



Superfícies em \mathbb{R}^3 : Uma experiência com TIC na perspectiva da aprendizagem significativa

Anderon Melhor **Miranda**

Universidade Federal do Recôncavo da Bahia (UFRB) / Grupo de estudos em educação matemática da Bahia (EMFOCO).

Brasil

profanderon@hotmail.com

Resumo

A presente comunicação surge de uma pesquisa de mestrado, cujo objetivo consistiu numa proposta de ensino e aprendizagem para a disciplina de cálculo, por meio de uma tecnologia informática. A metodologia apresentou um caráter qualitativo, apoiada nos aspectos metodológicos de experimentos de ensino. Os métodos utilizados na coleta de dados foram observações de aulas, realizações de atividades matemáticas auxiliadas por um software e entrevistas semi-estruturadas. Os dados – orientados pelo questionamento das contribuições que um *software*, combinado com atividades, poderiam oferecer para o ensino e aprendizagem de gráficos e superfícies no \mathbb{R}^3 – apontaram alguns fatores determinantes, dentre eles, que as interações de novas informações com conhecimentos prévios e de aprendiz/aprendiz e aprendizes/professor desempenharam um papel fundamental para uma possível aprendizagem significativa, em gráfico de funções do \mathbb{R}^3 .

Palavras-Chaves: Tecnologias Informáticas, Ensino de Cálculo, Aprendizagem Significativa.

Introdução

O ensino da disciplina Cálculo Diferencial e Integral (Cálculo) constitui uma tarefa difícil e instigante para muitos professores e estudiosos da Educação Matemática. A disciplina é vista como uma fonte inesgotável de investigações e questionamentos acerca da prática docente nas instituições de ensino superior.

Com base em Rezende (2003), Nasser (2007) e Machado (2008), encontramos diversos problemas apresentados por professores que lecionam essa disciplina, dentre eles, a dificuldade dos alunos em compreender as relações entre a expressão analítica de uma equação com o traçado do gráfico, e questões referentes à construção, análise e interpretação desses gráficos, principalmente, em superfícies e gráfico de funções do \mathbb{R}^3 .

Assim, na tentativa de amenizar esses problemas, e outros oriundos do ensino de Cálculo, convidamos o leitor para conhecer esta proposta de ensino, baseada nos resultados de uma pesquisa de mestrado – As Tecnologias da Informação no Estudo do Cálculo na Perspectiva da Aprendizagem Significativa¹ – realizada em uma turma de licenciatura em matemática da Universidade Federal de Ouro Preto, na disciplina de Cálculo, sob a seguinte questão de investigação: Como o uso de um *software* e de atividades elaboradas e analisadas, na perspectiva da aprendizagem significativa, pode contribuir para o ensino e aprendizagem de gráfico de funções no \mathbb{R}^3 , de estudantes de Cálculo de várias variáveis?

O produto de nossos estudos propõe uma abordagem pedagógica no ensino de gráfico de funções do \mathbb{R}^3 , isto é, uma perspectiva de ensino acerca de superfícies, em que o uso de um *software* em conjunto com atividades – Atividades 1 e 2 (ver Aplicações de instrumentos de coletas, p.7) – possibilite a aprendizagem dos alunos sobre esses conteúdos.

As atividades foram elaboradas na perspectiva da teoria da aprendizagem significativa. As construções e interpretações gráficas das superfícies em \mathbb{R}^3 , por meio de um *software* matemático gráfico (Winplot²) e de uma teoria de aprendizagem tiveram como objetivo despertar nos alunos uma motivação para aprender, de forma significativa, os conteúdos referentes a gráficos de funções reais de duas variáveis, quer dizer, relacionar conhecimentos prévios em matemática (gráfico de funções do \mathbb{R}^2 , geometria analítica, cônicas, entre outros) com a aprendizagem de conceitos e propriedades de superfícies e gráfico de funções do \mathbb{R}^3 , auxiliados por uma tecnologia informática.

Acreditamos que, além do estudo mostrar algumas considerações – à luz da teoria da aprendizagem significativa – sobre as respostas dos aprendizes³ participantes da pesquisa, ele serve como reflexão e referencial para professores de Cálculo avaliarem as nossas atividades e, convenientemente, incorporá-las em sua prática docente, reestruturando-as de acordo com as suas necessidades ou no que achar pertinente com a sua realidade acadêmica. Com isso, o professor poderá construir e elaborar suas próprias atividades, na perspectiva teórica da aprendizagem significativa, proporcionando uma aprendizagem em que o estudante possa interagir novos conhecimentos com outros existentes em sua estrutura cognitiva.

Esta proposta aborda, resumidamente, ideias e conceitos teóricos sobre a teoria da aprendizagem significativa (AUSUBEL, 1980); conceitos do pensamento matemático avançado (TALL; VINNER, 1991), e o pensamento visual-espacial (COSTA, 2005). O diálogo entre essas teorias e conceitos constitui os aportes teóricos da pesquisa e os seus resultados remetem a fundamentação do nosso estudo à Educação Matemática.

Por fim, acreditamos que nosso estudo contribuiu qualitativamente com o ensino e aprendizagem da disciplina de Cálculo e, conseqüentemente, promoveu, de forma significativa, um instrumento de desenvolvimento da Educação Matemática no ensino superior.

¹ Título da dissertação de mestrado – produto de uma pesquisa no ensino superior – do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto. Defendida em 1 de julho de 2010.

² *Software* desenvolvido pelo professor Richard Parris "Rick" (rparris@exeter.edu), da Philips Exeter Academy, por volta de 1985. Escrito em C, chamava-se PLOT e rodava no antigo DOS. Com o lançamento do Windows 3.1, o programa foi rebatizado de "Winplot". A versão para o Windows 98 surgiu em 2001 e está escrita em linguagem C++.

³ Utilizamos nomes fictícios para preservar a identidade dos aprendizes que participaram da pesquisa.

Aportes teóricos

O uso de tecnologias informáticas no ensino de cálculo

Quando decidido sobre a pedagogia do ensino de matemática, tem-se que levar em conta não só questões sobre como se espera que os estudantes adquiram os conceitos matemáticos, mas também, e talvez principalmente, como os estudantes realmente adquirem aqueles conceitos (VINNER, 1991, p. 67, grifo do autor).

Para o uso de tecnologias informáticas (TI) no estudo do Cálculo, Vinner (1991) sugere que elas sirvam como um meio para a aprendizagem de estudantes nessa disciplina e que, com elas, o professor elabore atividades utilizando recursos computacionais, para que os aprendizes conheçam as definições e os conceitos do Cálculo de forma mais significativa.

Machado (2008) acredita que as ferramentas computacionais são bons instrumentos para a resolução de problemas, pois permitem aos alunos vivenciar “verdades matemáticas”, experimentar e fazer conjecturas e

De maneira geral, as tecnologias permitem uma simulação que facilita, em pouco tempo, os estudos de diferentes situações e de experimentação a custo baixo, possibilitam a construção de novas relações entre os homens e os ambientes informatizados e apresentam-se como ferramentas de auxílio ao processo de ensino e aprendizagem (MACHADO, 2008, p.21).

No discurso do uso de TI para o ensino de Matemática, Machado (2008) enfatiza a necessidade de mesclar o uso dessa tecnologia com outras (quadro, giz, lápis e papel) e que a utilização apenas de uma forma ou tipo de mídia não constituiria uma eficiência nas relações de ensino e aprendizagem. Nessa perspectiva vemos, em nossos estudos, a utilização do Winplot auxiliando as atividades, principalmente quando se referencia a visualização de superfícies e curvas de nível. Com isso, acreditamos que a utilização e a introdução de um recurso tecnológico são necessárias na prática docente do professor de matemática, pois a literatura – confirmada pela prática – afirma que esses recursos podem auxiliar a eficiência nas relações de ensino e aprendizagem dessa disciplina.

A necessidade de um ensino eficiente de Cálculo (relacionado ao traçado de superfícies), diferente dos moldes tradicionais que vêm sendo apresentados atualmente, exige mudanças nas apresentações e visualizações de gráfico de funções do \mathbb{R}^3 . Em adição aos livros textos, instrumentos de abordagem estática do assunto, deve-se tentar uma abordagem mais dinâmica com o auxílio do computador, de modo que os aprendizes possam visualizar e manipular os seus gráficos e construções arrastando e movendo, por meio de ferramentas que os *softwares* e aplicativos oferecem. Nos livros didáticos de Cálculo mais recentes são trazidas abordagens de tópicos com o uso de TI e apresentam uma revisão de seus conteúdos em novo estilo, com ilustrações, gravuras e exercícios de simulação em *softwares*, para a construção e interpretação de gráficos.

Assim, pensamos que a utilização de TI, juntamente com outras mídias e recursos, como o quadro, giz, lápis, papel, livro didático, entre outros, consiste em um meio que possibilita despertar no professor de Cálculo o conhecimento de diversos tipos de *softwares*; o seu uso e a sua aplicabilidade para que, assim, ele possa estar atribuindo e incorporando essa tecnologia na sua prática docente, pois os resultados de nossa pesquisa sugerem eficiência na aprendizagem de estudantes a respeito de gráfico de funções do \mathbb{R}^3 .

A aprendizagem significativa

Com base, na teoria de Ausubel, a aprendizagem significativa consiste em um:

processo pelo qual uma nova informação se relaciona, de maneira substantiva⁴ (não literal) e não arbitrária⁵, a um aspecto relevante da estrutura cognitiva do indivíduo. Neste processo a nova informação interage com uma estrutura de conhecimento específica, a qual Ausubel chama de “conceito subsunçor” ou, simplesmente “subsunçor”⁶, existente na estrutura cognitiva de quem aprende (MOREIRA, 2006, p. 14,15, grifo nosso).

Fundamentado nessa teoria e auxiliado por um *software* gráfico – como recurso de verificação e visualização das superfícies construídas – utilizamos, em nossos estudos, os conhecimentos prévios dos estudantes em gráfico de funções do IR² e conceitos matemáticos, para estabelecer as conjecturas dos aprendizes na construção de gráfico de funções do IR³, isto é, tendo em vista que, em um processo de aprendizagem significativa, a interação de novas informações com outras ancoradas na estrutura cognitiva do aluno, se faz necessária para a ocorrência dessa aprendizagem. Acreditamos que nossas atividades aliaram-se a essa perspectiva de aprendizagem, uma vez que, nos preocupamos em criar, nessas atividades, questões que induzem o aluno a utilizar o conhecimento sobre conteúdos do IR² estendendo-os para outros e novos assuntos, por exemplo, conceitos, propriedades e superfícies em IR³.

Em contraposição à aprendizagem significativa existe a aprendizagem mecânica, sobre a qual Moreira (2006), coadunando com a ideia de Ausubel, define:

como sendo aquela em que novas informações são aprendidas praticamente sem interagirem com conceitos relevantes existentes na estrutura cognitiva, sem ligar-se a conceitos subsunçores específicos. A nova informação é armazenada de maneira arbitrária e literal, não interagindo com aquela já existente na estrutura cognitiva e pouco ou nada contribuindo para sua elaboração e diferenciação (MOREIRA, 2006, p. 16).

Moreira (2006) dá exemplos para as diferenças entre essas duas aprendizagens, como no caso de um quebra-cabeça, em que o aprendiz poderá encontrar a solução do jogo por descoberta, mas a aprendizagem será mecânica; já em outro caso, de uma lei física, o aprendiz pode recebê-la já “pronta e acabada”, sem ter que descobri-la, porém poderá usá-la significativamente, desde que tenha em sua estrutura cognitiva os subsunçores adequados (MASINI; MOREIRA, 2008).

Assim, Ausubel (1980) acredita que temos de averiguar o conhecimento do aprendiz e, a partir daí, ensiná-lo de acordo. O averiguar e o ensinar de acordo são tarefas bastante difíceis defendidas pelo autor, pois averiguar consiste na revelação (mostrar, compreender) da estrutura cognitiva do aprendiz e no entendimento da sua organização; e o ensinar de acordo requer uma boa resposta dessa análise de averiguação, para que, só depois com os instrumentos básicos, recursos e metodologias de cada disciplina, o educador possa chegar a uma aprendizagem que

4 “Ou seja, o que é aprendido de maneira significativa tem também significados pessoais, idiossincráticos. Os conhecimentos têm significados denotativos que são compartilhados por certa comunidade de usuários e os conotativos que são pessoais.” (MASINI e MOREIRA, p. 15, 16).

5 “Quer dizer, o novo conhecimento não interage com qualquer conhecimento prévio, mas sim com algum conhecimento que seja especificamente relevante para dar-lhe significado. Isso implica que se não houver esse conhecimento prévio não poderá haver aprendizagem significativa.” (ibidem, p. 15, 16).

6 “Qualquer ideia, conceito, proposição existente na estrutura cognitiva do aprendiz” e que servirão “como ancoradouros para os novos conhecimentos, se interagirem com esses na finalidade de obter a aprendizagem significativa.” (MOREIRA, 2006, p. 15)

seja significativa para o aluno, e não a uma simples sequência de atividades que possa induzir a uma memorização e/ou aprendizagem mecânica.

Em busca de uma sintonia com o averiguar e o ensinar de acordo, defendidos por Ausubel, realizamos testes pilotos que favoreceram a compreensão dos conhecimentos prévios dos alunos, ou seja, realizamos atividades que serviram de subsídios para averiguarmos o conhecimento de nossos aprendizes-participantes e, a partir deles, analisamos e refletimos sobre como utilizá-los da melhor forma possível para a inserção de novos conteúdos (superfícies em IR³).

Contudo, confirmamos o argumento de Ausubel (1980) de que, nas relações de ensino-aprendizagem, é necessária uma predisposição tanto do professor em querer ensinar, como do aprendiz em querer aprender, uma vez que a falta de uma dessas partes impossibilita a eficiência nas relações de ensino e aprendizagem, fato que é almejado na perspectiva da teoria da aprendizagem significativa.

De maneira geral, Ausubel (1980) não considera o ensino e aprendizagem extensivos, ou seja, se tivermos um ensino bastante eficaz, isso não irá garantir a aprendizagem; esta relação é vista pelo autor como uma das condições que influenciam a aprendizagem significativa. Nesse caso, ainda é possível que os aprendizes estejam desmotivados, desatentos, não querendo aprender, mesmo com um ensino de qualidade. Por outro viés, podemos ter a possibilidade de um aprendiz ser autodidata e não necessitar do professor. “O ato de ensinar não se encerra em si mesmo, pois a finalidade do ensino é o aprendizado por parte do aluno (...) e assim o produto da aprendizagem é ainda a única medida possível para se avaliar o mérito do ensino” (AUSUBEL, 1980, p. 12).

O pensamento visual-espacial e o pensamento matemático avançado

Costa classifica o pensamento visual em dois tipos: o visual e o espacial, denominando-o de pensamento visual-espacial. A autora adverte que, na literatura, encontramos o pensamento visual ligado às questões de visualizações, ou seja, “o pensar visual é porque ocorre um fluxo contínuo de imagens mentais visuais” (2005, p. 88) e o pensamento espacial ou raciocínio visual e espacial associado às capacidades mentais e espaciais, ou seja, “pode envolver uma estrutura espacial percebida visualmente que incorpora descrições implícitas dos elementos das imagens e relações espaciais entre esses elementos” (ibidem, p. 88). Assim, a autora acredita que as duas formas de pensamento ocorrem simultaneamente e podem estar combinadas com informações visuais e espaciais interligadas.

Essa perspectiva de combinar o pensamento visual com o espacial contribuiu para a construção das nossas atividades; queremos dizer que, na preparação de atividades sobre gráficos, é importante que o professor leve em consideração uma valorização das ideias visuais-espaciais e perceptivas dos alunos, pois assim poderemos atingir de forma expressiva a aprendizagem significativa.

Corroboramos as ideias conclusivas e sugestivas de Frota e Couy (2009) quanto às construções mentais, por meio de conjecturas geradas pelos próprios estudantes em processos visuais (visualização), quando elas afirmam que “ao se investigar as ideias para uma posterior formalização, coloca-se o aluno para fazer Matemática, preparando-o não só para reproduzir regras, mas principalmente para compreendê-las e aplicá-las, à luz dos conceitos teóricos” (FROTA; COUY, 2009, p.19).

Com isso, sugerimos que os professores, principalmente em Cálculo, empreguem

estratégias variadas de ensino para essa disciplina, pois os estudos de Frota e Couy (2009) apontaram uma estratégia relevante para o estudo de variações de funções, mostrando ainda meios necessários de serem utilizados no ensino de Cálculo com um foco no pensamento visual. Em nosso estudo, utilizamos o *software* como recurso auxiliar nesse processo de desenvolver o pensamento visual do aluno para a aprendizagem de superfícies em IR^3 .

Já para o pensamento matemático avançado, vemos que, da década de 1970 até os dias atuais, o grupo de pesquisadores desse pensamento, liderado por David Tall, realiza muitas pesquisas sobre os conteúdos de Cálculo, na perspectiva de concepções do cognitivismo, tendo um respeito mundial nessa área. Assim, por meio desse pensamento, esse grupo de estudiosos pesquisadores dedicados, compromissados e atentos para os problemas do ensino superior, trouxe diversas contribuições para o ensino de Cálculo, as quais são permeadas de análises e discussões sobre as questões inerentes à Psicologia Cognitiva do aprendiz, contribuindo para o pensamento matemático avançado.

De acordo com essas ideias, Tall (1991) afirma que as investigações em Educação Matemática mostram que os estudantes de Matemática, principalmente os de Cálculo, possuem pouca capacidade de visualização e de formalização de conceitos. O autor sugere uma relação mais próxima entre a intuição e o rigor, para melhorar o uso dessas ideias visuais. Estas, muitas vezes consideradas intuitivas por um matemático experiente, não são necessariamente intuitivas para um aluno inexperiente, o que sugere a existência de diferentes categorias de intuição e, com isso, também diferentes níveis de rigor, conforme discute Reis (2001), em sua tese de doutorado, sobre a necessidade de um rompimento de uma visão dicotomizada entre rigor e intuição no ensino de Cálculo. Aparentemente, as ideias mais complexas podem levar a uma intuição poderosa que favorece, a *posteriori*, a obtenção de provas e demonstrações matemáticas com seu devido rigor.

Esse “casamento” entre intuição e rigor foi utilizado de forma implícita em nossas atividades quando exigimos dos alunos, primeiramente, que eles pensassem e “imaginassem” a forma de uma superfície (representação gráfica) a partir de sua expressão algébrica correspondente; e, posteriormente, descrevessem o processo dessa construção gráfica. Assim, para resolver uma questão, o aprendiz desenvolveu um processo lógico e dedutivo, passando depois para uma fase de rigor e formalização do conceito de superfície.

Opções metodológicas

A pesquisa apresentou uma metodologia qualitativa, apoiada em aspectos metodológicos de experimentos de ensino. O caráter qualitativo surgiu devido a alguns fatores determinantes na pesquisa, como: a obtenção dos dados de forma descritiva; o contato direto do pesquisador com a situação ou o objeto de estudo; uma maior valorização no processo do que no produto final e uma descrição das perspectivas dos sujeitos de pesquisa (BOGDAN; BIKLEN, (1994); LÜDKE; ANDRÉ, 1986).

A coleta de dados foi desenvolvida por meio de três métodos: observações, entrevistas semi-estruturadas e aplicações de instrumentos de coleta, estes intitulados de Atividade – 1 e Atividade – 2, para estudantes de Cálculo de várias variáveis, na forma de teste.

Observações

A escolha do método de observação serviu para proporcionar uma maior aproximação entre o pesquisador e o seu objeto de estudo, além de auxiliar na elaboração e no

desenvolvimento dos instrumentos de coleta, através da identificação de elementos e características que pudesse traçar o “perfil” da turma e descrever aspectos cognitivos observados no ambiente de aprendizagem, inerentes ao ensino de Cálculo. Para Lüdke e André (1986), tanto a observação, quanto as entrevistas são destaques em esquemas educacionais e, ainda, sendo usadas com outros métodos de coleta, possibilitam um contato pessoal e estreito do pesquisador com o seu objeto de estudo.

Aplicações de instrumentos de coletas

Com a fase de observação adiantada, demos início a segunda parte da pesquisa de campo, a aplicação das atividades 1 e 2. Essas atividades ocorreram em dois momentos – sábados consecutivos – com 4 horas/aula cada.

Atividade – 1: Esta atividade foi elaborada com 7 (sete) questões, construídas com base nos conceitos da teoria da aprendizagem significativa, com o objetivo de induzir o aprendiz a refletir, conjecturar e construir gráficos de funções reais de duas variáveis (superfícies), a partir de conteúdos matemáticos – gráfico de funções do \mathbb{R}^2 , cônicas, expressões analíticas, funções – e dos conhecimentos prévios do \mathbb{R}^2 . Em busca desse objetivo, procuramos identificar os conhecimentos prévios existentes na estrutura cognitiva do aprendiz e os aspectos ligados ao seu cotidiano e vivência fora do ambiente escolar, para a ocorrência da aprendizagem significativa.

As questões iniciais da Atividade – 1 abordaram os conteúdos matemáticos sobre a construção no plano cartesiano, cujas expressões foram: $y = x^2$, $y = 3$ e $x = y^2$ e, depois, buscou-se estabelecer uma conexão dos conhecimentos utilizados na construção desses gráficos com as superfícies em \mathbb{R}^3 ($z = x^2$, $z = y^2$, $z = x$ e outros). Essa atividade constou também de perguntas abertas sobre características específicas do \mathbb{R}^2 e do \mathbb{R}^3 , como: ausências de variáveis nas expressões analíticas, translação, rotação de eixos e propriedades usadas nas representações gráficas das expressões algébricas citadas.

Atividade – 2: O objetivo da Atividade – 2 foi o de avaliar os trabalhos realizados no laboratório, durante a Atividade – 1, dando continuidade à construção e interpretação de gráfico de funções e superfícies no \mathbb{R}^3 . Esta atividade, também de cunho investigativo, procurou compreender as relações entre os aspectos da teoria da aprendizagem significativa, servindo como avaliação para a elaboração de novos roteiros e/ou aprimoramento do que foi utilizado na pesquisa.

Entrevistas

Para a última fase da coleta de dados, optamos pelas entrevistas, visando obter mais informações a respeito das conjecturas geradas nos diálogos e conversas informais entre os aprendizes e, também, compreender os seus pensamentos (ideias) nas respostas dadas às atividades realizadas no laboratório de Informática.

A grande vantagem da entrevista sobre outras técnicas é que ela permite a captação imediata e corrente da informação desejada, praticamente com qualquer tipo de informante e sobre os mais variados tópicos. Uma entrevista bem-feita pode permitir o tratamento de assuntos de natureza estritamente pessoal e íntima, assim como temas de natureza complexa e de escolhas nitidamente individuais. Pode permitir o aprofundamento de pontos levantados por outras técnicas de coleta de alcance mais superficial, como o questionário (LÜDKE; ANDRÉ, 1986, p. 34).

As entrevistas ocorreram de forma semi-estruturada, ou seja, com algumas partes mais estruturadas e outras menos. Pois estas caracterizam-se em perguntas específicas feitas pelo pesquisador, porém favorecendo uma “liberdade” ao entrevistado, para ele falar livremente as suas ideias e pensamentos, em seus próprios termos (ALVES-MAZZOTTI; GEWANDSZNAJDER, 2002).

Contexto e aprendizes participantes

A pesquisa foi realizada no primeiro semestre de 2009, com uma turma da disciplina de cálculo II do curso de licenciatura matemática do Instituto de Ciências Exatas e Biológicas (ICEB) da Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP), cujo professor foi o próprio orientador da pesquisa.

O convite para participar da pesquisa de forma voluntária foi feito a uma turma, composta por 14 aprendizes, na faixa etária de 18 a 22 anos, porém apenas 11 deles aceitaram o convite. Denominamos de aprendizes participantes e, eles responderam às questões dos instrumentos de coleta, na forma de teste/questionário, utilizando em alguns momentos o lápis e papel e, em outros, o *software* Winplot, para confirmar as respostas dadas aos instrumentos de coleta. Ainda dentre os aprendizes participantes, selecionamos três deles (Gilberto, Tiana e Walda), de maneira voluntária, para as entrevistas, a fim de obter mais informações e dados referentes ao objetivo da pesquisa.

O software

Para a escolha do *software*, levamos em consideração a sua aplicabilidade e limitação em nossos estudos. A partir daí, escolhemos o Winplot devido a sua facilidade de manuseio e acessibilidade. Além disso, acreditamos que ele ofereceu a possibilidade de investigarmos as suas contribuições na aprendizagem significativa dos aprendizes, para a construção de gráfico de funções do IR³, através das relações entre os conhecimentos prévios dos aprendizes e gráfico de funções do IR².

Para nossos estudos, o *software* Winplot oferece a possibilidade de construir diversos e diferentes gráficos em duas e três dimensões (ao digitarmos como dados de entrada as suas expressões algébricas). Através de seus comandos, podemos visualizar as suas representações gráficas na tela do computador. E, ainda, pelo uso de outras de suas ferramentas que auxilia a construção de simulações gráficas, através da entrada de parâmetros (letras) em lugar dos coeficientes das variáveis nas expressões analíticas, conseguimos manipular e visualizar várias representações gráficas, mudando apenas os coeficientes das variáveis, nas expressões dadas.

Descrição e análise das atividades aplicadas (Atividade – 1 e Atividade – 2)

A Atividade 1, realizada no início do primeiro momento, composta de um material impresso, na forma de teste, foi dividida em duas etapas: a primeira etapa, através do *software* e de lápis/papel, os aprendizes responderam às questões matemáticas sobre os conteúdos de funções reais de **uma** e **duas** variáveis (IR² e IR³), com o objetivo de que eles pudessem utilizar os conhecimentos prévios de conceitos matemáticos, como funções e gráfico de funções do IR², fazendo uma ligação destes com os conteúdos e conceitos de funções reais de duas variáveis (IR³).

Depois de respondidas as questões da Atividade – 1, seguimos para o laboratório de Informática, para a etapa final desse primeiro momento, constituída pelo contato inicial dos aprendizes com o *software* Winplot, favorecendo-os na compreensão e aplicabilidade das

ferramentas desta mídia. Com o uso do *software*, os aprendizes puderam avaliar, corrigir, verificar e comprovar, através das suas visualizações, as respostas dadas nas questões da Atividade – 1, ou seja, a utilização do software serviu como uma confirmação para as suas respostas nas questões da Atividade – 1, isto é, eles compararam estas respostas com as superfícies obtidas e visualizadas na tela do computador, por meio da digitação das suas expressões analíticas correspondentes.

Assim, o pesquisador mediador sugeriu, aos aprendizes, através de um roteiro de atividades, que eles fizessem um esforço individual (sem o uso do *software*) para imaginar/abstrair os desenhos das superfícies gráficas correspondentes às expressões analíticas mencionadas pelo pesquisador e associá-las aos conceitos e conteúdos de gráfico de funções do \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 . Com isso, iniciou-se um diálogo entre pesquisador/aprendiz e aprendiz/aprendiz, com alguns momentos surpreendentes. Exemplificaremos uma situação em que foi perguntado aos aprendizes:

“Como se apresenta, ou como vocês imaginam o gráfico em \mathbb{R}^3 , correspondente à expressão analítica $z = x$?” (pesquisador)

“Seria um plano?” (Gilberto).

Levando em consideração que esta resposta-interrogativa não surgiu de forma tão imediata, e que nem todos os participantes compreenderam o que se passou no pensamento do colega (o quê? por quê? em quê? e como?) para levantar tal conjectura, o pesquisador utilizou a hipótese mencionada e mediu a turma para uma discussão sobre a idéia do aprendiz, gerando outras respostas, do tipo:

“Professor, eu sei que a função $z = x$ no \mathbb{R}^2 será uma reta, mas no \mathbb{R}^3 vai ser...”[pensando] (Sara)

O papel de mediação do professor neste momento foi importante, pois era necessário conduzir as perguntas/reflexões dos estudantes, de forma, que eles mesmos chegassem a uma possível resposta para elas e, assim, o professor conduziu a atividade “instigando” os estudantes da seguinte forma:

Quem responde a pergunta de Gilberto? E você Gilberto o que acha? É, mesmo um plano? (pesquisador)

Quem ajuda a colega Sara? Rose você entendeu o que Sara disse? (pesquisador)

Quem pensou algo diferente do que foi dito aqui? (pesquisador)

O *software*, também, teve seu destaque quanto à visualização e comprovação das ideias, dos estudantes, discutidas neste momento. Depois de certo tempo de reflexão entre os estudantes e da mediação do pesquisador, a turma ficou pensativa por um momento e, posteriormente, alguns aprendizes afirmaram que a representação gráfica da expressão $z = x$ seria realmente um plano; os demais confirmaram a veracidade da hipótese, com a construção e visualização da superfície, no *software* Winplot, comparando-a com as suas conjecturas individuais.

Em outro momento do diálogo, foi perguntado aos aprendizes:

“Como é o desenho do gráfico correspondente às expressões analíticas $z = x^2$ e $z = \sin x$ em \mathbb{R}^3 ?”

A turma ficou pensativa por um tempo, gerando possivelmente diversas conjecturas, pensamentos visuais e hipóteses mentais para a ideia sugestiva do pesquisador. Exemplifiquemos essa situação com as ideias descritas nas falas dos aprendizes; por exemplo, para o gráfico correspondente à expressão $z = x^2$, um estudante disse:

“Professor, para o gráfico de $z = x^2$, eu imagino uma parábola andante.” (Gilberto)

Já para o gráfico de $z = \text{sen } x$, tivemos outras respostas do tipo:

“Nesse gráfico teremos a forma de uma onda.” (Tiana)

“Seria um tobogã?” (Dago)

Nesse instante, observamos que os estudantes utilizaram gestos e mímicas para explicitarem as suas ideias. Alguns deles, com o uso das mãos na forma de uma calha (formato em U), fizeram movimentos horizontais, justificando a representação gráfica da superfície de $z = x^2$, no espaço.

Outro estudante insinuou e realizou com as mãos o desenho de uma senóide no espaço, para a representação do gráfico, cuja expressão é $z = \text{sen } x$, sugerindo também que seria algo parecido a uma “onda” e/ou a um “tobogã”. Esses exemplos, vivenciados pelos estudantes – associação de curvas no IR^3 a objetos, figuras e formas – refletem as primeiras evidências de uma possível aprendizagem significativa, entretanto, de acordo com a Teoria da Aprendizagem Significativa a ocorrência dela se dá pelo indivíduo realizando associações de uma nova informação com algum conhecimento prévio, relevante, ancorado na sua estrutura cognitiva. (AUSUBEL, 1980; MOREIRA, 2006; MASINI; MOREIRA, 2008)

O segundo momento da aplicação dos instrumentos de coleta ocorreu com a continuidade das atividades realizadas no laboratório e, ao final, a realização da Atividade – 2 pelos aprendizes, utilizando-se das mídias, lápis e papel, composta por questões objetivas e subjetivas. As de ordem objetiva associavam as expressões analíticas de funções reais de duas variáveis a gráficos e curvas no IR^3 e, ainda, relacionavam determinadas curvas de nível à gráficos e expressões analíticas correspondentes; já as questões de ordem subjetiva tratavam de conhecimentos e estratégias utilizadas, pelos estudantes, para responderem às atividades escritas e desenvolvidas no laboratório; e as outras, de cunho mais avaliativo, buscavam diagnosticar questões qualitativas no desenvolvimento das atividades, como em todo o processo de realização da pesquisa, com opiniões, sugestões e críticas feitas pelos seus participantes.

Após as Atividades – 1 e 2, retornamos à sala de aula com o objetivo de detectar, através de observações e com base na Teoria da Aprendizagem Significativa, as possíveis contribuições que essas atividades ofereceram aos estudantes, quando estes iniciaram formalmente o estudo de funções reais de duas variáveis. Dessas observações, ressaltamos que, em muitos momentos da aula, o professor solicitava dos aprendizes conceitos, características e propriedades das superfícies estudadas no laboratório, para a formalização e aprendizagem do conteúdo, principalmente, na parte que envolvia a construção e interpretação gráfica em IR^3 .

Ao final da pesquisa de campo, três aprendizes participantes – Gilberto, Walda e Tiana – foram entrevistados pelo pesquisador, com duração, em média, de 30 minutos cada, eles foram convidados de forma voluntária e aleatória com o propósito de que essas entrevistas acrescentassem aos dados da pesquisa alguns dos pensamentos, ideias, conhecimentos prévios/subsunçores dos aprendizes, pois acreditamos que alguns dados não citados nas respostas

das atividades, nem observados e detectados pelo pesquisador, na coleta de dados, poderiam ser revelados nessas entrevistas.

Considerações finais

Os conteúdos sobre gráfico de funções em \mathbb{R}^2 e em \mathbb{R}^3 , abordados nas questões das atividades, provocaram, individualmente, nos estudantes, interações de conhecimentos novos – gráficos de funções do \mathbb{R}^3 – com outros conhecimentos ancorados e existentes na sua estrutura cognitiva. Por exemplo, os conhecimentos sobre gráficos de funções em \mathbb{R}^2 e de geometria analítica (ponto, reta, plano etc.) foram determinantes para o conhecimento dos gráficos de funções do \mathbb{R}^3 e das superfícies estudadas. Estes conceitos adquiriram uma nova perspectiva, para os estudantes, a partir do momento em que eles os utilizaram para interagir com as novas informações. Contudo, as interações, reflexões e discussões, ocorridas na pesquisa, fizeram com que esses conhecimentos prévios evoluíssem para um novo estágio na estrutura cognitiva do aprendiz.

A resposta para a nossa questão de investigação – Como o uso de um *software* e de atividades elaboradas e analisadas, na perspectiva da aprendizagem significativa, pode contribuir para o ensino e aprendizagem de gráfico de funções do \mathbb{R}^3 , de estudantes de Cálculo de várias variáveis? – constitui em um conjunto, de fatores e ferramentas, que pode contribuir para o ensino e aprendizagem de gráfico de funções do \mathbb{R}^3 , por exemplo, a utilização da visualização no *software*, como meio para verificar e comprovar as conjecturas e hipóteses dos aprendizes participantes nas atividades; a construção de gráficos de funções; a formação do conceito de superfícies em gráfico de funções do \mathbb{R}^3 ; entre outros.

Entendemos que o termo interação exprime uma contribuição para a aprendizagem significativa dos estudantes sobre o conteúdo proposto na pesquisa e de acordo com a Teoria da Aprendizagem Significativa (AUSUBEL, 1980), vimos que ele representa a palavra-chave para a ocorrência da aprendizagem significativa.

As atividades e a metodologia de pesquisa utilizada ofereceram os subsídios necessários para que os alunos estabelecessem interações entre conhecimentos prévios de Matemática (como gráficos e funções no \mathbb{R}^2 , conceitos e definições de diversos tipos de funções) e outros do seu cotidiano do senso comum e que, através dessas interações, resultou num aprendizado mais significativo e menos mecânico de conceitos, características e propriedades de gráfico de funções e superfícies no \mathbb{R}^3 . Com base em uma faixa *continuum* (AUSUBEL, 1980), cujos extremos são aprendizagem significativa e aprendizagem mecânica, percebemos que a aprendizagem dos estudantes participantes da pesquisa tendeu mais para o extremo da aprendizagem significativa.

Com base nos resultados da pesquisa, sugerimos que professores de Cálculo (de várias variáveis) utilizem as TIC em suas aulas, compreendendo algumas das abstrações, ideias e pensamentos que seus aprendizes estabelecem nos diálogos entre eles, num ambiente informatizado. Este contexto possibilitará aos aprendizes, visualizações e simulações gráficas na aprendizagem de conceitos matemáticos de Cálculo.

As atividades desenvolvidas nesta pesquisa apresentam-se como um produto educacional, opcional, para professores de Cálculo, não que elas consistam em uma “receita” ou algo parecido, mas, sim, numa possibilidade e disponibilidade para o professor escolher e decidir utilizar – nos mesmos moldes construídos na pesquisa ou com adaptações pessoais pertinentes e coerentes com a teoria – quando lhe for conveniente e de acordo com a sua realidade acadêmica. Anseio, também, que essas atividades, auxiliadas por uma TI, sirvam como referência para

outras que o professor venha a desenvolver em sua prática docente e que os resultados de pesquisa juntem-se ao corpo de outras pesquisas com a mesma temática, oportunizando um espaço de discussão e estímulo para futuras pesquisas que venham relacionar aspectos da aprendizagem significativa com conceitos e definições de outras teorias, destacando pontos de consonâncias e convergências entre elas.

Bibliografia e referências

- Alves-Mazzotti, A. J.; Gewandsznajder, F. (2002). *O Método nas Ciências Naturais e Sociais: Pesquisa Quantitativa e Qualitativa*. São Paulo: Pioneira Thompson Learning, 3. reimpr. da 2. Edição.
- Ausubel, D. P.; Novak, J. D.; Hanesian, H. (1980). *Psicologia Educacional*. Rio de Janeiro, Interamericana. Tradução para português, de Eva Nick et al., da segunda edição de *Educational psychology: a cognitive view* (1968).
- Bogdan, R. C. E Biklen, S. K. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Trad: Alves, M. J.; Santos, S. B. e Baptista, T. M.. Portugal, Porto Editora Ltda.
- Costa, M. C. M. (2005). Modelo do pensamento visual-espacial: transformações geométricas no início da escolaridade. *Tese (Doutorado) – Universidade Nova de Lisboa*, Lisboa. 314p.
- Frota, M. C. R.; Couy, L. (2009). Estratégias para o Ensino-Aprendizagem de Funções com um Foco no Pensamento Visual. *In: Anais do IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (IV SIPEM)*, GT-04, em Brasília-DF.
- Lüdke, M; André, M. E.D.A. (1986). *Pesquisa em Educação: abordagens qualitativas*. São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária Ltda, 99p.
- Machado, R. M. (2008). A Visualização na Resolução de Problemas de Cálculo Diferencial e Integral no Ambiente Computacional MPP. *Tese (Doutorado) – Unicamp, Campinas, SP*. 289 p.
- Masini; E. F. S; Moreira, M. A. (2008). *Aprendizagem significativa: Condições para a ocorrência e lacunas que levam a comprometimentos*. 1. ed. São Paulo: Vetor.
- Moreira, M. A. (2006). *A teoria da aprendizagem significativa e sua implementação em sala de aula*. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 186p.
- Nasser, L. (2007). Ajudando a superar obstáculos na aprendizagem de cálculo. *In: IX Encontro Nacional de Educação Matemática. Anais do IX Encontro Nacional de Educação Matemática*. Belo Horizonte - MG : SBEM.
- Reis, F. S. (2001). A tensão entre o rigor e intuição no ensino de Cálculo e Análise: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos. *Tese (Doutorado) – Unicamp, Campinas, SP*. 302 p.
- Rezende, W. M. (2003). O ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica. *In Machado, N.: Cunha, M.(org) Linguagem, Conhecimento, Ação- ensaios de epistemologia e didática*. Escrituras. São Paulo.
- Tall, D. O. (1991). *Advanced Mathematical Thinking*. London: kluwer Academic Publishers, 289p.
- Tall, D. O. (2009) Intuition and rigour: the role of visualization in the calculus, *Visualization in Mathematics (ed. Zimmermann & Cunningham)*, No. **19**, 105–119. 1991. Recuperado de <http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1991a-int-rigourmaa.pdf>.
- Vinner, S. (1991). O papel das definições no ensino e aprendizagem de matemática. Traduzido por Márcia Pinto e Jussara Araújo. *In: The Role of Definitios in the Teaching and Learning of Mathematics. Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers. cap. 5, p. 65 – 81.