XIII CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
CIAEM 2011
26 - 30 Junho, 2011
Recife, Brasil
50 anos do Comitê Interamericano de Educação Matemática

O Conceito de Integral Definida como Área:
relato de uma experiência em um curso semipresencial

Jader Otavio **Dalto**
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Brasil
jader@cpaq.ufms.br

Vinícius **Pazuch**
Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões
Brasil
viniuch@hotmail.com

Resumo

O processo de ensinar e aprender conceitos complexos como o de integral definida envolve uma série de fatores que influenciam e que muitas vezes impedem a apropriação do conceito por parte do estudante. Assim, neste relato, procurou-se relatar e analisar a experiência de se trabalhar com o conceito de integral definida enquanto área a partir de tarefas que possibilitassem aos estudantes a oportunidade de realizarem conversões entre diferentes registros de representação semiótica em uma turma de Cálculo Diferencial e Integral I de um curso de Licenciatura em Matemática na modalidade semipresencial. A análise da experiência baseia-se nos novos papeis e nas novas relações que foram estabelecidas entre os sujeitos da relação didática após ruptura do contrato didático vigente. A análise sugere que as conversões entre os diferentes registros contribuíram para que os estudantes significassem o conceito de integral definida sem grandes dificuldades.

Palavras chave: educação matemática, registros de representação semiótica, contrato didático, integral definida.

A disciplina de Cálculo Diferencial e Integral pode ser considerada como uma das mais importantes disciplinas dos cursos de graduação em Matemática. Apesar disso, a forma como acontece o tratamento dos conceitos no processo de ensinar e aprender dessa disciplina nem sempre é tranquila.

Sabe-se que a aprendizagem de qualquer conceito matemático envolve inúmeros fatores, determinados pelas relações que se estabelecem entre os sujeitos envolvidos nesse processo que, por sua vez, envolvem a concepção de aprendizagem dos sujeitos, a concepção de matemática, as escolhas metodológicas do professor, entre outros. Ainda, se os conceitos matemáticos forem considerados abstratos, é necessária a mobilização de diferentes formas de representação contribuindo na comunicação e na aprendizagem desses conceitos.

Por esses motivos, uma reflexão acerca dos problemas enfrentados pelos estudantes nas significações de um conceito complexo, como o conceito de integral definida, precisa considerar aspectos relacionados às relações estabelecidas entre professor, estudante e saber, e os aspectos relativos à comunicação e à representação dos conceitos matemáticos.

Integral pode ter diferentes significados, como por exemplo a operação inversa da diferenciação, como um processo para obter áreas, volumes, e de modo geral como um processo de medida. (Artigue, 2002). De acordo com Ávila (2006), o conceito de integral remonta ao tempo de Arquimedes e seu desenvolvimento teve forte motivação geométrica. Entretanto, de modo geral, a prática pedagógica mais comum é relacionar integral ao cálculo de antiderivadas, acarretando uma supervalorização do trabalho algébrico com algoritmos e técnicas de integração em detrimento ao trabalho com gráficos e com elementos geométricos. Para Azcárate, Casadevall, Casallas e Bosch (1996), a aprendizagem do conceito de integral definida é independente da aprendizagem do conceito de derivada e pode, inclusive, se dar antes da aprendizagem do conceito de derivada.

A algoritimização algébrica prematura tende, segundo Artigue (2002), a afastar o conceito de integração do seu real significado, interferindo negativamente na aprendizagem dos conceitos por parte dos estudantes e gerando dificuldades De acordo com A. Orton (como citado em Artigue, 2002), as principais dificuldades dos estudantes se referem à utilização de representações gráficas e em atribuir significado para o limite que está presente na definição de derivadas e integrais. Além disso, os estudantes possuem dificuldades em identificar que certos conceitos podem ser úteis para resolver uma determinada situação. Em alguns casos, mesmo desenvolvendo corretamente o cálculo de uma integral na resolução de um problema, muitas vezes, os estudantes não conseguem argumentar porque utilizam determinada estratégia.

A partir das reflexões anteriores, procurou-se introduzir o conceito de integral definida em uma turma de alunos de um curso de graduação em Matemática por meio de tarefas que possibilitassem a mobilização de diferentes registros de representação semiótica relativos a esse conceito. A análise de elementos dessa experiência será feita baseando-se nas relações/interações estabelecidas entre os diferentes sujeitos da prática pedagógica com o objeto matemático. Primeiramente são feitas algumas considerações sobre os Registros de Representação Semiótica e sobre Contrato Didático a fim de subsidiar/nortear as reflexões apresentadas.

Registros de Representação Semiótica

Os objetos matemáticos, por não serem diretamente acessíveis à percepção, necessitam de alguma representação para serem comunicados. Ao mesmo tempo, a comunicação de ideias, conceitos, relações entre objetos matemáticos só é possível por meio de alguma forma de representação. Por exemplo, $x + 3 = 5$ é uma das representações do objeto matemático, que pode ser representado ainda por *o número que somado com três resulta no número cinco*, ou por uma figura. Todos os diferentes símbolos, códigos, tabelas, gráficos, esquemas, desenhos, diagramas, permitem a comunicação dos objetos matemáticos e geram diferentes registros de representação[1]. Não há mobilização de conhecimento matemático sem o auxílio de uma representação (Damm, 1999).

As representações podem ser, de acordo com Duval (2003), mentais, internas ou semióticas. As representações semióticas são externas e conscientes do sujeito, constituem-se por meio de símbolos pertencentes a um sistema de representação, cuja função é a objetivação e a expressão. Como exemplo de representações semióticas pode-se citar as representações gráficas, as figuras geométricas, os diferentes idiomas, a escrita algébrica (Damm, 1999).

Além do papel de comunicar, as representações semióticas são fundamentais na construção do conhecimento pelo sujeito. Tal construção não significa apenas a aprendizagem ou produção de uma representação semiótica – o que Duval chama de semiósis – mas sobretudo a apreensão conceitual de um objeto – ou noésis – que se dá por meio de significativas semiósis e pela coordenação de diferentes registros de representação do mesmo objeto matemático (Damm, 1999), ou seja, a compreensão em matemática se potencializa a medida que o sujeito que aprende consegue identificar e coordenar diferentes registros de representação de um mesmo objeto.

Toda representação está sujeita a um tratamento. Tratamento é definido como sendo uma transformação interna de um registro, ou seja, são transformações dentro de um mesmo registro. Por exemplo, ocorre uma transformação quando se escreve $x = 5 - 3$ a partir do registro $x + 3 = 5$. São registros que fazem parte da escrita algébrica.

A conversão de registros ocorre quando utilizam-se registros diferentes para representar o mesmo objeto matemático. É, portanto, uma transformação externa ao registro inicial. Por exemplo, ocorre uma conversão quando se passa do registro em língua natural *o número que somado com três resulta o número cinco* para o registro em escrita algébrica $x + 3 = 5$.

De acordo com Vertuan (2007), o tratamento parece ser a transformação mais utilizada pelos professores em suas práticas pedagógicas. Acrescenta ainda que, com o intuito de que os estudantes compreendam um conceito, o professor escolhe arbitrariamente um determinado registro referente a esse conceito, com o qual pode justificar uma ideia referente ao conceito em estudo. Entretanto, muitas vezes, um único registro não se mostra suficientemente eficiente para a compreensão do conceito matemático que representa, uma vez que pode não contemplar todas as características do objeto.

A compreensão de determinado objeto ou conceito matemático – conceitualização – não é determinada apenas pelas diferentes possibilidades de representação de um mesmo objeto matemático, mas sobretudo pela coordenação dos diferentes registros, que se dá a partir de conversões entre pelo menos dois diferentes registros desse objeto. É importante destacar que tratamento e conversão são processos cognitivos diferentes que não podem ser confundidos, pois segundo Damm (1999), enquanto o tratamento é estabelecido internamente do registro, a conversão é externa ao registro, ou seja, ocorre entre registros diferentes.

Contrato Didático

As relações estabelecidas entre estudante, professor e saber são controladas por um conjunto de regras, muitas vezes, implícitas na relação pedagógica. Esse conjunto de regras que determinam a base das relações entre estudante, professor e saber é denominado contrato

[1]"registros" e "registros de representação" serão utilizados neste trabalho com o mesmo significado de "registros de representação semiótica".

didático (Silva, 1999).

Embora o contrato didático é entendido como um conjunto de regras que norteiam o processo de ensinar e aprender um objeto de saber, "[...] o mais importante não é tentar explicitar a totalidade das regras que constituem o contrato didático e, sim, delinear alguns de seus possíveis pontos de ruptura". (G. Brosseau como citado em Pais, 2005, p. 80). O contrato didático fornece elementos para as intervenções docentes e possíveis interações entre professor, estudantes e objeto de saber, no entanto, como as relações são subjetivas por parte dos sujeitos da prática pedagógica, não há como prever todos os acontecimentos decorrentes da aula planejada *a priori*.

Os pressupostos teóricos dos registros de representação semiótica e do contrato didático permeiam as reflexões deste artigo. Entende-se o recorte feito, de aulas de Matemática, como experiência justamente por propor reflexões sobre a prática pedagógica, observando-se as rupturas no contrato didático e a forma com que o professor conduziu/interviu nas diferentes estratégias usadas pelos estudantes na significação do conceito de integral definida.

A Experiência

A experiência foi realizada em uma turma de 17 estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática, na modalidade semipresencial, em uma cidade do interior do Estado de Mato Grosso do Sul. A carga horária total da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I era de 200 horas/aula, sendo que dessas, 84 horas/aula foram presenciais, ministradas às sextas-feiras à noite e aos sábados nos períodos da manhã e da tarde em sete momentos presenciais. A ementa da disciplina compreendia os conteúdos de limites, derivadas e integrais. Imediatamente após a aula, o professor, autor do trabalho, relatou detalhadamente os acontecimentos da aula para posterior análise.

A opção dos professores [2] que ministraram a disciplina, nas diferentes turmas, foi utilizar o tempo destinado às atividades presenciais para aulas expositivas e de resolução de exercícios, o que fazia com que os estudantes permanecessem o tempo todo ouvindo as explicações dadas pelo professor, ratificando algumas das regras do contrato didático a que os estudantes estavam acostumados: o professor é responsável pela enunciação de definições, teoremas, demonstração desses teoremas e exemplos, enquanto que ao estudante cabe anotar a "matéria" e resolver listas de exercícios após a aula expositiva dada pelo professor.

Os resultados de tal escolha metodológica não estavam sendo muito positivos, pois o desempenho de muitos estudantes nas avaliações anteriores foi abaixo do esperado. Aparentemente, uma das causas do baixo desempenho foi a excessiva ênfase dada aos aspectos algébricos, de técnicas de resolução e de algoritmos que foram dados aos conteúdos anteriores, além do uso excessivo de tratamentos de registros de representação, em detrimento da transformação de conversão de registros, o que contribuiu para a apresentação de dificuldades na conceitualização, por parte dos estudantes, dos objetos matemáticos que foram trabalhados anteriormente. Assim, o professor da turma decidiu trabalhar o conceito de integral de forma diferente comparada àquela em que foram introduzidos os conceitos anteriores, de modo que os estudantes pudessem conceitualizar integral definida sem grandes dificuldades e fazendo uso de processos matemáticos de conceitos já vistos em outras ocasiões.

[2] Haviam quatro turmas nas quais a disciplina foi ofertada, cada uma delas em uma cidade diferente do estado, ministradas por professores diferentes.

No primeiro momento da aula sobre integrais, antes de definir integrais indefinidas, foi proposto aos estudantes que investigassem a seguinte situação: *Qual a área da região do plano cartesiano delimitada pelo gráfico da função* $f(x) = x^2$*pelo eixo x e pela reta* $x = 6$*?*

A princípio, os estudantes não se envolveram com a atividade, pois esperavam que seria resolvida pelo professor, já que essa era uma das regras do contrato didático a que estavam habituados. Quando solicitados pelo professor para que pensassem a respeito, vários deles se manifestaram dizendo que não sabiam como resolver ou que não era possível determinar a resposta para essa questão, pois "*você* [o professor] *ainda não ensinou nada do novo conteúdo*". Um deles acrescentou: "*Professor, aposto que isso se resolve com uma integral. Diz aí como faz*". Neste momento, o professor afirmou que o cálculo do valor desta área pode sim ser realizado por meio do cálculo de uma integral, mas que isso não significava que ao menos uma estimativa da área pudesse ser feita por eles a partir do uso de alguma "matemática" que eles conheciam, como por exemplo, por meio do cálculo da área de alguma ou de várias figuras planas.

Até esse momento da aula, percebe-se uma ruptura dupla do contrato didático, primeiro porque os estudantes não se envolvem na atividade que lhes é proposta e segundo porque o professor propõe a resolução de um problema antes de apresentar um método novo para resolvê-lo, como acontecia anteriormente. A ênfase deixa de ser o conteúdo e sua transmissão pelo professor e passa a ser a relação entre estudante e saber, tendo o professor como mediador dessa relação.

Apesar de, a princípio, os estudantes estranharem o novo papel que lhes cabia na aula, eles puseram-se a investigar a questão. Organizaram-se em grupos e começaram a discutir a tarefa, enquanto o professor acompanhava cada grupo e auxiliava a investigação. A primeira conjectura adotada pelos estudantes foi o esboço do gráfico da função para, assim, visualizarem a região cuja área deveriam calcular, caracterizando uma conversão de registros de representação do sistema linguístico para o gráfico.

Após esboçarem o gráfico, todos os grupos lançaram mão da mesma estratégia: estimar ao valor da área da região determinada por meio do cálculo da área de um triângulo. Para isso, realizaram um tratamento no registro gráfico, esboçando um triângulo para depois realizarem a conversão do registro gráfico para o algébrico, conforme ilustra a Figura 1.

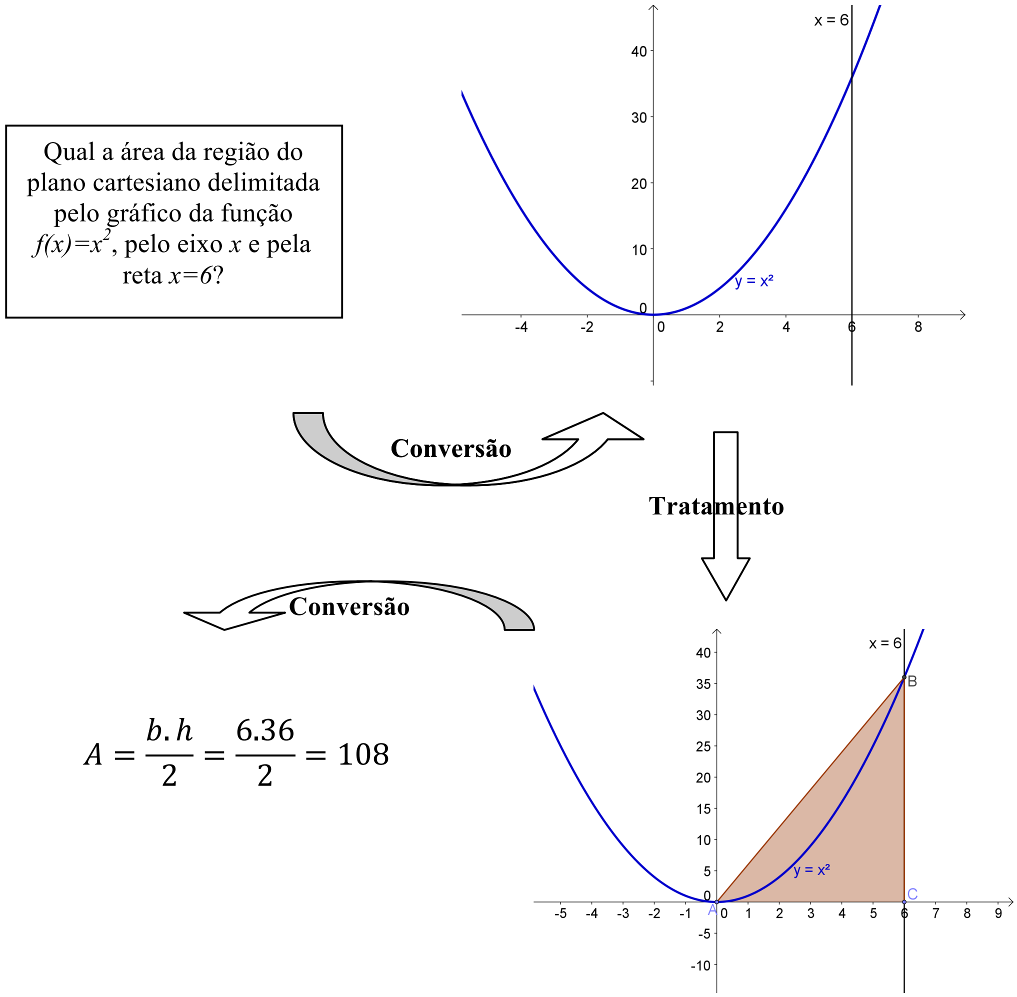
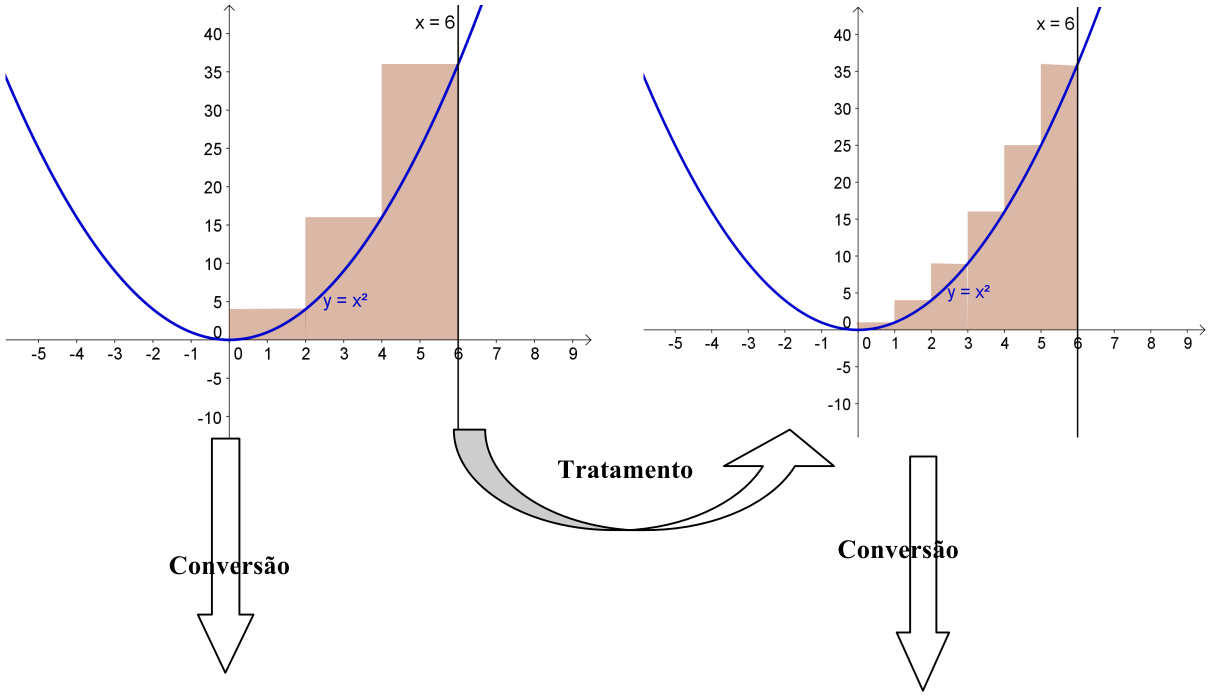


Figura 1. Conversões e tratamentos de registros de representações inicialmente utilizados pelos estudantes na investigação da questão.

Depois que o valor da área foi estimado por essa estratégia, os estudantes foram questionados: *é possível fazer uma estimativa "melhor"? Como?* Um deles disse: "*sim, podemos dividir essa região em dois triângulos, assim* [foi ao quadro e dividiu a área em duas figuras: um triângulo retângulo e um trapézio]. Nesse momento, percebeu que, na verdade, a divisão que propôs não resultaria em dois triângulos, mas sim em um trapézio e um triângulo. Então, outro estudante disse: "*agora complicou, pois a área do triângulo retângulo é fácil de calcular, mas do trapézio não*". Então, um aluno disse: "*professor, não dá pra calcular por retângulos?*". Nesse momento, os estudantes foram instigados pelo professor a discutir essa possibilidade em seus grupos para que tentassem fazer alguma estimativa do valor da área utilizando área de retângulos.

Alguns estudantes fizeram outro esboço do gráfico e fizeram novos tratamentos nesse registro - conforme Figura 2 – e posteriormente novas conversões para o registro algébrico a fim de estimar o valor da área. Para direcionar a investigação desta questão, os estudantes foram solicitados a completar uma tabela como a da figura seguinte, possibilitando uma nova conversão para o registro tabular.



Número de retângulos	Base de cada retângulo	Altura dos retângulos	Área de cada retângulo	Área total
3	2	4, 16, 36	8, 32, 72	112
6	1	1, 4, 9, 16, 25, 36	1, 4, 9, 16, 25, 36	91

Figura 2. Conversões entre registros de representação e tratamento gráfico utilizados pelos estudantes na investigação da questão.

Todos os estudantes optaram por dividir a região em retângulos de mesma medida de base, sendo que alguns optaram por utilizar retângulos inscritos totalmente na região e outros não. Um grupo de alunos dividiu a região em três retângulos de base 2 e alturas 4, 16 e 36 e estimaram o valor da área por meio desse processo (conforme Figura 2). Após socialização com a turma, foi sugerido que os estudantes fizessem o cálculo dividindo a área em 6 retângulos e depois em 12, esboçando o gráfico de cada situação e completando a tabela da Figura 2. Esse processo fez com que os estudantes pudessem realizar vários tratamentos e conversões entre registros de representação semiótica como o algébrico, o gráfico e o tabular.

Após calcularem a área da região, nesses casos, promoveu-se uma discussão sobre este processo de cálculo da área, de modo a instigá-los a generalizar o processo. Questionou-se os estudantes: *Generalize o processo para o cálculo da área dessa região no caso em que a região é dividida em um número n de retângulos*, o que fez com que as seguintes generalizações fossem feitas:

Número de retângulos	Base de cada retângulo	Altura dos retângulos	Área de cada retângulo	Área total
n	$\Delta x = \frac{6-0}{n}$	$f(c_i)$	$\Delta x. f(c_i)$	$\sum_{i=1}^{n} \Delta x. f(c_i)$

Figura3. Generalizações feitas pelos estudantes para o cálculo da área da região do plano cartesiano sob o gráfico da função

Em seguida, os estudantes foram questionados sobre o que acontecia com o valor da área estimada quando o comprimento da base de cada retângulo diminuía. Prontamente os estudantes disseram que o número de retângulos aumentaria e, consequentemente, o valor da soma das áreas desses retângulos estaria mais próximo do valor da área da região sob a curva, o que fez com que os estudantes pensassem se existe um valor de *n* para o qual a soma da área dos retângulos resulta no valor exato da área da região sob a curva. Um dos estudantes conjecturou *que quando* Δx *for zero, os retângulos vão estar todinhos "dentro" da região*. Essa conjectura foi imediatamente refutada por outro estudante ao dizer que *o valor de* Δx *não pode ser zero, porque daí chegaríamos que 6 é igual a 0. Também, se* Δx *for zero, a área dos retângulos será zero, o que não dá.*

Foi então que os estudantes foram instigados a pensar se era possível determinar um valor de Δx para o qual a soma das áreas dos retângulos fosse a área da região sob a curva. Um dos estudantes argumentou que cada vez que Δx se aproxima de zero, a soma do valor das áreas desses retângulos se aproxima do valor da área sob a curva. Então outro estudante disse "*professor, isso não tem a ver com limite? Quando* n *tender para infinito,* Δx *se aproxima de zero e os retângulos vão ficar cada vez mais coincidindo com a região*. Então, o professor, juntamente com os estudantes, converteram esse registro em um registro algébrico, de modo que as expressões seguintes foram escritas:

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i).\Delta x \quad (*) \qquad\qquad A = \lim_{\Delta x\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i).\Delta x$$

Em seguida, o professor e os estudantes determinaram o valor da área utilizando a expressão (*) e diversos tratamentos nesse registro algébrico, sendo que, para o intervalo [0,6], alguns tratamentos foram:

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i).\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (i\Delta x)^2 \Delta x = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.\left(\frac{6}{n}\right)^3 = 72\, u.a.$$

Feito isso, foi formalizado o conceito de integral definida como a área da região delimitada pelo eixo *x,* pelas retas *x=a* e *x=b* e pelo gráfico da função, se a função for positiva no intervalo [*a,b*]. Fazendo as substituições necessárias concluiu-se que

$$A = \lim_{||\Delta x||\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i).\Delta_i x \Leftrightarrow A = \int_a^b f(x)dx$$

Considerações finais

Neste artigo, foram feitas algumas reflexões sobre o processo de ensinar e aprender o conceito de integral definida a partir de tarefas que possibilitassem aos estudantes a oportunidade de não apenas realizarem tratamento de registros de representação, mas, sobretudo, conversões entre diferentes registros do objeto, uma vez que a literatura aponta que é por meio dessas conversões entre pelo menos dois registros de representação semiótica que os estudantes se apropriam dos conceitos matemáticos.

A escolha metodológica interferiu decisivamente nas relações entre professor, estudante e saber, gerando rupturas do contrato didático que revelaram as regras, algumas implícitas, que determinavam as relações entre os sujeitos da prática pedagógica. Após a renegociação, novos papeis foram definidos para os sujeitos e novas ênfases foram dadas as relações entre eles. O estudante e sua relação com o saber passam a ser a ênfase do processo de ensino e de aprendizagem, enquanto ao professor compete selecionar tarefas, orientar e direcionar resoluções e discussões que propiciem aos estudantes a realização de conversões e tratamentos entre registros de representação permitindo a apropriação do conceito.

Tal prática pedagógica opõe-se à prática mais comum entre professores de matemática, na qual cabe ao professor dar aulas expositivas, fornecer informações suficientes aos estudantes sobre partes do conteúdo previamente selecionado para que possa resolver exercícios propostos por ele a partir das informações dadas, enquanto que ao estudante, cabe a tarefa de ouvir atentamente as informações do professor e resolver os exercícios por ele propostos, que muitas vezes supervalorizam apenas tratamentos de um registro de representação de um objeto matemático, o que pode dificultar e até mesmo impedir a apreensão do objeto ou conceito matemático por parte do estudante

De acordo com as particularidades do curso e o tempo destinado às atividades presenciais, pode-se considerar que, apesar da tarefa, da sua resolução/discussão terem tomado quase quatro horas aula, o tempo não foi desperdiçado, pois pode-se considerar que os estudantes conseguiram se apropriar, de forma mais eficiente e sem grandes problemas, do conceito de integral definida, fazendo com que

$$A = \lim_{||\Delta x|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i).\Delta_i x \Leftrightarrow A = \int_a^b f(x)dx$$

deixe de ser "uma sopa de letrinhas" e passe a ter significado, entendida como uma das representações do objeto matemático em estudo.

Bibliografia e referências

Artigue, M. (2002). Analysis. In: D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking.* (pp. 167-198). New York: Kluwer Academic Publishers.

Ávila, G. (2006). *Análise Matemática para Licenciatura.* São Paulo: Blucher.

Azcátare. C., Casadevall, M., Casellas, E., & Bosch, D. (1996). *Cálculo Diferencial e Integral*. Madrid: Editora Síntesis S.A.

Damm, R. F. (1999). Registros de Representação. In: S. D. A. Machado et al., *Educação Matemática:* uma introdução. (pp. 135-153). São Paulo: EDUC.

Duval, R. (2003). Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: S. D. A. Machado. *Aprendizagem em Matemática*: Registros de Representação Semiótica. (pp. 11-34) Campinas: Editora Papirus.

Pais, L. C. (2005). *Didática da Matemática:* uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica.

Silva, B. A. (1999). Contrato Didático. In: S. D. A. Machado et al., *Educação Matemática:* uma introdução. (pp. 43-64). São Paulo: EDUC.

Vertuan, R. E. (2007). *Um olhar sobre a Modelagem Matemática à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica*. Dissertação de mestrado não-publicada, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, Brasil