

Características del talento matemático asociadas a la visualización

William **Jiménez** Gómez
Profesor Instituto Pedagógico Nacional
Colombia

williamajg@hotmail.com

Sandra Milena **Rojas** Tolosa
Profesora Fundación Gimnasio Los Portales
Colombia

rojastolosa@yahoo.com.ar

Lyda Constanza **Mora** Mendieta
Profesora Universidad Pedagógica Nacional
Colombia

lmendieta@pedagogica.edu.co

Resumen

Se presenta brevemente las relaciones halladas entre características del talento matemático y el proceso de visualizar en contextos algebraicos, a partir de la interpretación de soluciones a problemas presentadas por estudiantes entre 13 y 16 años nominados como talentosos en matemáticas que participaron en un proyecto de intervención en la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia durante el año 2009. Se encontró que la solución de problemas de visualización es un medio recomendable para la identificación del talento matemático porque da cuenta características del talento matemático y, procesos y habilidades de la visualización. Este documento es una síntesis de la tesis elaborada por los autores para optar al título de Magíster en Docencia de la matemática en la Universidad Pedagógica Nacional.

Palabras clave: Talento matemático, visualización, álgebra, procesos, habilidades.

Planteamiento del problema

El trabajo se desarrolló bajo en el enfoque *interpretativo* y se fundamentó en la investigación “*El Club de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional: Un espacio para identificar talentos matemáticos*”, financiada por el Centro de Investigaciones de la Universidad Pedagógica Nacional (CIUP) desarrollada en durante el 2008 y 2009. En el marco de esta investigación se diseñó un curso para el primer semestre del 2009 y como uno de los resultados más destacados emergieron algunas cuestiones problemáticas que dieron origen al tema objeto de estudio que se abordó en la tesis de maestría, cuya pregunta de investigación fue:

¿Cuáles son las relaciones existentes entre características de talento matemático y la visualización, que se pueden identificar en estudiantes del Club de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional cuando resuelven problemas en contextos algebraicos?

Antecedentes

Los antecedentes atendieron a dos grandes campos: El talento matemático y la visualización, específicamente la visualización en contextos algebraicos, en los que se reconoció la importancia de la resolución de problemas como un elemento importante para su estudio.

Haciendo una revisión bibliográfica se encontraron investigaciones que asocian la visualización y el talento matemático, estas son:

La investigación realizada por Norma Presmeg (1986) titulada *Visualization and Mathematical Giftedness*, en la cual se caracterizaron estudiantes con altas capacidades en uno de los tres siguientes grupos:

- *Visualizadores*. Sujetos para quienes el elemento visual es dominante, los problemas abstractos se resuelven visualmente.
- *No visualizadores*. Sujetos para quienes el elemento abstracto es dominante, los problemas geométricos se resuelven analíticamente.
- *Armónicos*. Sujetos para quienes el elemento visual y analítico están en equilibrio.

Clasificación que fue sugerida en 1931 por Haeker y Ziehen (1931, citados en Presmeg, 1986) y utilizada también por Krutetskii (1976), quien trabajó en temas como la estructura matemática de la superdotación y constituye una fuente relevante para Presmeg obteniendo como resultado que los estudiantes nominados por sus profesores como *stars* tienen una marcada tendencia a usar estrategias de solución de tipo analítico.

Otra investigación fue la realizada por Ryu, Chong y Song (2007) titulada *Mathematically Gifted Students Spatial Visualization Ability of Solid Figures* cuyo propósito fue analizar la capacidad de visualización espacial de los estudiantes de la escuela elemental caracterizados como superdotados para las matemáticas mediante tareas que les exigen distinguir los componentes pertinentes de un objeto tridimensional a partir de su representación bidimensional por manipulación y rotación mental. Ryu y sus colaboradores parten de la definición de visualización en matemáticas (mental o física) propuesta por Gutiérrez (1991), actividad de razonamiento basada en el uso de elementos visuales o espaciales y, de la definición de McGee (1979 citado en Ryu, Chong y Song, 2007), capacidad para manipular, girar, cambiar la posición (en la mente) de un objeto representado como una imagen, en otras palabras, la capacidad de usar la imagen mental, para rotar, arreglar o manipular un objeto representado. Sin embargo, son enfáticos en apuntar que el significado de la visualización espacial también puede ser interpretado de manera diferente de acuerdo con el punto de vista de cada investigador.

En cuanto a las investigaciones cuya temática central es la visualización, se encuentra que éstas, por lo general, se hallan enmarcadas en la geometría como se puede observar en los trabajos realizados por Presmeg (2006) y Souto (2009), un ejemplo de ello es la investigación de Gutiérrez (1991) titulada *Procesos y Habilidades en Visualización Espacial* que se realizó a finales de la década de los 80, en la cual diseñó actividades basadas en un marco teórico que retoma resultados de varios investigadores como Presmeg (1986), Bishop (1989 citado en Gutiérrez, 1991) y de Del Grande (1990), quienes describen habilidades, procesos y tipos de imágenes que se relacionan con la visualización. Gutiérrez (1991) centra este trabajo en lo que él denomina el elemento básico de todas las concepciones de la percepción visual: *las imágenes mentales* y lo justifica por la importancia de la percepción para las actividades de la vida y el aprendizaje escolar de la geometría.

Por su parte, Seguí (1995) trabajó con una muestra de 65 alumnos entre los 14 y 16 años de edad que habían estudiado los contenidos usuales de álgebra desde una óptica estrictamente analítica, 36 en el programa de matemáticas del ciclo superior y 29 conocían los contenidos

fundamentales; el objetivo de su estudio fue clasificar los sujetos de la muestra en analíticos, visuales o armónicos. Este trabajo sugiere la posibilidad de interpretar los elementos relacionados con la visualización desde un punto de vista algebraico resultado que se mostrará más adelante.

Las investigaciones que se han realizado en cuanto al talento matemático se han enmarcado en uno de tres focos: la caracterización de sujetos con talento, la identificación de talento y programas de intervención de estudiantes talentosos (Castro, 2008). Ejemplos de investigación ubicadas en el primer foco son las de Krutetskii (1976), Greenes (1981 citado en Pasarín y Feijoo, 2005) y Tourón (1998 citado en Pasarín y Feijoo, 2005); éstas aportaron un conjunto de características que determinan el talento matemático. Dentro del segundo foco, una de las investigaciones más recientes es la de Díaz, Fernández, Sánchez y Pomar (2008) titulada *Talentos Matemáticos: Análisis de una muestra*, cuyo propósito fue seleccionar estudiantes que participarían en un programa de estimulación del talento matemático (Estalmat). Por su parte, Maryorie Benavides Simon (2008) en su tesis doctoral titulada *Caracterización de Sujetos con Talento Matemático en Resolución de Problemas de Estructura Multiplicativa*, encontró que algunas de las características de los estudiantes talentosos en matemáticas que se pueden identificar cuando los estudiantes resuelven problemas de estructura multiplicativa son: empleo con facilidad de diferentes sistemas de representación, alto compromiso con la tarea (especialmente en problemas difíciles), alto nivel de control de la solución de los problemas (planificación), alta creatividad en la formulación de soluciones y, finalmente concluye que los estudiantes con talento, no son un grupo homogéneo y por tanto, manifiestan diferentes formas de solución y dificultades al resolver un problema.

Fundamentación Teórica

Dado que el tema de interés está enfocado al talento en matemáticas, inicialmente se presentan algunos referentes teóricos sobre esta temática. Por otra lado, algunas investigaciones realizadas sobre talento en matemáticas suelen estar enmarcadas en un campo específico (ver por ejemplo, Benavides, 2008), en este caso, el tema central es la visualización en álgebra, por tal razón el segundo apartado está compuesto por referentes teóricos que pretenden presentar aspectos generales que están asociados a este término.

Talento matemático

A través de la historia la definición del término talento ha tenido grandes variaciones, desde considerarlo como un hechizo de fuentes ajenas a este mundo, hasta considerar que el talento es más que simples aptitudes cognitivas, que es posible fomentar y formar.

Aunque en busca de una definición concreta del término talento se han desarrollado diversos modelos y enfoques teóricos, en este documento solamente se hará referencia a algunos modelos que están directamente relacionados con el talento en matemáticas, dado que sobre este tema existe poca literatura, contrario a lo referente al talento en general (ver por ejemplo, Benavides, 2008; Benavides, Martínez & Villarraga, 2004; Jiménez, 2002).

Modelo de la Creatividad. En el año 1960, Guilford propuso su modelo de intelecto en el marco de los modelos factoriales que pretendía catalogar y dar un marco de referencia más alto a la propuesta de Thurstone. Guilford (1967 citado en Peña del Agua, 2004) conceptualizó la inteligencia como un perfil de aptitudes distintas. Se considera que este modelo describe en parte

el talento matemático puesto que dentro de sus dimensiones se encuentran aspectos que son comunes en la actividad matemática como lo son: los contenidos visuales y simbólicos, la memoria, la producción convergente y divergente.

Talento Matemático de Stanley. La teoría de Stanley resulta ser novedosa, aunque antigua pero vigente, por centrarse en un campo determinado y por proponer un modelo de identificación e intervención para niños talentosos en matemáticas. Julián Stanley, a finales de la década de 1960 y a comienzos de la de 1970, desarrolló el modelo “Diagnostic Testing Prescriptive Instruction” para identificar en los estudiantes con talento matemático, fortalezas y debilidades y, señalar aspectos que necesitan trabajar (Tourón J. y Tourón M., s.f.).

Modelo Sociocultural. Aunque este modelo no es específico para el talento matemático, se considera que es un complemento para los modelos que han sido descritos anteriormente puesto que concede importancia al contexto sociocultural. Desde este modelo la superdotación y el talento sólo pueden desarrollarse por medio del intercambio favorable de factores individuales y sociales, además que es el contexto social el que define cuándo alguien es talentoso. Uno de los primeros representantes de este modelo es Abraham Tannenbaum, cuya idea principal es que se tiene que dar una coordinación perfecta entre el talento específico de la persona, un ambiente social favorable que le permita desarrollarlo y la capacidad de la sociedad para valorarlo; es decir, es la sociedad quien valida si un producto de una persona lo hace ser considerado como talentoso (Sánchez, 2006).

La relación entre el individuo y los factores que determinan el talento matemático, enmarcados en el modelo sociocultural se relacionan en la figura 1:

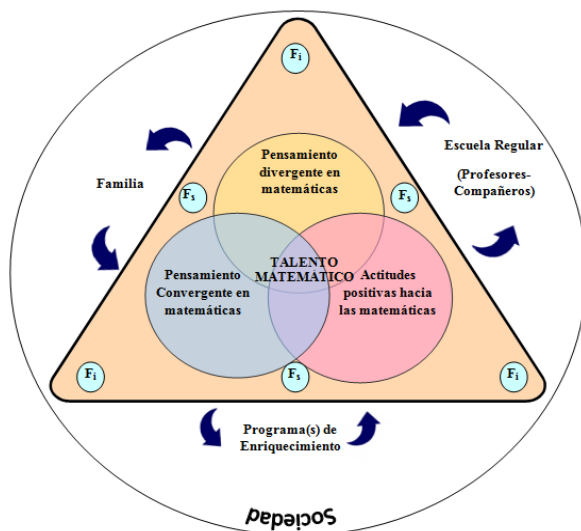


Figura 1. Componentes del talento matemático. Tomado de Mora et al. (2009, p.59).

Dentro de los factores sociales se encuentran la familia, la institución educativa y programas de intervención de estudiantes talentosos en matemáticas.

Caracterización del talento matemático

Las caracterizaciones de talento matemático que se han realizado, en su mayoría están relacionadas con la capacidad para resolver problemas. La primera clasificación fue la realizada

por Werdelin (1958 citado en Krutestkii, 1976), la cual fue base para el estudio de Krutestkii. La propuesta de Werdelin consistió en el análisis de la estructura de la capacidad matemática de los escolares, estableciendo el papel relativo de cada uno de los factores establecidos en estudios psicológicos de la escuela de Thurstone y la relación de la capacidad matemática con la inteligencia en general. Teniendo en cuenta que la capacidad matemática se relaciona con la capacidad para resolver problemas, este autor establece la siguiente definición de capacidad matemática:

La capacidad matemática es la habilidad para comprender la naturaleza de las matemáticas, problemas, símbolos, métodos y reglas; la aptitud de para aprenderlas, retenerlas en la memoria y reproducirlas; para combinarlas con otros problemas, símbolos, métodos y reglas; y la competencia para emplearlas en la resolución de tareas matemáticas (Werdelin, 1958 citado en Krutestkii, 1976, p. 24)

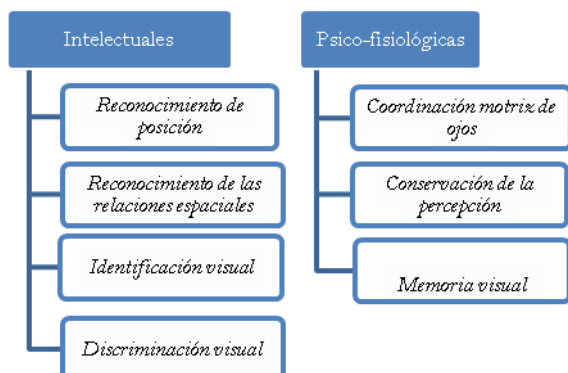
Una propuesta de caracterización del talento en matemático que recoge las propuestas de diversos autores se puede encontrar en Mora et al. (2009).

Visualización en álgebra

La idea en la cual se basa este trabajo al referirse a la visualización, teniendo en cuenta ideas plasmadas desde investigaciones consultadas correspondientes a la Educación Matemática (Bishop (1983), Presmeg (1986), Arcavi (1999), Duval (1998, 1999)), es:

Visualización: Se refiere al conjunto de procesos y habilidades de los sujetos para formar, trazar y manipular imágenes mentales o físicas, usándolas efectivamente para establecer relaciones entre objetos matemáticos. (Arcavi, 1999; Duval, 1999; Carrión, 1998)

En cuanto a las habilidades, se describen las consideradas por Del Grande (1990) y que Gutiérrez (1991) identifica como las habilidades utilizadas por los sujetos para la creación y procesamiento de imágenes visuales, él también las clasifica en dos tipos: psico-fisiológicas e intelectuales (esquema 1)



Esquema 1. Clasificación de las habilidades propuestas por Gutiérrez (1991)

En cuanto a los procesos relativos a la visualización, Bishop (1983), establece dos tipos de procesos:

Procesamiento visual (VP). Proceso de cambio de información abstracta en imágenes visuales (un ejemplo se muestra en la figura 2) o de imágenes visuales ya formadas, en otras (un ejemplo se presenta en la figura 3).

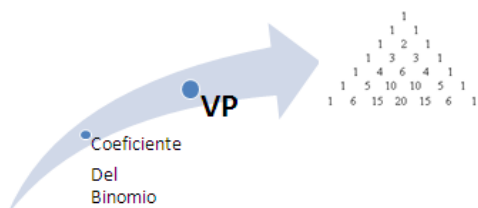


Figura 2. Procesamiento visual de información en imágenes

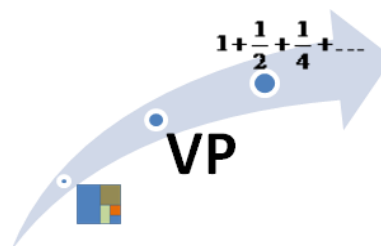
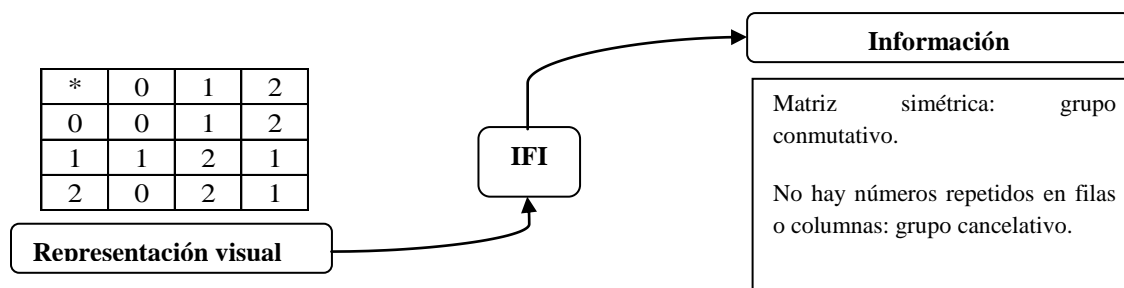


Figura 3. Procesamiento visual de imagen en imagen.

Interpretación de información figurativa (IFI). Proceso de comprensión e interpretación de representaciones visuales con el objetivo de extraer la información que contienen. Por ejemplo:



Esquema 2. Ejemplo de interpretación de información figurativa

Diseño, Metodología y Resultados

Durante el desarrollo del curso que estaba compuesto por 8 hombres y 10 mujeres, cuyas edades oscilan entre los 13 y 16 años, teniendo 15 años la mayoría y uno 13 años, la mayoría de los niños ya han participado en el Club en semestres anteriores (14 de los 18), por supuesto en diferentes cursos, se utilizaron diferentes instrumentos para la recolección de información sobre el desempeño de los estudiantes del curso, uno de ellos fue el registro en video de cada una de las actividades desarrolladas en el aula. Este instrumento se constituyó en la base para la realización de este trabajo de la tesis; así, se realizó un análisis de los videos de clase para lo cual (i) se seleccionaron los videos a ser observados, (ii) se realizó una descripción general de los momentos en donde se evidenciaba la característica *visualización* en la presentación de la solución de los problemas planteados a los estudiantes, (iii) se hizo la descripción particular de los videos y, por último, (iv) se eligieron las transcripciones de los videos en cuestión.

Finalmente se recurre al análisis de las transcripciones seleccionadas para establecer cuáles características de talento matemático están relacionadas con los elementos de la visualización y ejemplificar cada una de las relaciones.

De la información recopilada sobre las frecuencias de todas las características de talento matemático, así como los elementos de la visualización que se pueden evidenciar cuando los estudiantes (de la muestra) resolvieron problemas de generalización. En la figura 4, se muestra que para el caso de los estudiantes M, E, N y C, el comportamiento de la presencia de las características de talento matemático y de los elementos propios de la visualización es

homogéneo. Es decir, se infiere que existe alguna relación entre las características de talento matemático y las habilidades y procesos de la visualización.

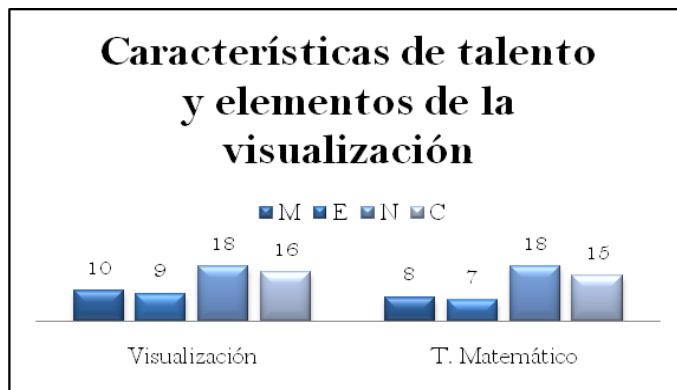


Figura 4. Frecuencias de características de talento matemático y elementos de la visualización

Las frecuencias de las características de talento matemático que se relacionan con la visualización, las que tuvieron frecuencias más altas fueron Capacidad para generalizar, lo que no fue ninguna sorpresa pues, en su mayoría, los problemas propuestos a los estudiantes estaban enfocados a procesos de generalización y, en orden descendente las características con mayores frecuencias son: 1.3.1.2 (Hacer procesos de análisis a partir de asociaciones innovadoras, descomponer el todo en sus partes) y 2.2 (Capacidad para organizar la información).

De acuerdo con los resultados mencionados anteriormente, se concluye que los procesos y habilidades, asociadas a la visualización, que están relacionados con las tres características de talento matemático 1.3.1.2, 2.5, 2.2, resultantes de esta investigación, son: *identificación visual* ($Iv2$), *discriminación visual* (Dv) y *procesamiento visual* (VP) respectivamente. En la Figura 5 aparece un diagrama que muestra el comportamiento de las frecuencias de las variables relacionadas anteriormente y, como se puede observar, el comportamiento de las frecuencias de las características seleccionadas y los elementos de la visualización es similar, puesto que en la mayoría de los casos, en un mismo fragmento cuando se evidencia un cierto proceso o habilidad, también se identifica la característica asociada. Un ejemplo de estas relaciones se muestra en el apéndice A.

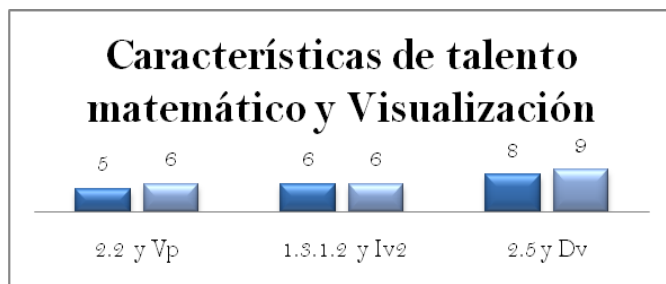


Figura 5. Relación entre visualización y características de talento matemático

Conclusiones

De las relaciones obtenidas en el análisis se concluye que las características de talento matemático relacionadas con algún proceso o habilidad referente a la visualización, en problemas referidos a contextos algebraicos, son:

Generalización y Discriminación Visual. Cuando los estudiantes hacen discriminación visual hacen una comparación de varios objetos identificando sus semejanzas y diferencias visuales lo que está relacionado con la generalización, pues según Mason, Graham, Pimm y Gowar (1993 citados en García, Sánchez y Mora, 2009), este proceso contiene cuatro fases: ver, describir, escribir y verificar; la primera se caracteriza por “ver la regularidad, las relaciones y diferencias y se constituye en el proceso mental por el cual se distingue lo que es propio de cada situación y lo que es común a todo, lo que no varía. Para esta etapa es necesario reparar en las figuras que se tiene e intentar mostrar la que sigue la secuencia, considerando así características que puedan no ser perceptibles a simple vista” (García et al., 2009, p. 3). De aquí que un indicador de la generalización es la discriminación visual pues sin ésta no es posible dar paso a las fases siguientes.

Organizar la información y Procesamiento visual. Cuando un estudiante procesa visualmente, transforma información abstracta a una imagen o una imagen a otra imagen, lo que le permite solucionar problemas de manera efectiva; éste es uno de los descriptores de organización de información que se describe como la capacidad para organizar la información, relacionarla y hacer uso de los datos e información de manera eficiente. Esta relación y las evidencias encontradas permiten afirmar que cuando existe procesamiento visual tuvo que organizarse la información dada y establecer relaciones.

Flexibilidad e Identificación Visual. Uno de los indicadores que permite afirmar que una persona tiene la característica flexibilidad, es la desarticulación de esquemas rígidos, que consiste en descomponer el todo en sus partes. En este sentido, hay una relación directa con la identificación visual 2 descrita como: reconocer un objeto aislándolo de su contexto, dado que para aislar un objeto de su contexto se hace necesario desarticular un esquema. Sin embargo, es importante aclarar que aunque exista esta relación entre la flexibilidad y la identificación visual 2, la aparición de esta última no implica la flexibilidad, pues la desarticulación de un esquema es sólo una parte del proceso, puesto que después de haber hecho una desarticulación se hace necesario establecer relaciones innovadoras entre las partes para hacer evidente la flexibilidad.

Referencias y bibliografía

- Arcavi, A. (1999). The role of visual representations in the learning of mathematics. En: Proceedings of the Twenty First Annual Meeting North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Ohio: Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education Columbus, OH. Vol 1, 55-80.
- Benavides, M. (2008). Caracterización de sujetos con talento en resolución de problemas de estructura multiplicativa. Tesis de doctorado. Universidad de Granada, Granada, España.
- Benavidez, Martínez y Villarraga???
- Bishop, A.J. (1983). Spatial abilities and mathematical thinking, en Zweng, M. et al. (eds) Proceedings of the IV ICME. Birkhäuser: Boston, USA. 176-178.
- Castro, E. (2008). Resolución de Problemas. Ideas, tendencias e influencias en España. En: XII Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM. Badajóz: Sociedad Extremeña de Educación Matemática “Ventura Reyes Prósper” y Sociedad Española de

- Investigación en Educación Matemática (SEIEM). Extraído el 20 de Noviembre de 2008 de <http://www.uv.es/puigl/castroseiem2008.pdf>
- Castro, E., Rico, L. y Castro, E. (1995). Adquisición del concepto de número. En: Castro, E., Rico, L. y Castro, E. (Eds.), Estructuras aritméticas elementales y modelización (pp. 1-24). México: Editorial Iberoamericana S.A.
- Carrión, V. (1998). Álgebra de funciones mediante procesos de visualización. En: Memorias Noveno Seminario Nacional de Calculadoras y Microcomputadoras en Educación Matemática. Ciudad de México: Escuela Normal Superior de México, 108-124.
- Del Grande, J. (1990). Spatial Sense. *Aritmethic Teacher*. V. 37(6). 14-20.
- Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. En *Perspectives on the teaching of Geometry for the 21 Century*. Mammana, C., Villani, V., (eds). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. Ágs 37-51.
- García O., Sánchez L. y Mora L. (2009). Ver, describir y simbolizar en el Club de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional. Memorias del X Encuentro Colombiano de Matemática Educativa [Versión digital]
- Gutiérrez, A. (1991). Procesos y habilidades en visualización espacial. Memorias del III Congreso Internacional sobre Investigación en Educación Matemática: Geometría, (pp. 44-59) Extraído el 10 de junio, 2009 de <http://www.uv.es/Angel.Gutierrez/marcotex.html>
- Jiménez, C. (2002). La atención a la diversidad: educación de los alumnos más capaces. *Revista de Pedagogía (BORDÓN)* 54 (2 y 3). 219-239.
- Krutetskii, V. A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*, Chicago: University of Chicago Press.
- Mora, L., Casas, A. y González, M. (2009). La diversidad en el aula, un ejemplo: el talento en matemáticas. *Revista Pedagogía y Saberes*. Universidad Pedagógica Nacional. Vol. 30. p. 131. Editorial Kimpres Ltda. Colombia. ISSN. 0121-2494
- Pasarín, M. y Feijoo, M. (2005). Desarrollo del talento matemático. Un programa de intervención. *Faisca*, (12), pp. 5-15.
- Presmeg, N. (1986). Visualization and mathematical giftedness. *Educational Studies in Mathematics*, 17, pp. 297-311.
- Peña del Agua. (2004). Las teorías de la inteligencia y la superdotación. *Aula Abierta* 84, pp 23-38.
- Ryu, H., Chong, Y. y Song, S. (2007). Mathematically gifted students' spatial visualization ability of solid figures. In Woo, J., Lew, H., Park, K. y Seo, D. (Eds.). *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, pp. 137-144.
- Souto, B. (2009). Visualización en matemáticas un estudio exploratorio con estudiantes de primer curso de matemáticas. Tesis de Maestría. Universidad de Granada, Granada, España.

Tourón J. & Tourón M. (s.f.). La identificación del talento verbal y matemático de los jóvenes más capaces: el modelo del CTY España. Recuperado el 30 de junio de 2010, del Sitio Web de la Fundación Promete: http://win.f-a-s-i.com/S_canarias_2006/D02Tourón.pdf.

Apéndice A. Ejemplo de la relación entre visualización y talento matemático

