Un método alternativo para probar divisiones

Beatriz Avelina **Villarraga** Baquero
Licenciatura en Matemáticas, Universidad de los Llanos
Colombia
bvillarraga@unillanos.edu.co
Saira Fernanda **Mesa** Macias
Licenciatura en Matemáticas, Universidad de los Llanos
Colombia
sfmesa@unillanos.edu.co
María Fernanda **Ospina** Torres
Licenciatura en Matemáticas, Universidad de los Llanos
Colombia
Maria.ospina.torres@unillanos.edu.co
Osvaldo Jesus **Rojas**
Doctorado en Educación Matemática, Universidad Antonio Nariño
orojasv69@uan.edu.co

Resumen

En el presente trabajo se utilizan los principios de la etnomatemática con el propósito de investigar la matemática implícita en un método para la prueba de cualquier división de números naturales adquirido mediante tradición oral. Se ofrece en principio una explicación sin justificación tal como se recibió de la entrevistada, junto a algunas fallas del método, posteriormente, mediante herramientas de la teoría de números se proporciona una explicación a cada paso del método, probando cada resultado relevante del mismo y mostrando mediante contraejemplos la falibilidad del método en algunos casos particulares.

Palabras clave: Etnomatemática; División; Números Naturales; Prueba; Teoría de números

Introducción

En los últimos años, ha cobrado fuerza la exploración de las formas en que se utiliza la matemática en las prácticas culturales que realizan distintos grupos sociales, tales como la elaboración de artefactos artesanales, juegos comunitarios, comidas, actividades económicas, entre otras. En tales prácticas culturales se evidencian actividades matemáticas como contar, medir, explicar procedimientos, realizar operaciones, entre otras. Es usual que en diferentes culturas y grupos sociales se generen ideas y atajos para diferentes operaciones aritméticas, esto debido a que algunas acciones simples como dividir en partes iguales puede tornarse tedioso, más aún cuando la división no es exacta.

En realidad la misma matemática formal y la generación de algoritmos han sido desarrollados como una forma de facilitar ciertas operaciones en el transcurrir de la historia. Es así, que el método para la prueba de la división que se estudia a continuación ha sido transmitido a un grupo de personas (no matemáticos) por medio de tradición oral, situación que es analizada a la luz de la caracterización que ofrece D'Ambrosio (2014) en su teoría sobre la etnomatemática, procurando interpretar y comprender las ideas matemáticas en un grupo social. Se pretende en principio brindar una trasmisión fiel y directa del método, posteriormente, una explicación que abarca el estudio del contexto y origen del método, y una interpretación matemática de su funcionamiento, limitaciones y conceptos involucrados.

La Etnomatemática es un concepto amplio, D'Ambrosio (2002) propone mediante un ejercicio etimológico una definición a este concepto mediante la unión de tres raíces, a saber, ticas como las técnicas, modos o artes; matema que se entiende como explicación, comprensión; etno como los ambientes culturales y sociales. Así, la Etnomatemática son las ticas de matema en un etno en particular, o bien reformulada por D'Ambrosio (2014), "la comprensión de las prácticas matemáticas en un contexto sociocultural".

Blanco-Álvarez et al. (2014) proponen que podría ser muy limitado el comprender las prácticas matemáticas en una cultura, explicándolas simplemente desde la perspectiva de la matemática dominante, pues el propósito de la etnomatemática, más que solo explicar las matemáticas en un contexto sociocultural, pretende comprenderlas desde el punto de vista del individuo; entender por qué y cómo se usan, y por último cómo se explican desde las matemáticas dominantes.

Con el objetivo de estudiar lo que se consideran artefactos dentro de la etnomatemática, Albanese et al. (2014) proponen unas pautas a seguir: a) Actividad descriptiva, b) Actividad arqueológico–analítica, c) Actividad de matematización y d) Actividad creativo–sintética.

Para la interpretación matemático-formal del artefacto serán necesarios algunas definiciones y teoremas conocidos de la teoría de números.

Teorema: Algoritmo de la división
Sean a, b enteros con $b > 0$, entonces existen enteros c, r tales que

$$a = bc + r, \text{ con } 0 \leq r < b$$

Definición: Representación en base 10
Un entero $a = (a_0\, a_1 ... a_n)_{10}$ en base 10 se escribe como:

$$a = 10^n a_0 + 10^{n-1} a_1 + ... + 10^0 a_n$$

Definición: Congruencia módulo n
a es congruente con b módulo n, si n divide a la resta $a - b$, y se escribe:

$$a \equiv b (mod\ n)$$

Teorema: $\equiv$ es una relación de equivalencia en Z, donde $\equiv$ es reflexiva, simétrica y transitiva.

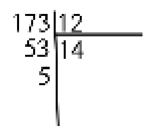
Para la primera fase desarrolla una investigación cualitativa, se procura seguir los pasos propuestos por Barton (1996), para comprender los conceptos matemáticos en el contexto. Esto corresponde a la inmersión, para ello se desarrollan una serie de entrevistas enfocando la atención en entender el método en sí mismo y cómo lo han usado antes. Esta fase de inmersión es útil para comprender cada paso del método y desarrollar una descripción fiel de cada detalle.

En la segunda fase tras haber entendido el método, parte de su historia y uso en el grupo a estudiar, se desarrolla una explicación de su funcionamiento con herramientas matemático-formales que dan luz a otras implicaciones y conclusiones del método mismo.

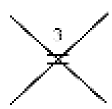
Primeros acercamientos al método

Se da inicio a la fase descriptiva, donde se pretende entender el método. A manera de ejemplo mostraremos solo algunos apartes de la entrevista a una persona conocedora del método. Antes de la explicación, la entrevistada nos cuenta acerca de cómo adquirió el conocimiento sobre la prueba de la división y la forma en que lo ha utilizado a lo largo del tiempo, pues el método requiere poco cálculo mental, y sumar números pequeños. Posteriormente la entrevistada nos proporciona la siguiente explicación del método mencionado:

E_1 - *Se hace la división como siempre.*

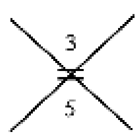


E_1 - *Se suman las cifras de cada número, si el número es mayor que 9 se suman de nuevo, si no es mayor se deja el número.*

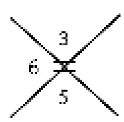


E_1 -*Para el número 12, su suma es 1+2=3, como el resultado es menor que 9 da 3, entonces se ubica el 3 arriba*.

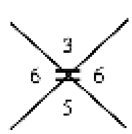
E_1 - *Para 14 para como la suma es 1+4=5 no es mayor que 9, se ubica el número 5 abajo*



E_1 -*Ahora se multiplica arriba y abajo y da (3)(5)=15, se súmanlos números 1+5=6, y se coloca a este lado*:



E_1 -*Para el que falta se resta 173 con el residuo, 173-5=168, y se suman igual que las otras 1+6+8=15 es mayor que 9, entonces se suma de nuevo 1+5=6 que es menor que 9. Se ubica el 6 en el lugar que falta*



Y concluye explicando que:

E1 -*Si la división está bien, los números de los lados deben ser iguales.*

Luego de explicar el método, la entrevistada explica la manera en que adquirió este conocimiento,

E1 - *Mi mamá me lo enseñó cuando yo estaba en cuarto de primaria porque no quería aprenderme todas las tablas de multiplicar…, también se lo enseñé a mis hijas en la primaria…*
A la pregunta acerca de si conoce sobre fallas en el método contesta lo siguiente:
E1 - *Ese método funciona siempre, nunca me ha fallado*.

Interpretación matemática del método

Cada una de estas preguntas fue realizada a los entrevistados, pero solo se hará un breve resumen de la interpretación por parte de los investigadores.

¿Por qué hay que sumar los dígitos?

Considere un número x de $n + 1$ dígitos, en base 10 escrito como

$$x = (x_0\, x_1 \ldots x_n)_{10}$$

La entrevistada dice que se deben sumar los dígitos sin que excedieran al 9, esto en lenguaje matemático es calcular su residuo al dividir por 9, o calcular su congruencia módulo 9. Obsérvese primero que $10 \equiv 1 (mod\ 9),$ ahora calculando el residuo de x

$$\begin{aligned} x &= 10^n x_0 + 10^{n-1} x_1 + \ldots + x_n \\ &\equiv (1)^n x_0 + (1)^{n-1} x_1 + \ldots + x_n (mod\ 9) \\ &\equiv x_0 + x_1 + \ldots + x_n (mod\ 9) \end{aligned}$$

Esta última congruencia es precisamente la suma de los dígitos de x. Entonces habría que revisar 3 casos para esta suma de dígitos:

i. Si $x_0 + x_1 + \ldots + x_n > 9$ los dígitos deben sumarse de nuevo hasta obtener un número menor a 9, que corresponde con el residuo.
ii. Si $x_0 + x_1 + \ldots + x_n < 9$ entonces el número en cuestión es el residuo de dividir x entre 9.
iii. si $x_0 + x_1 + \ldots + x_n = 0$ o múltiplo de 9 entonces el residuo es 0 y el número x es divisible entre 9.

Esta suma de dígitos se efectúa sin importar el orden y el resultado es único, pues el residuo de dividir x entre 9 siempre es el mismo.

¿Por qué funciona?
Considere la siguiente división de números enteros:

$$\begin{array}{r|l} a & \underline{\;b\;\;\;} \\ r & c \end{array}$$

Por el algoritmo de la división se tiene que:

$$a = bc + r,$$

Se denotan los residuos módulo nueve de los enteros *a, b, c, r* como a_9, b_9, c_9, r_9.

Por tanto,

$$a \equiv a_9 (mod\ 9)$$
$$b \equiv b_9 (mod\ 9)$$
$$c \equiv c_9 (mod\ 9)$$
$$r \equiv r_9 (mod\ 9)$$

Observe primero que

$$a = bc + r$$
$$a - r = bc$$
$$a - r \equiv b_9 c_9 \ (mod\ 9)$$

Se ha obtenido fácilmente que $a - r \equiv b_9 c_9$, es decir el residuo de dividir *a - r entre 9*, debe ser el mismo que dividir *bc* entre 9. De ahí proviene la igualdad esperada de los extremos izquierdo y derecho.

Tendríamos entonces la siguiente afirmación:

Si $a = bc + r$ entonces $a - r \equiv b_9 c_9 \ (mod\ 9)$

Por tanto los extremos son iguales, y su contrarecíproco resulta aún más útil

Si $a - r \not\equiv b_9 c_9 \ (mod\ 9)$ *entonces* $a \neq bc + r$

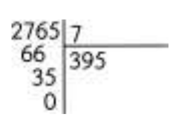
Es decir, si el residuo de dividir *a -r* entre 9 es distinto de *bc* entonces no se cumple el algoritmo de la división.

Que se interpreta viendo que *si los extremos izquierdos y derecho del diagrama son distintos, entonces la división es incorrecta*.

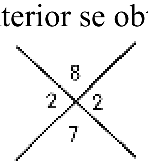
Limitaciones del método

Es fácil creer que el hecho de que los extremos coincidan es condición suficiente para que la división sea correcta, algunos ejemplos muestran que no es cierta tal afirmación.

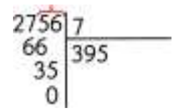
Ejemplo: Considere la siguiente división



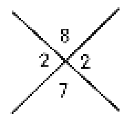
Se puede confirmar que se cumple el algoritmo de la división, pues 2765 = (7)(395)+ 0, además desarrollando el procedimiento anterior se obtiene



Si se mueven de lugar un par de números en un "descuido", por ejemplo del dividendo:

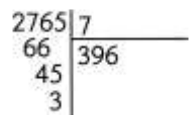


Es claro que 2756≠(7)(395) + 0, sin embargo desarrollando el procedimiento se sigue obteniendo que los extremos coinciden:



Este ejemplo nos muestra que una división podría ser incorrecta, sin embargo desarrollando las operaciones del método se obtiene que los extremos coinciden.

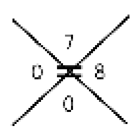
Ejemplo: Se quiere confirmar que la siguiente división es errónea.



Con la idea de evitar aplicar directamente el algoritmo de la división se usa el método anterior, identificando $a = 2765$, $b = 7$, $c = 396$, $r = 3$. Luego, calculando sus residuos módulo 9, es decir sumando sus dígitos sucesivamente

$$a - r = 2762 \equiv 2 + 7 + 6 + 2 \equiv 17 \equiv 8 (mod\ 9)$$
$$b \equiv 7 (mod\ 9)$$
$$c \equiv 3 + 9 + 6 \equiv 0 (mod\ 9)$$

Ubicando los residuos en el diagrama se puede ver que no coinciden los extremos



Si $a - r \neq b_9 c_9 (mod\ 9)$ entonces $a \neq bc + r$, es decir, no se cumple el algoritmo de la división, por lo que la división es incorrecta.

El problema del método precisamente radica en que un número tiene el mismo residuo módulo 9 aún si se cambian de lugar sus cifras, no es posible generalizarlo, pues requerirá de otras ideas matemáticas. Sin embargo, se muestra un ejemplo con números de tres cifras:

Considere dos enteros en base 10, $a = (a_0a_1a_2)_{10}$, $b = (a_2a_0a_1)_{10}$, cuyas cifras están cambiadas o permutadas. Observe que

$$a = 10^2a_0 + 10a_1 + a_2 \equiv (1)^2a_0 + (1)a_1 + a_2 (mod\ 9)$$
$$\equiv a_0 + a_1 + a_2$$

$$b = 10^2a_2 + 10a_0 + a_1 \equiv (1)^2a_2 + (1)a_0 + a_1 (mod\ 9)$$
$$\equiv a_0 + a_1 + a_2$$

Ambos tienen el mismo residuo a pesar de que se alteren sus cifras, por lo que la prueba no sería concluyente en caso de que se alteren las cifras de alguno de los números presentes en la división.

Conclusiones

En el presente trabajo se ha podido desarrollar un análisis descriptivo del método para probar divisiones, observando sus antecedentes históricos, su forma, y cómo ha sido transmitido en un grupo social, que es la familia de la entrevista. Se ha desarrollado además una interpretación matemática viendo el ingenio tras el método, pues se usa una técnica simple de calcular residuos que permite hacer pocas operaciones. Se ha dejado fuera algunas explicaciones extra, porque al permutar las cifras del número su residuo módulo 9 cambia.

Fue posible encontrar contraejemplos para mostrar que el método proporciona condiciones necesarias pero no suficientes para una división correcta, por lo que se cree que no es un método popular, pues si se quiere saber si una división es correcta siempre será más directo ir por el algoritmo de la división. Hay una gran riqueza etnomatemática en los atajos y métodos de cálculo que se reciben por transmisión oral, pues los mismos están sujetos a una época, contexto y problemas distintos.

Un estudio a estos métodos puede proporcionar explicaciones de cómo se entendían las matemáticas en otro tiempo y contexto, la necesidad de crear (o descubrir) esos métodos y la forma en que luego son transmitidas.

Referencias y bibliografía

Albanese, V., Oliveras, M. L., Perales, F. (2014). Etnomatemáticas en Artesanías de Trenzado: aplicación de un modelo metodológico elaborado. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 28(48), 1-20. https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a01

Blanco-Álvarez, H., Higuita Ramírez, C., & Oliveras, M. L. (2014). Una mirada a la Etnomatemática y la Educación Matemática en Colombia: caminos recorridos. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(2), 245-269. https://www.redalyc.org/pdf/2740/274031870016.pdf

Barton, B. (1996). *Ethnomathematics: Exploring Cultural Diversity in Mathematics* [Tesis de doctorado, University of Auckland]. https://researchspace.auckland.ac.nz/handle/2292/2332

D'Ambrosio, U. (2002). *Etnomatemáticas.* Editorial Pitagora.

D'Ambrosio, U. (2014). Las bases conceptuales del Programa Etnomatemática. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(2), 100-107. https://www.redalyc.org/pdf/2740/274031870007.pdf