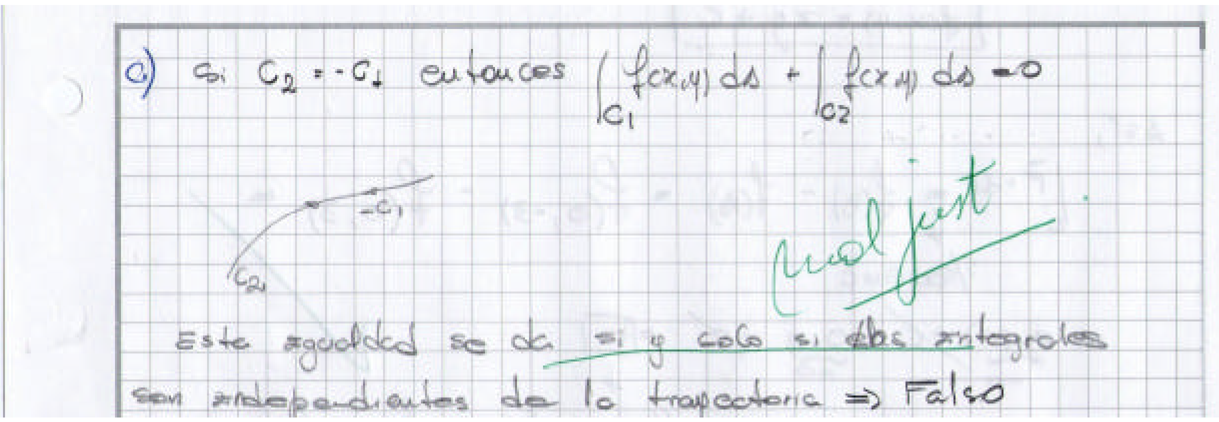


Figura 1. Justificación incorrecta de la proposición c)

Otra dificultad se presenta en la figura 1, donde se mezclan conceptos buscando una justificación.

En el apartado e), un alumno respondió que esa expresión no representaba el área razonando de la siguiente manera:

$\frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$ es la ecuación derivada del teorema de Green para calcular áreas de regiones planas encerradas por curvas simples cerradas. Para que $\frac{1}{2}\oint_C (\cos x + \frac{1}{2}y)\,dx + (\ln y - \frac{1}{2}x)\,dy$ represente lo mismo, tendría que ser $x = \ln(y) - \frac{1}{2}x \Rightarrow x = 2\ln(y)$, $y = \cos(x) + \frac{1}{2}y \Rightarrow x = \arccos\left(\frac{1}{2}y\right)$. Como las x son distintas, entonces la proposición es falsa.

Otro alumno, en cambio, propone lo siguiente

Siendo

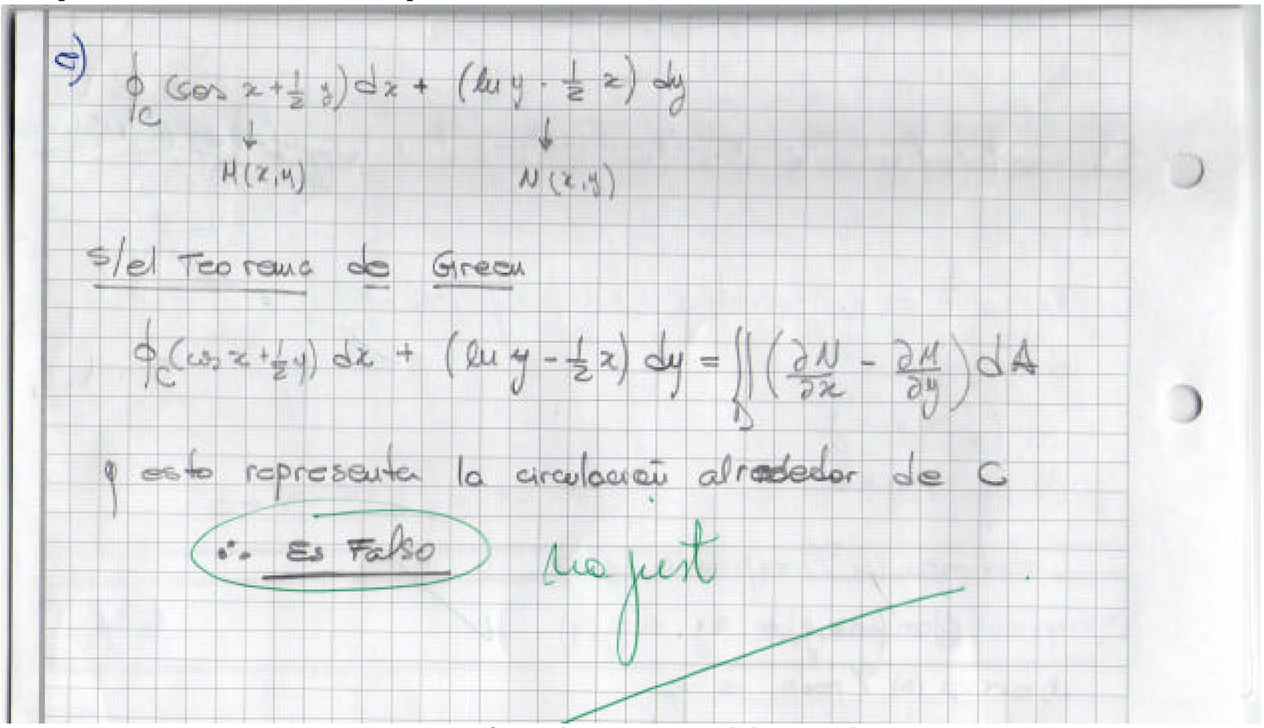
$M = \cos x + \frac{1}{2}y$ y $N = \ln y - \frac{1}{2}x$ entonces

$$\oint_C M\,dx + N\,dy = \iint_D \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = \text{área de la región } D$$

Nos llama la atención la última igualdad, en la que parecería que el alumno piensa que la integral doble sin importar cuál sea su función integrando siempre representa el área de la región sobre la que se integra.

En el apartado d) algunos alumnos proponen aplicar el teorema de Green, cuando no se están cumpliendo las hipótesis que este teorema requiere, llegado en consecuencia, a resultados equivocados.

Otras dificultades se presentan en la figura 2 donde la justificación pretendida es en realidad inexistente.



a) $\oint_C (\cos x + \frac{1}{2} y)\, dx + (\ln y - \frac{1}{2} x)\, dy$

$M(x,y)$ $N(x,y)$

s/el Teorema de Green

$\oint_C (\cos x + \frac{1}{2} y)\, dx + (\ln y - \frac{1}{2} x)\, dy = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA$

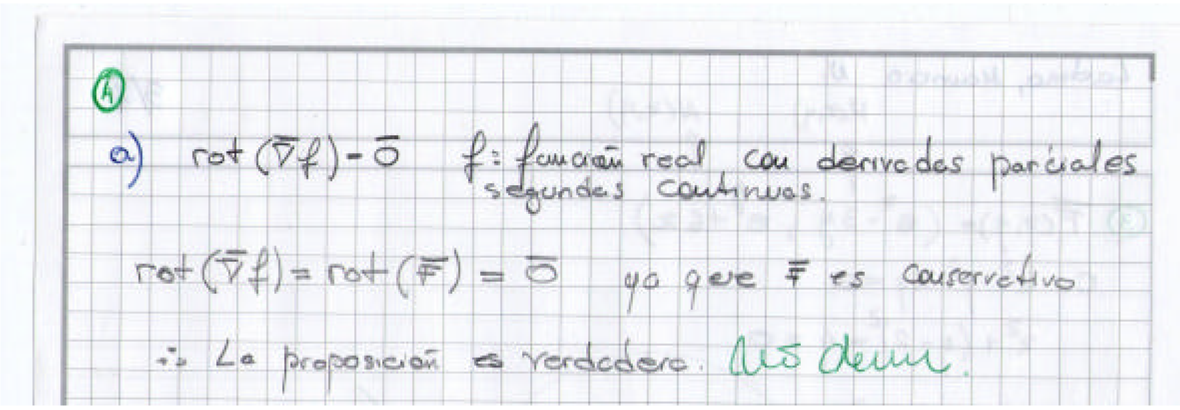
q esto representa la circulación alrededor de C

∴ Es Falso

No just

Figura 2. Justificación incorrecta del apartado e)

En el apartado a) algunos alumnos contestaron que la proposición era verdadera porque si $\vec{F}$ es un campo vectorial conservativo, $\exists f / \nabla f = \vec{F}$, además si $rot(\vec{F}) = \vec{0}$, $\vec{F}$ es conservativo entonces $rot(\nabla f) = \bar{0}$.



4)

a) $rot(\nabla f) = \bar{0}$ f: función real con derivadas parciales segundas continuas.

$rot(\nabla f) = rot(\vec{F}) = \bar{0}$ ya que $\vec{F}$ es conservativo

∴ La proposición es verdadera. No demu.

Figura 3. Justificación incorrecta sobre la proposición del rotacional.

Otras dificultades de confundir tesis con hipótesis en la proposición se pueden ver en la figura 3.

Al parecer, el problema detectado puede atribuirse, entre otras causas, a las siguientes:

1) Insuficiente integración de contenidos: Creemos que los alumnos no relacionan conceptos de la materia entre si e incluso de materias ya aprobadas (Análisis Matemático I, Análisis Matemático II, Álgebra y Geometría I). Se trata entonces de un alumno con conocimientos estancos; esto imposibilita, en nuestra opinión, la posibilidad de razonar holísticamente.
2) Ejercitación inadecuada: La ejercitación propuesta en general consiste de ejercicios de aplicación casi inmediata. Son escasas las situaciones problemáticas o los ejercicios conceptuales que se pueden incorporar.
3) Dificultad en la comprensión de textos: En el libro adoptado por la cátedra, figuran destacadas las diferentes definiciones y teoremas. En ambos casos el libro ejemplifica los conceptos o resultados obtenidos. Creemos que los alumnos no pueden apropiarse de esas definiciones porque no pueden "leer adecuadamente" el texto.

Conclusión

Del análisis hecho notamos varios problemas en el aprendizaje de los conceptos que pretendemos enseñar. En numerosas circunstancias el significado atribuido a un concepto por parte de un estudiante difiere del pretendido concepto que busca instalar el docente. De ahí la importancia de crear espacios donde los estudiantes puedan explicitar sus creencias y afloren sus interpretaciones.

También notamos que algunos alumnos fijan las definiciones de manera inconexa. Es por esto que concluyen equivocadamente porque sólo recuerdan partes de las definiciones o teoremas. Creemos que esto puede, de alguna manera explicar el hecho de que aplican teoremas (Green por ejemplo) sin verificar hipótesis, o dan por condiciones necesarias y suficientes, algunos corolarios.

De este modo, generan teoremas "propios" como ya lo estudiaran Caserio, Vozzi y Guzmán (2008). En él llaman a estos enunciados propios de los alumnos "teorema–alumno".

Destacamos la necesidad de una propuesta didáctica que trabaje sobre la interpretación del texto matemático de modo que en la clase se puedan decodificar conceptos y definiciones, integrándolos. Creemos que de esta manera los alumnos podrán resignificar positivamente estos conceptos que hasta el momento resultan oscuros e inconexos.

Pensamos que esta tarea de analizar los errores que cometen nuestros alumnos puede contribuir a mejorar, por ejemplo, las propuestas de enseñanza tendiendo de alguna manera a vincular la teoría con la práctica en beneficio de un mejor aprendizaje.

Referencias y bibliografía

Brousseau, G., Davis, R., Werner, T. (1986). Observing students at work. En Christiansen, B., Howson, G., Otte, M. (Eds.) Perspectives on mathematics education. Dordrecht: Reídle Publishing Company.

Caserio, M., Vozzi, A. y Guzman, M. (2008). ¿Sobre qué nos enseñan los errores de nuestros alumnos? 25 años después… *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *Vol 21*, 447-456.

Caserio, M., Vozzi, A. y Guzman, M. (2009). Una cuestión a debate: El texto de matemática, uso y abuso. Congreso Iberoamericano de Educación Matemática.

Celis, M., Sabatinelli, P. (2009). Algunas ideas para corregir interpretaciones erróneas de teoremas clásicos del álgebra lineal. XXXII Reunión en Educación Matemática organizada por la Unión Matemática Argentina (Universidad Nacional de Mar del Plata).

Douady, R. (1995). La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. En Gomez, P. (Ed). Ingeniería didáctica en educación matemática (pp. 61-96). Méjico DF: Grupo Editorial Iberoamérica.

De Zubiría Samper, M. (2006). Teoría de las seis lecturas. Cómo enseñar a leer y a escribir ensayos. Tomo II. Bachillerato y universidad. ECOE Ediciones
Fundación Alberto Merani. Fondo de Publicaciones Bernardo Herrera Merino

Kilpatrick, J., Gómez, P. y Rico, L. (1995). Educación Matemática. Méjico DF, Méjico: Grupo Editorial Iberoamérica S. A. de C. V.

Movshovitz-Hadar, Zaslavksy e Invar (1987) An Empirical Classification Model for Errors in High School Mathematics. Journal for Research in Mathematics Education. Vol 18, pag. 3-14. En Kilpatrick, J., Gómez, P. y Rico, L. (1995). Educación Matemática. Méjico DF, Méjico: Grupo Editorial Iberoamérica S. A. de C. V.

Sanchez Miguel, E. (1989). Procedimientos para instruir en la comprensión de textos. C. I. D. E. Madrid. España.