



Mudança de registro semiótico como dificuldade na resolução de problemas que envolvem equações

Carolina Soares **Rodrigues**

Universidade Federal de Minas Gerais

Brasil

carolina.soares3@gmail.com

Airton **Carrião**

Colégio Técnico - Universidade Federal de Minas Gerais

Brasil

airtoncarriao@gmail.com

Resumo

Este trabalho tem como objetivo identificar as principais dificuldades encontradas por alunos de uma turma do 1º ano do Ensino Médio na mudança de registro semiótico na resolução de problemas que envolvem a utilização de equações do primeiro grau. Foram observados alunos de um colégio técnico vinculado a uma universidade federal, durante o trabalho de monitoria. Os dados foram obtidos através de observações das aulas, discussões das dúvidas com os alunos e análise de listas de exercícios e provas, baseando-se na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval. Percebemos que as maiores dificuldades que surgem no estudo de problemas envolvendo equações encontram-se no processo de conversão da linguagem natural para a simbologia matemática, o que envolve representar o número desconhecido e as operações sobre esse número para elaborar a equação.

Palavras chave: equações, semiótica, aprendizagem, linguagem matemática, conversão.

Introdução

Este trabalho tem como origem uma questão surgida no cotidiano da sala de aula. Sendo assim, todo seu desenvolvimento é uma tentativa de responder uma questão geral, que a primeira autora se colocou, sobre a aprendizagem de equações por alunos. A partir dessa questão inicial, seu interesse, já sob orientação do segundo autor, se concentrou na busca de identificar as

dificuldades encontradas por alunos do primeiro ano do Ensino Médio nas formas de registro escrito ao estudarem as equações, e como isso pode ser entendido a partir dos processos de representação semiótica em Matemática, mais particularmente nas mudanças de registro. Para realizar o trabalho foi observada uma turma da disciplina Matemática Elementar do Colégio Técnico da Universidade Federal de Minas Gerais (Coltec-UFMG), onde a primeira autora desenvolve o trabalho de monitoria.

Essa é uma disciplina oferecida apenas aos alunos que apresentam dificuldades em Matemática e tem o objetivo de retomar conteúdos do ensino fundamental que são importantes para o estudo da disciplina no ensino médio. A disciplina tem também como um objetivo secundário contribuir para a formação dos estudantes de Licenciatura em Matemática que atuam nela como monitores, compartilhando todas as atividades com os professores.

Um dos conteúdos abordados nessa disciplina é o estudo de equações algébricas lineares e quadráticas com uma variável, envolvendo não só a aplicação de procedimentos para encontrar as raízes das equações, mas também a resolução de problemas em que é necessário elaborar equações. Este é um dos temas em que os alunos apresentam mais dificuldade, o que acaba por refletir na disciplina de Matemática do primeiro ano, na qual estão, ao mesmo tempo, estudando funções.

Nas aulas da Matemática Elementar as dúvidas a respeito de como representar operações sobre uma incógnita eram frequentes, e podem ter origem em diversas situações: muitas vezes o aluno sabe representar uma operação sobre um número conhecido, por exemplo, “a metade de seis” como “ $6/2$ ”, mas não sabe representar a mesma operação sobre um número desconhecido x . Outras vezes o aluno sabe fazer a operação mentalmente para um número conhecido, mas não sabe representar a operação na forma escrita, o que torna muito difícil representá-la para um número x . Há ainda algumas situações em que o aluno não entende qual operação deve ser feita por causa da linguagem do problema. Assim, a questão da representação passou a ser a que mais despertou nosso interesse.

Ao fazermos um breve estudo sobre a pesquisa que estuda aprendizagem em Matemática, uma das teorias que nos pareceu mais interessante para compreender esse processo foi a dos registros de representação semiótica elaborada por Raymond Duval. Em particular no estudo de problemas envolvendo equações, pode-se perceber o quanto a questão da representação semiótica se faz presente. Com a análise dessas atividades desenvolvidas pelos alunos sob a perspectiva dos processos de representação semiótica, pretende-se compreender melhor quais são os principais desafios encontrados por eles e assim tentar apontar caminhos para enriquecer o processo de ensino e aprendizagem do conteúdo de equações na disciplina Matemática Elementar.

Os registros de representação semiótica

O referencial teórico em que se baseia este trabalho é a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, que caracteriza a forma como acontece a aquisição dos conhecimentos por meio das suas representações.

A utilização de um sistema de símbolos diferente da linguagem natural nem sempre esteve presente nos textos matemáticos. Durante a Antiguidade e Idade Média a escrita matemática baseava-se principalmente em retórica e argumentos geométricos, e somente no final do Renascimento a questão da representação se faz realmente presente na teoria do conhecimento ocidental (Flores, 2006). Observando particularmente a história das equações, percebe-se que no século XVI François Viète inaugura um simbolismo algébrico em que convencionava representar uma quantidade desconhecida por uma vogal e utilizar uma consoante para representar um número conhecido (Ribeiro, 2009). Com Descartes segue-se o desenvolvimento da linguagem simbólica na Álgebra, instaurando-se a separação entre o registro simbólico e seu significado. “Daí, o surgimento da duplicação dos objetos matemáticos enquanto objetos do pensamento e objetos representados.” (Flores, 2006).

Para ter acesso ao conhecimento matemático faz-se necessária a capacidade de lidar com suas representações. Dessa forma, o estudo da semiótica, que pode ser entendida como ciência dos signos (Pantoja, 2008), se coloca como uma ferramenta fundamental para compreender os processos de ensino e aprendizagem em matemática. Os sistemas de representação são constituídos pelos signos, que são a parte material da representação, cuja idéia envolve o objeto (o referente, a coisa representada), o símbolo (signo ou significante, sinal utilizado para representar) e o interpretante (o conceito mental, significado, referência) (Colombo, Flores & Moretti, 2007). O signo representa um objeto – algo que pode ser concreto ou abstrato – para alguém, e relaciona-se com o objeto representado por meio de uma convenção. (Flores, 2006). No caso dos objetos matemáticos, que são abstratos, pode-se assumir sua existência ideal e considerar que a forma de ter acesso a esses objetos é através das suas representações semióticas (Colombo et al, 2007). Além disso, é necessário tratar da distinção entre sentido e referência. Cada representação produz um sentido, ou seja, um conteúdo da representação que apresenta propriedades e características do objeto representado, mas não o objeto na sua totalidade. O sentido depende do registro escolhido para representar e a referência depende do objeto representado. Assim, representações diferentes de um objeto tem a mesma referência, mas não o mesmo sentido (Colombo et al, 2007). Na teoria de Duval, os signos matemáticos são chamados de registros de representação semiótica, e é de fundamental importância para o aprendizado em matemática que ocorra a distinção entre o objeto e sua representação. E isso depende da capacidade de transitar e coordenar registros diferentes de um mesmo objeto (Colombo et al, 2007). Os registros de representação podem passar por dois tipos de transformações: tratamentos e conversões. Na primeira o processo acontece dentro do mesmo tipo de registro, não há mudança no sistema de representação. Já a conversão é o processo de mudar o sistema de registro conservando a referência. Assim, a conversão não deve ser confundida com tratamento ou simplesmente codificação (Pantoja, 2008). Um exemplo de tratamento seria transformar $\frac{2}{4}$ em $\frac{1}{2}$ e de conversão seria transformar $\frac{1}{2}$ em 0,5. De acordo com Moretti (2002), as transformações podem ter custos cognitivos distintos, tanto nos tratamentos, dependendo do tipo de registro utilizado, quanto nas conversões, dependendo do grau de congruência entre os registros. A compreensão de um objeto matemático se dá quando são percorridas três etapas na atividade cognitiva: criar a representação, escolhendo-se um registro; efetuar o tratamento, que corresponde a transformar a representação usando-se o mesmo tipo de registro; e realizar a conversão, ou seja, coordenar as diferentes formas de registro de um mesmo objeto. De acordo com a teoria dos registros de representação, é a atividade de conversão que permite compreender o objeto, ter acesso ao conhecimento (Pantoja, 2008).

Neste trabalho, o objeto que está sendo tratado pelos alunos são equações do primeiro grau com uma incógnita.

Metodologia

O trabalho foi desenvolvido com a observação de uma turma da disciplina Matemática Elementar, em que alunos do primeiro ano do Colégio Técnico da UFMG estudam alguns conteúdos do Ensino Fundamental que são importantes para trabalhar com os conceitos de Matemática do Ensino Médio.

A seleção dos alunos que deverão cursar a Matemática Elementar é feita através de uma avaliação diagnóstica composta de dois testes, realizados, com um intervalo de duas semanas, no início do ano. Após os testes, se necessário, é realizada uma entrevista pelo professor. A disciplina é dividida em quatro módulos com os seguintes temas: (1) Frações, (2) Porcentagem, Razão e Proporção, (3) Equações e (4) Potenciação, que são estudados nessa ordem, através de listas de exercícios que os alunos devem resolver em aula e em casa. As listas exploram os erros mais recorrentes detectados na avaliação diagnóstica, bem como os problemas extraídos da bibliografia que estuda a aprendizagem em Álgebra. Nas aulas semanais os alunos resolvem, individualmente ou em grupo, os exercícios propostos nas listas, tendo, quando julgar necessária, a orientação do professor ou do monitor. O aluno desenvolve as atividades no seu ritmo, passando de uma lista para a outra, ao completar as referentes a um determinado módulo realiza uma avaliação que determina se ele poderá iniciar o seguinte.

As atividades de monitoria, referentes a este trabalho, foram desenvolvidas de junho a dezembro de 2010. A monitora além de atuar em sala de aula, compartilhando as atividades com o professor, tinha como funções oferecer plantões semanais onde os alunos discutem suas dúvidas e participar da elaboração e correção das listas de exercícios e provas. Eram também realizadas reuniões periódicas para se discutir o desenvolvimento das atividades, dessa forma, tanto professor como monitor tinham um acompanhamento muito próximo do desenvolvimento de cada aluno.

A turma observada possuía 34 alunos, destes 24 tiveram as listas analisadas neste trabalho, pois os demais ainda não estavam trabalhando no módulo 3, Equações, nosso foco, quando a investigação teve início. A turma era composta dos alunos que apresentaram menor dificuldade na avaliação diagnóstica. As aulas são exclusivamente baseadas em atividades, não havendo aulas expositivas, de sistematização nem de correção. Essa opção se dá pelo fato de que os conteúdos em questão são comumente trabalhados no Ensino Fundamental, desta forma acredita-se que os alunos do primeiro ano do Ensino Médio já tiveram um contato anterior com eles. Além disso, os alunos desenvolvem as atividades seguindo um ritmo próprio e quando solicita à ajuda do professor ou monitor, esta se dá de forma individual ou em pequenos grupos.

Esse acompanhamento individualizado das atividades em aula, bem como correção das listas de exercícios e provas desses alunos, nos revela as mudanças na relação que eles estabelecem com os conteúdos trabalhados. Notamos que ao fazerem as listas de exercícios os alunos enfrentam um questionamento sobre o conhecimento que tinham do tema e sentem a necessidade de buscar novas compreensões.

Para a realização deste trabalho, inicialmente observou-se quais dúvidas surgiam com mais frequência entre os alunos que estavam estudando o módulo sobre equações, de acordo com o atendimento realizado nas aulas e plantões. A partir disso, foram analisadas as listas de exercícios que os alunos fazem em casa e as provas, buscando identificar quais as questões que traziam uma maior incidência de erros nas resoluções e que tipos de erros eram mais comuns. Em seguida, as questões foram organizadas de acordo com a semelhança entre o objeto dos enunciados, e cada resolução foi analisada tendo como suporte a teoria dos registros de representação semiótica.

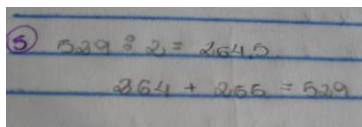
Aqui, apresentaremos uma primeira análise que estamos realizando a partir do material coletado e sistematizado, tentando caracterizar alguns problemas identificados na utilização de símbolos matemáticos na resolução de equações.

Resultados

Vamos a seguir apresentar as questões que trouxeram maior dificuldade para os alunos resolverem. Elas fazem parte das listas de exercícios do módulo 3, sobre equações, que os alunos resolvem em casa. Essas listas foram corrigidas pela monitora e devolvidas aos alunos, porém, antes foram analisadas e copiadas eletronicamente. O número variável de questões resolvidas decorre do fato de nem todos os alunos responderem a todas as questões.

Lista 1, questão 5: Existem dois números inteiros consecutivos cuja soma é igual a 529. Quais são esses números?

Essa questão foi resolvida por 21 alunos, dos quais 18 acertaram, sendo que entre estes, 2 resolveram sem elaborar uma equação, como mostrado na figura 1.

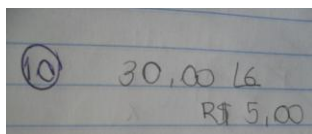


Handwritten solution for question 5: $529 \div 2 = 264,5$ and $264 + 265 = 529$.

Figura 1. Uma resolução da questão 5.

Lista 1, questão 10: Tenho a seguinte escolha: ou compro 20 unidades de um produto com todo o dinheiro que tenho, ou compro apenas 14 unidades e ainda me sobra um troco de 30 reais. Qual o valor unitário deste produto?

Essa questão foi resolvida por 17 alunos, sendo que 14 acertaram, e entre estes 2 resolveram sem montar uma equação, como na figura 2.



Handwritten solution for question 10: $30,00 / 6$ and $R\$ 5,00$.

Figura 2. Uma resolução da questão 10.

Lista 3, questão 10: Uma casa com 260m^2 de área construída possui 2 quartos de mesmo tamanho. Qual é a área de cada quarto, se as outras dependências da casa ocupam 140m^2 ?

Dos 20 alunos que resolveram essa questão 18 acertaram, sendo que entre estes 11 não elaboraram uma equação, como pode ser visto na figura 3.

Handwritten solution for question 10: $260\text{m}^2 - 140\text{m}^2 = 120\text{m}^2$. Then, $120 \div 2 = 60\text{m}^2$ cada quarto.

Figura 3. Uma resolução da questão 10.

Lista 3, questão 4: Considere a seqüência de operações aritméticas na qual cada uma atua sobre o resultado anterior: comece com um número x . Subtraia 2, multiplique por $3/5$, some 1, multiplique por 2, subtraia 1 e finalmente multiplique por 3 para obter o número 21. Qual o valor de x ?

Essa questão foi resolvida por 22 alunos, e 13 acertaram. Em quase todas as resoluções com erros a equação foi elaborada como mostrado na figura 4.

Handwritten solution for question 4: $x - 2 \cdot \frac{3}{5} + 1 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = 21$
 $x - \frac{6}{5} + 2 - 3 = 21$
 $5x - 6 + 10 - 15 = 105$

Figura 4. Uma resolução da questão 4.

Lista 3, questão 8: A diferença entre um número e dois quintos de sua metade é 15. Que número é esse?

Nessa questão o índice de acertos foi 15 em 23. Em quase todas as resoluções com erros a equação foi elaborada como mostrado na figura 5.

Handwritten solution for question 8: $x - \frac{2x}{5} = 15$
 $x - 2x = 15 \cdot 5$
 $x = 75$

Figura 5. Uma resolução da questão 8.

Discussão dos resultados

Ao observar as questões apresentadas acima, podemos perceber que todas podem ser resolvidas com a formulação de equações e cálculo de suas raízes. Podemos observar que de acordo com a teoria dos registros de representação semiótica, para a resolução das atividades propostas, da forma intencionada pelo professor, os alunos deveriam percorrer as três etapas da atividade cognitiva citados anteriormente, ou seja, criar uma representação, efetuar o tratamento e realizar a conversão. A criação de um registro é intrínseca à resolução escrita. A conversão ocorre quando se realiza a mudança no sistema de representação utilizado no enunciado, a linguagem natural, para a simbologia matemática utilizada na resolução, ou seja, transformar uma frase em uma expressão algébrica. O processo de tratamento se realiza nas várias transformações, usando o mesmo tipo de registro, necessárias durante o processo de resolução da equação até se encontrar a solução. Há ainda o retorno à linguagem natural no registro da resposta.

Nas três primeiras questões que destacamos acima, o índice de acertos foi alto, e entre os alunos que acertaram, o que nos chama a atenção é que alguns resolveram os problemas sem a utilização de uma equação, mesmo que as atividades sejam do módulo sobre equações, o que já sugere esse tipo de resolução. Essa estratégia diferente de solução, mesmo que chegando a resultados iguais, nos revelam compreensões diferentes do conceito de equação por parte desses alunos. Os alunos que resolveram utilizando equação realizaram a atividade de conversão, o que revela a compreensão do objeto, equações, (Pantoja, 2008), superando a estratégia aritmética. Já os alunos que não montaram as equações resolveram o problema através de uma seqüência de operações aritméticas, cujo resultado é o número procurado, ou seja, escolheram uma estratégia de resolução que não envolve a representação de incógnitas através de letras. Esses alunos criaram uma representação numérica e efetuaram o tratamento dentro desse tipo de registro. A resolução está correta, mas não acontece a conversão da linguagem natural para simbólica das equações, que seria o objetivo intencionado pelo professor. A escolha desses alunos pela resolução aritmética revela que esta foi a forma mais adequada que encontraram para resolver o problema, porém, dessa forma não realizaram a atividade de conversão pretendida. Essa estratégia pode indicar uma dificuldade em fazer a conversão da linguagem natural para a simbólica, ou seja, em atribuir uma letra para representar um número desconhecido. Não podemos descartar a possibilidade do aluno saber resolver o problema também na forma algébrica, mas considera que no caso a resolução aritmética é mais simples e adequada ao problema e por isso escolhe utilizá-la, o que seria um resultado satisfatório, já que o aluno demonstra maturidade suficiente para escolher qual ferramenta é melhor para resolver determinado problema matemático. Essa variação revelaria, segundo Colombo et al (2007), uma boa capacidade de transitar e coordenar registros diferentes de um mesmo objeto. Esse cruzamento das informações não nos foi possível devido a forma de registro das respostas que realizamos, onde os recortes não nos permitiram fazer uma análise das respostas de cada aluno, o que estava fora de nossa estratégia original.

Nas outras duas questões destacadas, o índice de acertos foi um pouco menor, e a maior parte dos erros acontece no processo de elaborar a equação. Os alunos montam equações, porém, estas não correspondem ao enunciado dado, ou seja, fazem uma conversão incorreta da linguagem natural do enunciado para a linguagem simbólica da equação.

No primeiro caso, exemplo da figura 4, o aluno fez uma tradução literal do que o enunciado propunha, não levando em conta a informação que cada operação aritmética atua sobre o resultado da anterior. Esse erro revela que o aluno apesar de fazer uma mudança de registro parcialmente adequada, ao não considerar todas as informações do enunciado, produziu, na conversão, uma nova frase. Esse problema pode ser resultado dessa conversão não ser direta, termo a termo, e, portanto, apresentando um maior grau de dificuldade.

No segundo caso, figura 5, nota-se que a conversão realizada somente incorre em erro quando o aluno representa dois quintos do número, ou seja, não considera a informação de que eram dois quintos de sua metade. Outra vez, notamos que a dificuldade surge quando os comandos têm uma relação de dependência, determinando uma ordem das ações, o que novamente foi ignorado na solução. Neste caso, verifica-se também que houve erro na resolução, revelando problemas também de transformação.

Em ambos os casos nota-se que o aluno representou o valor que desejava descobrir por x , mas teve dificuldades em representar operações realizadas sobre esse número x , ignorando informações que criavam uma certa dependência da ordem das ações, o que compromete a conversão.

O fato de, muitas vezes, as equações montadas incorretamente serem resolvidas de forma correta, nos revelam que mesmo alunos que têm dificuldades em realizar a conversão, não as tem ao realizar o tratamento das equações. Portanto, podem não ter uma boa compreensão do objeto, mesmo tendo habilidade em resolver equações.

Conclusões

Através da análise das questões destacadas e da observação dos alunos em sala de aula pode-se perceber que as principais dificuldades que surgem no estudo de problemas envolvendo equações encontram-se no processo de conversão da linguagem natural usada no enunciado do problema para a simbologia matemática utilizada nas estratégias de solução de equações, ou seja, a questão central é como um texto em linguagem natural se transforma em uma equação.

Para superar essa dificuldade é necessário que o aluno reconheça a possibilidade de utilizar uma equação como uma estratégia eficiente para resolver o problema. A seguir ele deve identificar os elementos principais do enunciado como, por exemplo, qual é o número a ser descoberto, e criar uma representação para fazer a conversão dos registros.

Vimos, porém, que alguns alunos não se utilizam deste processo e resolvem o problema através de operações aritméticas, o que sugere que há alunos que ainda se sentem pouco à vontade em resolver problemas utilizando representações algébricas, o que pode tornar muito mais difícil o estudo de alguns conteúdos do ensino médio, como por exemplo, as funções. Mesmo quando os alunos tentam resolver os problemas através de equações, surgem grandes dificuldades em relação à representação de operações sobre uma incógnita. De acordo com a teoria dos registros de representação semiótica, a atividade de conversão, ou seja, a mudança do sistema de representação, é fundamental para o aprendizado de um objeto matemático. Assim, a resolução de problemas envolvendo a conversão da linguagem natural para equação, é muito

importante para o estudo das equações, e mostra como a construção de uma simbologia algébrica se tornou uma ferramenta poderosa para a resolução de muitos problemas matemáticos.

Este é um estudo ainda inicial que se concentrou nos processos de conversão, explorando pouco os problemas envolvendo o tratamento de equações para encontrar suas raízes. Pretendemos dar continuidade a este trabalho dando atenção a esse ponto e fazer um estudo longitudinal, acompanhando o desenvolvimento de alguns alunos percebendo suas mudanças em relação a representação, ao tratamento e a conversão dos registros semióticos na resolução de equações.

Bibliografia e referências

- Colombo, J. A. A., Flores, C. R. & Moretti, M. T. (2007). Reflexões em torno da representação semiótica na produção do conhecimento: compreendendo o papel da referência na aprendizagem da matemática. *Educ. Mat. Pesqui.*, 9(2), 181-203. Disponível em <http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/viewFile/901/594>
- Flores, C. R. (2006). Registros de representação semiótica em matemática: história, epistemologia, aprendizagem. *Bolema*, 19(26), 77-102. Disponível em: http://www.ced.ufsc.br/claudiaflores/PESQUISA/textos_publicados/Registros_de_representacao_semiotica_em_matematica_historia_epistemologia_aprendizagem.pdf
- Moretti, M. T. (2002). O papel dos registros de representação na aprendizagem de matemática. *Contrapontos*, 2(6), 423-437. Disponível em: <https://www6.univali.br/seer/index.php/rc/article/viewFile/180/152>
- Pantoja, L. F. L. (2008). *A conversão de registros de representações semióticas no estudo de sistemas de equações algébricas lineares*. (Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Pará). Disponível em: http://www.ufpa.br/ppgecm/media/Dissertacoes_Ligia%20Francoise%20Lemos%20Pantoja.pdf
- Ribeiro, A. J. (2009). A noção de equação e suas diferentes concepções: uma investigação baseada em aspectos históricos e epistemológicos. *R.B.E.C.T.*, 2(1), 70-86. Disponível em: <http://www.pg.utfpr.edu.br/depog/periodicos/index.php/rbect/article/viewFile/312/278>
- Rosa, C. C. (2009). Os registros de representação semiótica e a modelagem matemática: a realização de conversões em uma atividade no ensino médio. *Diálogos & Saberes*, 5(1), 111-124. Disponível em <http://www.fafiman.br/seer/index.php/dialogosesaberes/article/viewFile/38/32>
- Souza, R. N. S. & Cordeiro, M. H. (2002). Os registros de representação como ferramenta do pensamento na resolução de problemas matemáticos que envolvem o conceito de função linear. *Contrapontos*, 2(6), 423-437. Disponível em <https://www6.univali.br/seer/index.php/rc/article/viewFile/186/158>