XIII CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
CIAEM 2011
26 - 30 Junio, 2011
Recife, Brasil
50 años del Comité Interamericano de Educación Matemática

Algunas reflexiones sobre la enseñanza de los métodos de Integración

Abel Enrique **Posso** Agudelo
Universidad Tecnológica de Pereira
Colombia
possoa@utp.edu.co

Vivian Libeth **Uzurriaga** López
Universidad Tecnológica de Pereira
Colombia
vuzuriaga@utp.edu.co

Alejandro **Martínez** Acosta
Universidad Tecnológica de Pereira
Colombia
amartinez@utp.edu.co

Resumen

La solución de muchos problemas aplicados se reduce a encontrar una función cuya derivada se conoce. Gran parte de los cursos de cálculo se dedican al estudio de las técnicas básicas (métodos de integración) para encontrar tal función, de una manera algorítmica, descuidando algunos aspectos teóricos que nos llevan a cometer errores. En este trabajo se indicarán algunos inconvenientes que surgen en la enseñanza de los métodos de integración y se sugerirán algunas alternativas metodológicas. Inicialmente se definen los conceptos de primitiva de una función y de primitiva general o integral indefinida de una función. Posteriormente, tras analizar el método de integración por partes como consecuencia de la regla de la derivada de un producto, se expone una técnica muy práctica, en forma de tabla, que simplifica el proceso de integración por partes. Se mostrará con unos ejemplos las ventajas de tal técnica, llamada por algunos autores ïntegración tabular”.

Una función F se llama primitiva de una función f en un intervalo I si y solo si F es continua en I y $F'(x) = f(x)$ en I, excepto a lo más en un número finito de puntos.
El conjunto de todas las primitivas de una función f en un intervalo I se denota con el símbolo $\int f(x)dx$ y recibe el nombre de integral indefinida. Si F es una primitiva de f en el intervalo I, se acostumbra escribir

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad x \in I,$$

donde C una constante, para indicar tal situación. Para hallar las primitivas (integral indefinida) de una función continua en un intervalo I se procede, por derivación, a construir una tabla de integrales inmediatas para posteriormente tratar de expresar la integral que se desea calcular en términos de integrales inmediatas, usando ciertos procedimientos, por lo general algebraicos, llamadas técnicas de integración. Inicialmente se parte de los siguientes resultados:
Si f y g son dos funciones continuas en un cierto intervalo I y k es una constante fija entonces

- $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
- $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$

Este resultado de entrada induce al estudiante poco cuidadoso a preguntarse:
¿ Porqué no es válido que

$$\int f(x)g(x)dx = \int f(x)dx \int g(x)dx \ \ ?$$

Surge así una primera pregunta:

¿ Cómo hallar una primitiva del producto de dos funciones continuas?

Es decir,
¿ Si f, g son dos funciones continuas en un cierto intervalo I cómo hallar $\int f(x)g(x)dx$?
Como respuesta a esta pregunta aparecen dos procedimientos generales que resultan de la regla de la cadena y de la derivada de un producto de dos funciones:

- Integración por sustitución o cambio de variable, útil para integrales de la forma
$$\int f(g(x))g'(x)\, dx$$
- Integración por partes, aplicable a integrales de la forma
$$\int f(x)g(x)\, dx$$

Para deducir la fórmula de integración por partes , por lo general, se procede así:

Si g_1 es una primitiva de g en el intervalo I entonces

$$\big(f(x)g_1(x)\big)' = f'(x)g_1(x) + f(x)g(x), \quad x \in I.$$

Entonces, por definición de integral indefinida se tiene que

$$\int \big(f'(x)g_1(x) + f(x)g(x)\big)dx = f(x)g_1(x) + C,$$

esto es,

$$\int f(x)g(x)dx = f(x)g_1(x) - \int f'(x)g_1(x)dx + C.$$

Tomando $C = 0$ obtenemos

$$\int f(x)g(x)dx = f(x)g_1(x) - \int f'(x)g_1(x)dx$$

En términos de diferenciales:

$$\int \underbrace{f(x)}_{u}\underbrace{g(x)dx}_{dv} = \underbrace{f(x)}_{u}\underbrace{g_1(x)}_{v} - \int \underbrace{g_1(x)}_{v}\underbrace{f'(x)dx}_{du}$$

Obteniéndose así, la llamada fórmula de integración por partes:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Otra forma de deducir la fórmula de integración por partes, es la siguiente:

$$d(uv) = u\,dv + v\,du$$

entonces

$$u\,dv = d(uv) - v\,du$$

integrando obtenemos

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

La fórmula de integración por partes en términos de diferenciales es usada en muchos los libros de cálculo que se utilizan en nuestro entorno (Thomas, Leithold, Swokowski, Steward, Edwards, Purcel, Stein, Larson, L. Bers, Thomas jr. /Finney, etc.) esto debido, tal vez, a la formalización del cálculo realizada por Cauchy.
En el Cálculo y Geometría Analítica, de Larson-Hostetler, segunda edición (pág.473) se hace la siguiente cita:

> La ecuación $\int udv = uv - \int vdu$ reduce la búsqueda de la integral $\int u\,dv$ a la de la integral $\int v\,du$ que en ciertos casos es más sencilla de hallar.
>
> Augustin Louis Cauchy (1797–1857)

La fórmula de integración por partes con notación de diferenciales se enseña en forma rutiraria y sin tener en cuenta su real significado mediante frases como la siguiente:

"un día vi una vaca vestida de uniforme"

A continuación se plantea una dificultad en la enseñanza de los métodos de integración:

Ejemplo 1. Apliquemos la fórmula de integración por partes a la integral $\int(1/x)dx$.

Solución. Sea

$$u = \frac{1}{x} \quad \text{y} \quad dv = dx$$

entonces

$$du = -\frac{1}{x^2} \quad \text{y} \quad v = x$$

Por la fórmula de integración por partes tenemos

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \Big(\frac{1}{x}\Big)(x) - \int (x)\Big(-\frac{1}{x^2}\Big) = 1 + \int \frac{1}{x}\,dx.$$

Simplificando, obtenemos

$$0 = 1 \qquad (!!!?)$$

¿Dónde esta el error en el procedimiento anterior ?

El error, provocado por la omisión de la constante de integración, está en simplificar la integral. No podemos simplificar $\int \frac{1}{x}dx$ en ambos miembros pues representan conjuntos de funciones (las primitivas de $1/x$) y no números ni funciones.
En consecuencia, para evitar las dificultades del ejemplo anterior debemos usar la siguiente fórmula de integración por partes:

$$\int f(x)g(x)dx = f(x)g_1(x) - \int f'(x)g_1(x)dx + C\,.$$

O, usando diferenciales:

$$\int udv = uv - \int vdu + C\,.$$

En el siguiente ejemplo se muestra una dificultad que se presenta al aplicar dos veces la fórmula de integración por partes con notación de diferenciales:

Ejemplo 2. Hallar $\int e^x \operatorname{sen} x\, dx$.

Solución. Sea

$$u = e^x \quad \text{y} \quad dv = \operatorname{sen} x dx$$

entonces

$$du = e^x\, dx \quad \text{y} \quad v = -\cos x + C_1$$

Tomando $C_1 = 0$ y aplicando la fórmula de integración por partes obtenemos

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = -e^x \cos x + \int \cos x \; e^x\, dx + C.$$

Aplicamos de nuevo integración por partes. Sea

$$u = \cos x\, dx \quad \text{y} \quad dv = e^x dx.$$

Entonces

$$du = -\operatorname{sen} x\, dx \qquad \text{y} \quad v = e^x + C_1$$

Tomando $C_1 = 0$ obtenemos

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = -e^x \cos x + (\cos x)e^x - \int e^x(-\operatorname{sen} x\, dx) + C.$$

Simplificando,

$$0 = C \qquad \text{(!!!)}$$

Para evitar esta dificultad se tiene la siguiente propuesta: Aplicar la fórmula de integración por partes

$$\int f(x)g(x)dx = f(x)g_1(x) - \int f'(x)g_1(x)dx + C$$

usando el siguiente esquema

$$\begin{tikzcd} f(x) \arrow[dr, "+"] & g(x) \\ f'(x) \arrow[r, "-\int"'] & g_1(x) = \int g(x)dx + C_1 \end{tikzcd}$$

Ejemplo 3. Hallar $\int xe^x\, dx$

Solución. Hay dos posibilidades para escoger $f(x)$ y $g(x)$:

Si escogemos $f(x) = e^x$ y $g(x) = x$, tenemos

$$\begin{tikzcd} f(x) = e^x \arrow[dr, "+"] & g(x) = x \\ f'(x) = e^x \arrow[r, "-\int"'] & g_1(x) = \frac{x^2}{2} + C_1 \end{tikzcd}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int xe^x\, dx &= e^x\left(\tfrac{x^2}{2} + C_1\right) - \int e^x\left(\tfrac{x^2}{2} + C_1\right) dx + C \\ &= e^x\tfrac{x^2}{2} + C_1e^x - \int e^x\tfrac{x^2}{2}\, dx - C_1e^x + C \\ &= \tfrac{1}{2}x^2e^x - \tfrac{1}{2}\int x^2e^x\, dx + C\,. \end{aligned}$$

Aunque la aplicación de la fórmula es correcta, resulta **inútil** ya que la última integral del lado derecho es más complicada que la integral dada.

Tomemos ahora $f(x) = x$, y $g(x) = e^x$.

Entonces

$$\begin{tikzcd} f(x) = x \arrow[dr, "+"] & g(x) = e^x \\ f'(x) = 1 \arrow[r, "-\int"'] & g_1(x) = \int e^x\, dx = e^x + C \end{tikzcd}$$

Por lo cual,

$$\begin{aligned}\int xe^x\,dx &= x(e^x + C_1) - \int (e^x + C_1)dx\ + C\\ &= xe^x + C_1x - e^x - C_1x + C\\ &= xe^x - e^x + C\end{aligned}$$

Ejemplo 4. Hallar $\int x \operatorname{sen} x\, dx$

Solución. Hay dos posibilidades para escoger $f(x)$ y $g(x)$:

Podemos tomar

$$\begin{tikzcd}
f(x)=x \arrow[dr, "+"] & g(x)=\operatorname{sen} x & \\
f'(x)=1 \arrow[r, "-\int"'] & g_1(x) & = -\cos x + C_1
\end{tikzcd}$$

o tomar

$$\begin{tikzcd}
f(x)=\operatorname{sen} x \arrow[dr, "+"] & g(x)=x & \\
f'(x)=\cos x \arrow[r, "-\int"'] & g_1(x) & = \dfrac{x^2}{2} + C_1
\end{tikzcd}$$

Claramente, la integral $\int f'(x)g_1(x)\,dx$ resulta más simple si escogemos

$$f(x) = x \qquad \text{y} \qquad g(x) = \operatorname{sen} x$$

Aplicando la fórmula obtenemos

$$\begin{aligned}\int x \operatorname{sen} x\,dx &= x(-\cos x + C_1) - \int(-\cos x + C_1)dx + c\\ &= -x\cos x + C_1x + \int \cos x\,dx - C_1\int dx + c\\ &= -x\cos x + C_1x + \operatorname{sen} x - C_1x + C\\ &= -x\cos x + \operatorname{sen} x + C\end{aligned}$$

Observamos en los dos ejemplos anteriores que la constante de integración C_1 obtenida al calcular g_1 no aparece en el resultado final. Esto siempre ocurre, por lo cual se acostumbra tomar $C_1 = 0$.

Sin embargo, hay casos en los cuales el tomar un valor adecuado para la constante C_1 simplifica un poco los cálculos, como se ilustra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 5. Hallar $\int x \arctan x\,dx$

Solución. Dado que la derivada de $\arctan x$ es una función algebraica, tomemos

$$f(x) = \arctan x \quad \text{y} \quad g(x) = x$$

entonces

$$\begin{tikzcd}
f(x) = \arctan x \arrow[dr, "+"] & g(x) = x \\
f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \arrow[r, "-\int"'] & g_1(x) = \dfrac{x^2}{2} + C_1
\end{tikzcd}$$

En el esquema observamos que el producto $f'(x)g_1(x)$ se simplifica si tomamos $C_1 = \frac{1}{2}$ en lugar de tomar $C_1 = 0$. Para dicho valor de C_1 obtenemos

$$\begin{aligned}
\int x \arctan x \, dx &= \arctan x (\tfrac{x^2}{2} + \tfrac{1}{2}) - \int \tfrac{1}{2} \, dx + C \\
&= \tfrac{(1+x^2) \arctan x}{2} - \tfrac{1}{2}x + C
\end{aligned}$$

Ejemplo 6. Hallar $\int \operatorname{arc\,sen} \sqrt{\frac{x}{x+1}} \, dx$

Solución. Aplicamos integración por partes mediante el esquema

$$\begin{tikzcd}
f(x) = \operatorname{arc\,sen} \sqrt{\tfrac{x}{x+1}} \arrow[dr, "+"] & g(x) = 1 \\
f'(x) = \tfrac{1}{2\sqrt{x}(x+1)} \arrow[r, "-\int"'] & g_1(x) = x + C_1
\end{tikzcd}$$

En el esquema observamos que el producto $f'(x)g_1(x)$ se simplifica al tomar $C_1 = 1$. Entonces

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{arc\,sen} \sqrt{\tfrac{x}{x+1}} dx &= (x+1) \operatorname{arc\,sen} \sqrt{\tfrac{x}{x+1}} - \tfrac{1}{2} \int \tfrac{dx}{\sqrt{x}} + C \\
&= (x+1) \operatorname{arc\,sen} \sqrt{\tfrac{x}{x+1}} - \sqrt{x} + C
\end{aligned}$$

Ejemplo 7. Hallar $\int x \cos 2x \, dx$

Solución. Usamos integración por partes. Del esquema

$$\begin{tikzcd}
f(x) = x \arrow[dr, "+"] & g(x) = \cos 2x \\
f'(x) = 1 \arrow[r, "-\int"'] & g_1(x) = \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{2} + C_1
\end{tikzcd}$$

se obtiene, tomando $C_1 = 0$:

$$\begin{aligned}
\int x \cos 2x \, dx &= \tfrac{1}{2} x \operatorname{sen} 2x - \tfrac{1}{2} \int \operatorname{sen} 2x \, dx + C \\
&= \tfrac{1}{2} x \operatorname{sen} 2x - \tfrac{1}{2} \int \operatorname{sen} 2x \, dx + C \\
&= \tfrac{1}{2} x \operatorname{sen} 2x + \tfrac{1}{4} \cos 2x + C.
\end{aligned}$$

Ejemplo 8. Hallar $\int x \sec^2 x \, dx$

Solución. Usamos el esquema

$$\begin{tikzcd} x \arrow[dr, "+"] & \sec^2 x \\ 1 \arrow[r, "-\int"'] & \tan x \; + C_1 \end{tikzcd}$$

Tomamos $C_1 = 0$ para obtener

$$\begin{aligned} \int x \sec^2 x \, dx &= x \tan x - \int \tan x dx + C \\ &= x \tan x + \ln |\cos x| + C \end{aligned}$$

Ejemplo 9. Hallar $\int \sec^3 x \, dx$

Solución. Usando el esquema

$$\begin{tikzcd} \sec x \arrow[dr, "+"] & \sec^2 x \\ \sec x \tan x \arrow[r, "-\int"'] & \tan x \; + C_1 \end{tikzcd}$$

obtenemos (tomando $C_1 = 0$)

$$\begin{aligned} \int \sec^3 x \, dx &= \sec x \tan x - \int \tan^2 x \sec x \, dx + C \\ &= \sec x \tan x - \int (\sec^2 - 1) \sec x \, dx + C \\ &= \sec x \tan x - \int \sec^3 x \, dx + \int \sec x \, dx + C \\ &= \sec x \tan x - \int \sec^3 x \, dx + \ln |\sec x + \tan x| + C \end{aligned}$$

Simplificando, obtenemos

$$\int \sec^3 x \, dx = \tfrac{1}{2} \sec c \tan x + \tfrac{1}{2} \ln |\sec x + \tan x| + C_1$$

donde $C_1 = \dfrac{1}{2} C$.

Ejemplo 10. Hallar

$$\int x^7 e^{x^4} \, dx$$

Solución. Puesto que

$$\int x^7 e^{x^4}\, dx = \int x^4 e^{x^4} x^3\, dx$$

entonces podemos realizar la sustitución

$$t = x^4 \quad \text{y} \quad dt = 4x^3\, dx$$

para obtener

$$\int x^7 e^{x^4}\, dx = \frac{1}{4}\int te^t\, dt$$

Aplicando integración por partes:

$$\begin{tikzcd} t \arrow[dr, "+"] & e^t \\ 1 \arrow[r, "-\int"'] & e^t + C_1 \end{tikzcd}$$

Tomamos $C_1 = 0$ y obtenemos

$$\frac{1}{4}\int te^t\, dt = \frac{1}{4}[te^t - \int e^t\, dt] + C = \frac{1}{4}[te^t - e^t] + C$$

Después de recuperar la variable de integración inicial obtenemos

$$\int x^7 e^{x^4}\, dx = \frac{1}{4}[x^4 - 1]e^{x^4} + C$$

Observemos que podemos aplicar directamente integración por partes a la integral $\int x^7 e^{x^4}\, dx$:

$$\begin{tikzcd} x^4 \arrow[dr, "+"] & x^3 e^{x^4} \\ 4x^3 \arrow[r, "-\int"'] & \frac{1}{4}e^{x^4} + C_1 \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} \int x^7 e^{x^4}\, dx &= \tfrac{1}{4}x^4 e^{x^4} - \int x^3 e^{x^4}\, dx + C \\ &= \tfrac{1}{4}x^4 e^{x^4} - \tfrac{1}{4}e^{x^4} + C \end{aligned}$$

Ejemplo 11. Hallar $\int \operatorname{arc\,sen} x\, dx$

Solución.

$$\begin{tikzcd} \operatorname{arc\,sen} x \arrow[dr, "+"] & 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \arrow[r, "-\int"'] & x + C_1 \end{tikzcd}$$

Tomando $C_1 = 0$ obtenemos

$$\int \operatorname{arc\,sen} x\, dx = x \operatorname{arc\,sen} x - \int \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}} + C$$

Realizando la sustitución $t = 1 - x^2$ y $dt = -2x\,dx$ en la última integral obtenemos

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\tfrac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\sqrt{t} + C_1 = -\sqrt{1-x^2} + C_1$$

Por tanto,

$$\int \operatorname{arc\,sen} x\,dx = x \operatorname{arc\,sen} x + \sqrt{1-x^2} + C_2$$

donde $C_2 = -C_1$.

Ejemplo 12. Hallar $\int \ln x\,dx$

Solución.

$$\begin{tikzcd} \ln x \arrow[dr, "+"] & 1 \\ \dfrac{1}{x} \arrow[r, "-\int"'] & x + C_1 \end{tikzcd}$$

Tomando $C_1 = 0$ obtenemos

$$\int \ln x\,dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$$

Uso reiterado del método de integración por partes. Si f tiene derivadas continuas en el intervalo $[a, b]$, hasta de orden n, por lo menos, y existen funciones $g, g_1, g_2, \ldots, g_n$ tales que

$$g_1(x) = \int g(x)\,dx, \qquad \text{y } g_k(x) = \int g_{k-1}(x)\,dx \qquad \text{para } k = 2, 3, \ldots n$$

entonces podemos aplicar n veces el método de integración por partes a la integral $\int f(x)g(x)\,dx$, para obtener

$$\begin{aligned} \int f(x)g(x)\,dx = f(x)g_1(x) - f'(x)g_2(x) + \cdots + (-1)^{n-1} f^{n-1}(x)\,g_n(x) \\ + (-1)^n \int f^{(n)}(x)g_n(x)\,dx \end{aligned}$$

Usando la notación de sumatoria podemos escribir

$$\int f(x)g(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} f^{(k-1)}(x) g_k(x) \; + \; (-1)^n \int f^{(n)}(x) g_n(x)\,dx$$

donde $f^{(0)}(x) = f(x)$ La igualdad anterior puede obtenerse fácilmente mediante el siguiente esquema tabular

$$
\begin{array}{ccc}
f(x) & \overset{+}{\searrow} & g(x) \\
f^{(1)}(x) & \overset{-}{\searrow} & g_1(x) \\
f^{(2)}(x) & \overset{+}{\searrow} & g_2(x) \\
 & \vdots & g_3(x) \\
f^{(n-1)}(x) & \overset{(-1)^{n-1}}{\searrow} & \\
f^{(n)}(x) & \xrightarrow[(-1)^n \int]{} & g_n(x)
\end{array}
$$

Ejemplo 13. Hallar $\int x^5 \operatorname{sen}(3x)\,dx$

Solución. Sea $f(x) = x^5$ y $g(x) = \operatorname{sen}(3x)$. Entonces

$$
\begin{array}{ccc}
x^5 & \overset{+}{\searrow} & \operatorname{sen}(3x) \\
5x^4 & \overset{-}{\searrow} & -\frac{1}{3}\cos(3x) \\
20x^3 & \overset{+}{\searrow} & -\frac{1}{9}\operatorname{sen}(3x) \\
60x^2 & \overset{-}{\searrow} & \frac{1}{27}\cos(3x) \\
120x & \overset{+}{\searrow} & \frac{1}{81}\operatorname{sen}(3x) \\
120 & \overset{-}{\searrow} & -\frac{1}{243}\cos(3x) \\
0 & \xrightarrow[\int]{} & -\frac{1}{729}\operatorname{sen}(3x)
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
\int x^5 \operatorname{sen}(3x)\,dx = & -\tfrac{1}{3}x^5\cos(3x) + \tfrac{5}{9}x^4\operatorname{sen}(3x) + \tfrac{20}{27}x^3\cos(3x) \\
& - \tfrac{60}{81}x^2\operatorname{sen}(3x) - \tfrac{120}{243}x\cos(3x) + \tfrac{120}{729}\operatorname{sen}(3x) + C
\end{aligned}
$$

Ejemplo 14. Hallar $\int e^{ax}\operatorname{sen}(bx)\,dx$

Solución. Tomemos $f(x) = e^{ax}$ y $g(x) = \operatorname{sen}(bx)$. Entonces

$$
\begin{array}{ccc}
e^{ax} & \overset{+}{\searrow} & \operatorname{sen}(bx) \\
ae^{ax} & \overset{-}{\searrow} & -\frac{1}{b}\cos(bx) \\
a^2e^{ax} & \xrightarrow[+\int]{} & -\frac{1}{b^2}\operatorname{sen}(bx)
\end{array}
$$

$$
\int e^{ax}\operatorname{sen}(bx)\,dx = -\tfrac{1}{b}e^{ax}\cos(bx) + \tfrac{a}{b^2}e^{ax}\operatorname{sen}(bx) - \tfrac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\operatorname{sen}(bx)\,dx
$$

$$
\int e^{ax}\operatorname{sen}(bx)\,dx = \frac{e^{ax}[a\operatorname{sen}(bx) - b\cos(bx)]}{a^2+b^2} + C.
$$

La serie de Taylor. Usando el esquema tabular podemos llegar fácilmente a deducir la fórmula de Taylor y a introducir de una manera natural el concepto de serie: Por el teorema fundamental del cálculo,

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt$$

Aplicando integración por partes n veces, mediante es esquema tabular, se obtiene

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{\text{polinomio de Taylor}} + \underbrace{\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt}_{\text{resto o residuo}}$$

Por lo general, el estudiante tiene dificultades con el método de integración por partes porque no tiene criterios claros acerca de como escoger las funciones a derivar y a integrar. Para ayudarle podemos hace énfasis en las siguientes consideraciones:

- Para hallar una integral usando integración por partes se debe ver el integrando como un producto de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$.
- La elección de $f(x)$ y $g(x)$ es arbitraria y no hay una regla general que nos indique como hacerlo. Sin embargo, el tener en cuenta las siguientes recomendaciones puede ayudar.
    - Escoger $g(x)$ como la parte más compleja del integrando que puede ser integrada fácilmente.
    - Escoger $f(x)$ como la parte del integrando que tiene derivada $f'(x)$ más simple que $f(x)$. Por lo general, la función $f(x)$ se selecciona de acuerdo al siguiente orden de prioridad

      Logaritmicas
      Inversas
      Algebraicas
      Trigonométricas
      Exponenciales
- Estar atentos a la aparición de la integral inicial cuando se aplique reiteradamente el método de integración por partes.

Conclusiones

- La falta de precisión en los conceptos induce al estudiante a cometer errores.
- Es necesario hacer énfasis en el significado de integral indefinida y la importancia de la constante de integración.

- Se debe resaltar a todo momento que al realizar integración por partes el integrando debe ser siempre considerado como un producto de dos funciones, una de las cuales se debe poder derivar y la otra integrar.

Bibliografía

Folley, K. W. (1947): Integration by Parts. *American Mathematical Monthly.* Vol. 54 No. 9, 542-543.

Horowitz D. (1990): Tabular Integration by Parts. *The College Mathematics Journal.* Vol. 21 No. 4, 307–311.

Murty V. N. (1980): Integration by Parts. *The Two-Year College Mathematics Journal.* Vol. 11 No. 2, 90–94.

Posso A. E. Cálculo integral sucesiones y series. *Sección publicaciones Universidad Tecnológica de Pereira.* Abril de 1998.

Thomas G. B. Jr., Finney R. L. *Cálculo una variable. 9a. edición. Addison Wesley Longman,* México, 1998.