

# XVI CIAEM



Conferencia Interamericana de Educación Matemática  
Conferência Interamericana de Educação Matemática  
Inter-American Conference of Mathematics Education



Lima - Perú  
30 julio - 4 agosto 2023



[xvi.ciaem-iacme.org](http://xvi.ciaem-iacme.org)

## Ambientes de modelación matemática con Excel en el aprendizaje del concepto de conjunto generador

Guillermo **Ramírez** Montes

Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica  
Costa Rica

[guillermo.ramirez\\_m@ucr.ac.cr](mailto:guillermo.ramirez_m@ucr.ac.cr)

### Resumen

Este estudio es parte de una investigación más amplia centrada en la implementación de tareas de modelación para el fomento de competencias de modelación y la aplicabilidad de los conceptos en un curso de álgebra lineal. El estudio aquí presente visa caracterizar los diferentes modelos creados por estudiantes universitarios, al trabajar una tarea de modelación matemática orientada a la consolidación del concepto de conjunto generador y conceptos asociados, usando para tal efecto la hoja de Excel en un contexto de generación de contraseñas bancarias. La recolección de datos incluye las resoluciones digitales y los archivos de Excel referentes al trabajo del estudiantado. El análisis es cualitativo e interpretativo. Los resultados revelan diferentes modelos construidos por el estudiantado mediante la hoja de Excel, algunos usando un concepto coloquial de conjunto generador y la minoría movilizándolo el concepto matemático de conjunto generador, permitiendo reflexionar sobre la complejidad del concepto.

*Palabras clave:* Educación universitaria; Álgebra lineal; Conjunto generador; Tarea de modelación matemática; generación de claves bancarias; Costa Rica; Hoja de cálculo de Excel.

### Introducción

El álgebra lineal representa un área de conocimiento matemático fundamental en la formación del futuro profesional de Ingeniería y profesiones con gran demanda matemática, no así su aprendizaje asociado a algunos conceptos representa desafíos para el estudiantado, tal es el caso de aquellos asociados a la unidad de espacios vectoriales, catalogados comúnmente por el estudiantado universitario como de mucha abstracción (Costa & Rossignoli, 2017). Estas

dificultades asociadas a la abstracción no son ajenas al estudiantado del curso MA1004 álgebra lineal de la Universidad de Costa Rica, donde las estadísticas año tras año reflejan un bajo rendimiento en el estudiantado en las evaluaciones asociadas a la unidad de espacio vectorial, en comparación con otras unidades como matrices y sistemas de ecuaciones lineales.

Esta problemática, asociada a la enseñanza tradicional del álgebra lineal basada en la resolución de ejercicios en contextos intramatemáticos, requiere una contextualización de los conceptos trabajados con situaciones reales, para lo cual los ambientes de modelación matemática se vuelven útiles; siendo que motivan al estudiantado en su aprendizaje de conceptos de álgebra lineal (Cárcamo et al., 2016) y ofrecen alternativas para consolidar conceptos matemáticos (Kaiser & Sriraman, 2006). Además, la incorporación de la hoja de cálculo en el trabajo de estos ambientes de modelación se vuelve importante también, dado que el estudiantado debe conocer las capacidades de las diferentes tecnologías en su trabajo con tareas de modelación (Galbraith & Stillman, 2006).

Considerando lo expuesto, en este estudio pretende caracterizar los diferentes modelos creados por estudiantes universitarios, al trabajar una tarea de modelación matemática, apoyada en el recurso de la hoja de cálculo, orientada a la consolidación del concepto de conjunto generador y conceptos asociados. Para tal efecto se busca responder a las siguientes interrogantes,

¿Responden los modelos creados por el estudiantado con la hoja de Excel a las especificaciones de la tarea?

¿Qué tipo de conjunto generador, en términos de cantidad de elementos y complejidad matemática, es usado por el estudiantado en su construcción del modelo matemático?

### **Estudios previos sobre conjunto generador y conceptos asociados**

Un análisis hecho por Bianchini et al. (2019) muestra, en términos generales, que los estudios desarrollados en educación en álgebra lineal en América Latina, se han concentrado en promover el aprendizaje de tópicos asociados a la unidad de transformaciones lineales y espacio vectorial; respecto a esta última unidad trabajando en conceptos como (in)dependencia lineal, conjunto generador y base de un subespacio vectorial.

Wawro et al. (2012) proponen una secuencia de cuatro tareas basadas en contextos reales, orientada a promover comprensión significativa del concepto de subespacio generado e independencia lineal. Los resultados de esta investigación muestran que este tipo de tareas basadas en contextos realistas, abren las puertas para facilitar la construcción imaginaria y formal de los conceptos involucrados, promoviendo justificaciones que permiten alcanzar la comprensión significativa de los conceptos.

Trigueros y Possani (2013), usando ambientes de modelación matemática, realizaron un estudio en el contexto de producción de fábricas, con el objetivo de introducir conceptos asociados a la unidad de espacio vectorial, en particular el concepto de combinación lineal e independencia lineal. Los resultados revelan dificultades iniciales para comprender la tarea, pero

conforme van explorando y haciendo conexiones entre la representación gráfica y algebraica, consiguen responder a las preguntas y reconocer los conceptos matemáticos estudiados.

Siguiendo la línea de contextos de modelación, Cárcamo et al. (2016) proponen una tarea en el contexto de generación de contraseñas, pero sin uso de la hoja de cálculo, para introducir los conceptos de conjunto generador y espacio generado. Los resultados de este estudio evidencian que la propuesta ayudó en la construcción de los conceptos matemáticos estudiados y que el estudiantado evolucionara de un nivel informal a un nivel formal de los conceptos.

### **Modelación matemática y recurso tecnológico en el aprendizaje del álgebra lineal**

Entre las perspectivas de modelación matemática encontramos la perspectiva educacional, la cual puede estar orientada a promover procesos de aprendizaje o introducir y consolidar conceptos matemáticos (Kaiser & Sriraman, 2006). En esta línea, Galbraith y Stillman (2006) refieren que la modelación, desde la perspectiva educacional, permite a la persona docente indagar sobre los diferentes conceptos y competencias de modelación que el estudiantado consigue movilizar. Además, estos autores refieren que, en la actividad de validación puede ocurrir que los resultados se ajusten o no, parcial o totalmente, a lo solicitado en la situación problema de la tarea, por lo que será necesario que el individuo reflexione sobre sus resultados reales.

Para Bagley y Rabin (2010) es necesario que el estudiantado movilice diferentes tipos de pensamiento al trabajar conceptos ligados a la unidad de espacios vectoriales, como son el pensamiento abstracto, geométrico y computacional. Además, resulta importante incentivar al estudiantado a realizar sus propias predicciones sobre los posibles resultados que podría obtener tras aplicar un determinado algoritmo, fomentando la validación de resultados reales frente a sus predicciones.

En lo que respecta a tecnología, Galbraith y Stillman (2006) refieren que la tecnología debe ser incluida en el trabajo de tareas de modelación siempre que sea posible. Por su parte, Chaamwe y Shumba (2016) refieren la capacidad de la hoja de cálculo de Excel para manipular fórmulas y realizar diferentes operaciones que se utilizan en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, en particular, “el uso de hojas de cálculo permite a los estudiantes explorar procesos alternativos de solución que van más allá de la manipulación simbólica, y proporcionar al estudiantado una comprensión profundizada de los conceptos involucrados en la tarea” (p. 570).

### **Metodología**

Este estudio tiene por base una investigación fundamentada en la implementación de tres tareas de modelación, con carácter formativo, realizada durante el I semestre 2021 en un curso de álgebra lineal de la Universidad de Costa Rica, con el objetivo de consolidar el aprendizaje de conceptos de álgebra lineal y promover competencias de modelación matemática.

Las personas participantes del estudio fueron 11 estudiantes de pregrado de carreras de Ingeniería y Ciencias Económicas (6 mujeres y 5 hombres), quienes estaban matriculados en el

mismo grupo del curso MA1004 de álgebra lineal, la mayoría de ellos en su primer año de educación superior. Respecto a las características cognitivas del estudiantado del presente estudio, estos tenían diferentes niveles de dominio de Excel, incluyendo casos de estudiantes que nunca lo habían utilizado. Además, tenían niveles de aprendizaje semejantes, dado que todos habían recibido ya la clase magistral de conceptos asociados a la unidad de espacios vectoriales, geometría vectorial, determinantes y matrices y sistemas de ecuaciones; aprendizaje fundamentado en el uso de algoritmos para resolver ejercicios en contextos matemáticos. Las personas participantes habían trabajado previamente una tarea de modelación asociada al uso de sistemas de ecuaciones lineales, en el contexto de flujos por tuberías; sin embargo, previo a dicha tarea nunca habían trabajado tareas de modelación.

Respecto a la tarea aquí presentada, resulta de una adaptación realizada a la tarea propuesta en Cárcamo et al. (2016), donde se plantea una situación real en el contexto costarricense de un banco público de dicho país, el banco de Costa Rica (BCR), con el objetivo de que el estudiantado identificase cómo se puede usar el concepto de conjunto generador y otros conceptos como el de combinación lineal y base de un subespacio vectorial en el contexto de generación de contraseñas usando tecnología.

The image shows a digital form for generating a dynamic password. At the top, it says 'coordenadas de su BCR Clave'. Below this, there are three input fields arranged horizontally. The first field is labeled 'D3', the second 'I4', and the third 'C1'. Each field is currently empty, indicating that the user is to input their own values for these coordinates.

Figura 1. Ejemplo de contraseña solicitada en la tarea a partir de clave dinámica BCR.

En la tarea se invita al estudiantado investigar la configuración que tiene una clave dinámica BCR, y a partir de ello, construir un modelo matemático que genere diferentes claves dinámicas usando sus conocimientos previos de álgebra lineal, en particular, el uso de vectores en  $IR^n$ . Posterior al proceso de modelación, se le solicita atender a tres aspectos: desarrollar un generador de contraseña temporal atendiendo a las expectativas del banco y explique su construcción, y responder a las preguntas ¿cuáles son los vectores que generan sus claves dinámicas? y ¿qué otro generador de claves dinámicas podría generar las mismas claves dinámicas?; preguntas cuya intención fue evidenciar si efectivamente hubo movilización del concepto de conjunto generador.

La recolección de los datos considera las resoluciones a mano digitalizadas del trabajo desarrollado por el estudiantado, como así también sus archivos Excel donde generaron las diferentes claves dinámicas solicitadas. Para dicha recolección la persona investigadora usó el correo institucional, dando fechas específicas para la entrega de las resoluciones, en apoyo con el profesor del curso quien hacía recordatorios de fechas de entrega. El análisis es descriptivo e interpretativo (Cohen et al., 2007), donde la persona investigadora utiliza extractos del trabajo a mano y en Excel para realizar las respectivas caracterizaciones de los modelos obtenidos por el



un único conjunto de vectores para generar todas las filas de la clave dinámica, sino conjuntos que generan diferentes subespacios fila de  $IR^{10}$ .

En el caso de los restantes siete estudiantes, todos utilizan la función *aleatorio* o *aleatorio.entre* para generar números aleatorios que conformen la clave dinámica directamente o como números previos a generar, para posteriormente usar otras funciones de Excel, como por ejemplo las funciones *jerarquía*, *extrae*, *si*, *índice*, *contara*, *concatenar*, entre otras. Este segundo tipo de modelos tienden a ser más complejos de generar en relación a los modelos basados solamente en generación de números aleatorios, pero ambos generan claves dinámicas formadas por 5 filas y 10 columnas, conforme al diseño de una clave BCR. Parte de esta evidencia puede observarse en la repuesta dada por Kimberly cuando explica la construcción de su modelo, mencionando que “la cantidad de entradas de una clave dinámica que utiliza un banco corresponde a una matriz de 5x10, como la que se muestra en las columnas de la A a la J”, refiriéndose a que la clave dinámica a construir debe tener un total de diez columnas, las correspondientes a las letras de A a la J.

Todavía así, se puede interpretar que aquellos estudiantes que generan claves dinámicas usando solo números aleatorios, no saben cómo movilizar el uso de vectores en  $IR^n$  para generar las claves dinámicas, por lo que en estos estudiantes, existe una noción coloquial asociada al concepto de conjunto generador.

### Modelos matemáticos basados en el concepto formal de conjunto generador

Tres estudiantes consiguen movilizar el concepto formal de conjunto generador, recurriendo a vectores canónicos de  $IR^5$ , vectores no canónicos de  $IR^5$ , y vectores no canónicos de  $IR^2$ . Estos tres modelos responden a las especificaciones de la tarea, creando claves con la estructura BCR. En particular, el modelo Olman con vectores de  $IR^2$  posee una estructura más compleja que los otros dos modelos, los cuales son basados en la generación de las filas de la clave dinámica a partir de vectores del espacio fila de los vectores del conjunto generador. El modelo de Olman es presentado en la figura 3.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	52	39	69	81	94	78	27	76	29	99
2	71	09	24	18	20	94	52	88	58	37
3	25	29	81	35	09	70	11	21	75	93
4	35	65	79	89	53	82	01	59	11	03
5	08	91	46	63	54	87	12	16	08	55
6									Valor de	
7	$\alpha$	$e_1$		$\beta$	$e_2$		x	y	entrada	Entrada en C
8	5	10	0	2	0	1	50	2	52	A1
9	7	10	0	1	0	1	70	1	71	A2
10	2	10	0	5	0	1	20	5	25	A3
11	3	10	0	5	0	1	30	5	35	A4
12	0	10	0	8	0	1	0	8	08	A5
13	3	10	0	9	0	1	30	9	39	B1
14	0	10	0	9	0	1	0	9	09	B2

Figura 3. Modelo y resultados matemáticos de Olman.

La figura 3 ilustra en la parte superior la clave dinámica de dimensión 5x10, construida por Olman a partir de la combinación lineal de los vectores (10,0) y (0,1), denotados por  $e_1$  y  $e_2$  por el estudiante. La notación y los vectores escogidos, dejan ver que Olman conoce el concepto de

base canónica de un espacio vectorial, y además que multiplicar uno de estos vectores por un escalar da como resultado una base que genera al mismo espacio vectorial. Al observar la columna *valor de entrada*, se observa que las entradas de esta columna corresponden a los valores de cada entrada en la clave dinámica, y se obtienen realizando la suma de las entradas del vector generado por la combinación lineal del conjunto generador escogido, conforme deja ver explícitamente la explicación del estudiante en la figura 4.

Así podemos notar que cualquier valor de  $C_{ij}$  (entradas de  $C$ ) está definida por  $C = \{ (1,0), (0,1) \}$ , es decir, estos vectores generan la clave dinámica realizando la transformación  $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = [(x+y); i]$

La figura 4 deja ver una movilización del concepto de transformación, incluyendo una correcta notación matemática, lo que aporta un carácter más complejo a este modelo en relación a los otros.

### Conclusiones

Los resultados permiten concluir que los modelos creados por el estudiantado, responden a la situación problema presentada en la tarea en relación al producto a originar, una clave dinámica formada por cinco filas y diez columnas, con entradas de dos dígitos. No así, en términos de estructura matemática para crear dichas claves, la minoría de los modelos recurren al concepto formal de conjunto generador de un subespacio vectorial, siendo que la mayoría de modelos recurren a nociones del concepto de conjunto generador, algunas de ellas usando el concepto coloquial de lo que significa “generar” un conjunto usando números aleatorios. Los modelos matemáticos están basados en el uso de funciones de la hoja de Excel, recurriendo simplemente al uso de estas fórmulas para crear las claves dinámicas sin movilizar el concepto de conjunto generador, o recurriendo a funciones de Excel como elementos intermedios, para en el proceso de construcción del modelo usar conjuntos generadores con vectores de  $\mathbb{R}^5$  o  $\mathbb{R}^2$ .

La tarea matemática permite ver que contextos cercanos al estudiantado permite movilizar conceptos de álgebra lineal, aunque hacer estas conexiones no resulta tan sencillo para todo el estudiantado, lo que lleva a reflexionar sobre futuras adaptaciones que se deban hacer a la tarea.

### Referencias y bibliografía

- Bagley, S., & Rabin, J. (2010). Students' use of computational thinking in Linear Algebra. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 2, 83–104. <https://doi.org/10.1007/s40753-015-0022-x>
- Bianchini, B. L., de Lima, G. L., & Gomes, E. (2019). Linear algebra in engineering: an analysis of Latin American studies. *ZDM Mathematics Education*, 51 (7), 1097–1110. <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01081-5>

- Cárcamo, A., Gómez, J., & Fortuny, J. (2016). Mathematical modelling in engineering: A proposal to introduce linear algebra concepts. *Journal of Technology and Science Education*, 6(1), 62–70. <http://dx.doi.org/10.3926/jotse.177>
- Chaamwe, N., & Shumba, L. (2016). Spreadsheets: A tool for e-learning - a case of matrices in Microsoft Excel. *International Journal of Information and Education Technology*, 6(7), 570–575. <http://dx.doi.org/10.7763/IJET.2016.V6.753>
- Cohen, L., Manion, L., & Mohinson, K. (2011). *Research methods in education (7th ed.)*. London, UK: Routledge.
- Costa, V. A., & Rossignoli, R. (2017). Enseñanza del álgebra lineal en una facultad de ingeniería: Aspectos metodológicos y didácticos. *Revista Educación en Ingeniería*, 12(23), 49–55. <https://doi.org/10.26507/rei.v12n23.734>
- Galbraith, P., & Stillman, G. (2006). A framework for identifying student blockages during transitions in the modelling process. *ZDM Mathematics Education*, 38(2), 143–162. <https://doi.org/10.1007/BF02655886>
- Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, 38 (3), 302–310. <https://doi.org/10.1007/BF02652813>
- Trigueros, M., & Possani, E. (2013). Using an economics model for teaching linear algebra. *Linear Algebra and its Applications*, 438(4), 1779–1792. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2011.04.009>
- Wawro, M., Rasmussen, C., Zandieh, M., Sweeney, G. F., & Larson, C. (2012). An inquiry-oriented approach to span and linear independence: The case of the magic carpet ride sequence. *PRIMUS*, 22(8), 577–599.