Análisis de una organización matemática basada de un recorrido de estudio e investigación sobre el COVID – 19 en el nivel superior

Carlos **Quispe** Palomino
Pontificia Universidad Católica del Perú
Perú
a20174134@pucp.edu.pe
Elvis **Bustamante** Ramos
Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas
Perú
ebustamater@pucp.edu.pe

Resumen

El trabajo tiene como finalidad aportar en recuperar el sentido de las matemáticas encontrando una razón de ser de los saberes sobre funciones elementales propuestos en la educación secundaria y el primer ciclo de universidad. En esta investigación, se plantea un problema sobre el tiempo de contagio de un virus (COVID-19) que permita el proceso de modelización matemática. Para ello, se diseña e implementa una actividad para los estudiantes del primer ciclo universitario como propuesta de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, basada en un dispositivo didáctico llamado *recorrido de estudio e investigación* (REI). Luego la organización matemática que emerge de este REI se analiza por medio de los *indicadores de grado de completitud*. Los resultados fueron que solo dos de los siete indicadores de completitud no llegan a cumplirse por la rigidez en el uso de ostensivos y el escaso uso de tareas inversas.

Palabras clave: Educación Matemática; Educación superior; Enseñanza presencial; Diseño curricular; Teoría antropológica de la didáctico; Investigación cualitativa; Análisis funcional; Perú.

Introducción

La matemática es parte importante de nuestros conocimientos, sin embargo, se afronta una ausencia de razones de ser de estos, en el cual la razón de estos saberes no tiene una aplicación a la vida real (Rojas y Sierra, 2021). Como en el tema de funciones, en el que las actividades suelen tener un sentido superficial y poco útil (Lujan, 2019; Donvito et al., 2017). En consecuencia, los contenidos matemáticos se estudian en bloques separados o poco relacionados entre sí (Donvito et al., 2017). Además, se evidencia errores y dificultades por los estudiantes en los cursos de matemáticas del primer ciclo de la universidad (Moraga et al., 2015; Duche et al., 2020).

Por otro lado, el tema funciones se encuentra en el Currículo Nacional del Perú, abarcando las funciones lineal, afín, cuadrática, periódica y exponencial. Así como también en los cursos de matemáticas del primer ciclo del nivel universitario, abarcando más temas como las funciones logaritmo y por tramos. Por otra parte, en la línea de investigación de la didáctica de las matemáticas, se han desarrollado propuestas de razones de ser de saberes matemáticos mediante procesos de modelización matemática usando un recorrido de estudio e investigación (REI), desarrollándose una enseñanza a través de preguntas o por investigación, las cuales establecen un sentido al estudio de las matemáticas (Rojas y Sierra, 2021; Serrano, 2013; Donvito et al., 2017), entre otros.

De esta manera, nuestra investigación muestra su relevancia, sumándose a las demás investigaciones de diseño de actividades mediante el REI.

Marco teórico y metodología

Según Lucas (2010), Chevallard introduce a mediados de los años 90 la noción de Praxeología u Organización Matemática (OM), que es una de las nociones básicas de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). Según Bosch et al. (2006), la TAD propone que toda actividad humana puede ser modelada mediante praxeologías (*praxis + logos*). En la cual es posible distinguir dos niveles:

- **El nivel de la praxis**, relacionado al saber-hacer y a los *tipos de tareas*, los problemas, y las *técnicas* que se construyen y usan para resolverlos.
- **El nivel del logos o del “saber”**, aquí se hallan los discursos que describen, explican y justifican las técnicas que se usan, denominada *tecnología*. Dentro del “saber” se postula un segundo nivel de descripción-explicación-justificación (esto es, el nivel de la tecnología de la tecnología) que se denomina teoría.
-

Según Chevallard (1999), existe una distinción de diferentes tipos de OM según el grado de complejidad de sus elementos.

Para la construcción de nuestro REI, nos apoyaremos en investigaciones como la realizada en Otero et al. (2013), en el cual se menciona que los REI permiten reformular los programas escolares como un conjunto de preguntas generatrices, cuyas respuestas permiten mostrar organizaciones matemáticas que se proponen en los planes de estudio, e introducen una nueva epistemología, que devuelven sentido y la funcionalidad a la matemática escolar, la cual reemplaza a, la pedagogía de visitar las obras.

Nuestro objetivo es el análisis de la praxeología de REI. Por ello vamos a seguir la metodología de tipo cualitativa planteada por Barquero y Bosch (como se citó en García et al., 2019), la cual es una adaptación de la metodología de la ingeniería didáctica para el desarrollo de recursos y formación del profesorado en el que se indica como vamos a realizar nuestro recorrido de estudio e investigación. El cuál analizaremos mediante los indicadores de grado de completitud.

A continuación, describiremos los pasos que seguiremos en nuestro trabajo:

Fase 1. De análisis preliminar: se realizará un análisis epistemológico superficial de la noción de funciones para determinar nociones que puedan favorecer su emergencia.
Así también como un análisis de libros de matemática del quinto de secundaria y primer ciclo universitario sobre nociones de funciones.

Fase 2. De diseño y análisis a priori: se diseñará una propuesta de REI basado en el MER dominante en el que se formula una cuestión generatriz, que determine cuestiones derivadas que implique el uso de nociones de funciones o asociadas a ellas y se describen posibles recorridos. Además
, se realizará el diseño de las actividades que se desarrollan durante la implementación del REI.

Fase 3. Análisis in Vivo: se aplicará el REI propuesto en estudiantes del primer ciclo de una universidad, gestionado por un profesor, que hará de investigador-observador. Además, se recopilará información mediante: grabaciones, Word, GeoGebra, Jamboard, Fotos y Entrevistas.

Fase 4. Análisis a posteriori: en esta fase, analizamos mediante los siete indicadores de grado de completitud las praxeologías que emergerán del REI implementado como sigue:

- I1: se analizará si los tipos de tareas tienen un nexo común.
- I2: se analizará si existen diferentes técnicas y criterios para elegir entre ellas.
- I3: se analizará si existe independencia de los ostensivos que integran las técnicas.
- I4: se analizará si existen tareas y técnicas inversas.
- I5: se analizará si se cuestionan sobre el funcionamiento de las técnicas empleadas.
- I6: se analizará si hay técnicas nuevas, que amplíen los tipos de tareas existentes.
- I7: se analizará la existencia de tareas matemáticas abiertas.

Parte Preliminar y Diseño

Primero se realizó un análisis de los libros de texto del quinto de secundaria y dos libros guía que usan los estudiantes de medicina del primer ciclo de universidad en su curso de Matemática para identificar el Modelo Epistemológico de Referencia (MER) dominante. Y en base a este análisis se realizó una propuesta de un posible recorrido como se muestra en la figura 1. Además, se consideró 6 sesiones y un software (GeoGebra) para el desarrollo del REI aplicado a dos estudiantes de Medicina de una universidad del Perú.

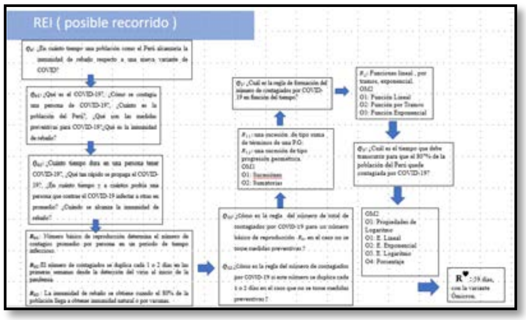


Figura 1. Diseño matemático.

Parte Experimental

Esta presentación se va a enfocar en los datos obtenidos por dos estudiantes (E_1 y E_2) y orientado por un profesor (P) para dar respuesta a la pregunta Q_0: *¿En cuánto tiempo tras la llegada una nueva variante del COVID-19, una población como el Perú alcanzaría la inmunidad de rebaño?*, bajo la dirección de un profesor durante seis sesiones del taller tienen una duración de 100 minutos por sesión.

Sesión 1: Se presenta la cuestión a trabajar Q_0. Es así como los estudiantes empiezan a formular cuestiones como se muestra en la figura 2. Además, el estudiante E1 indicó que hay que precisar algunos términos como la tasa de contagio. Esto motivó la formulación de la siguiente pregunta**: ¿qué es el número básico de reproducción?**

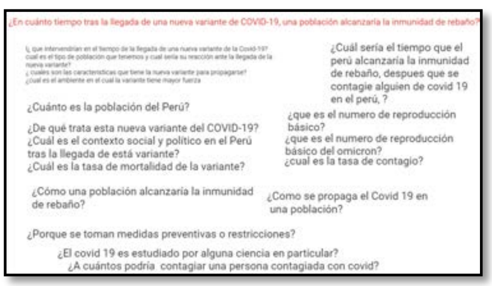


Figura 2. Formulación de las cuestiones derivadas de Q_0 por los estudiantes, que permiten iniciar la investigación.

Sesión 2: En esta parte, se trata de alinear la investigación. Para ello, se busca la información relevante para luego organizarla y comenzar a plantear un primer bosquejo del modelo matemático que responda a $\boldsymbol{Q_0}$. Los estudiantes profundizaron en la cuestión sobre $\boldsymbol{Q_0}$, haciendo preguntas como:

E2: En la tasa mortalidad de esta nueva variante

E1: Del mismo coronavirus, que conocemos

Se propone elegir dos variantes de COVID existentes para obtener características particulares de estas. Para esto, el profesor realiza la siguiente pregunta: ¿cuál de las variantes de COVID ha afectado más al País? De esta forma, se limitó la búsqueda de información. Se establece buscar información sobre R0 (número básico de reproducción) en el Perú para comenzar con la modelación de la pregunta generatriz.

Sesión 3: El equipo comienza a analizar la base de datos de acumulados positivos COVID en un registro gráfico y luego en un registro tabular. El equipo determina tomar los datos recopilados desde el 6 hasta el 16 de marzo, como se muestra en la figura 3, pues en ese periodo de tiempo no se habían tomado medidas importantes para tratar de controlar el número de contagiados por COVID.

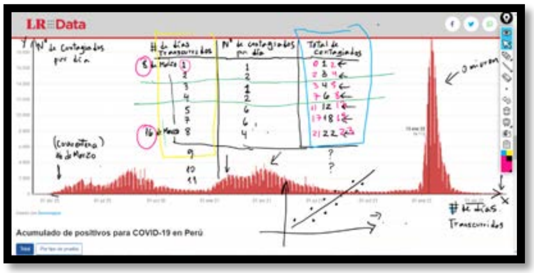


Figura 3. Trabajo de los estudiantes al decidir qué parte de los datos empezar a estudiar.

En la modelación realizada por los estudiantes, se obtienen dos propuestas (ambas sucesiones). La primera es del tipo progresión aritmética y la segunda es otra sucesión de dos niveles como se muestran en la siguiente figura.

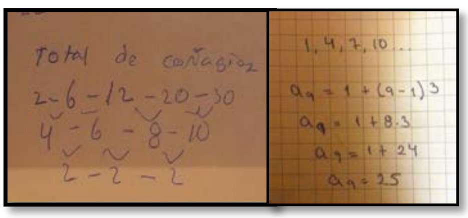


Figura 4. Propuesta de los estudiantes.

Sesión 4: Los estudiantes consiguen hallar las reglas de formación para las sucesiones que se aproximan a los datos que son $a(n)$ y $b(n)$. En este proceso, E2 usó la fórmula del término n-ésimo de una progresión aritmética de la primera sucesión. Para la segunda sucesión, E1 encuentra que el número de contagiados en el n-ésimo día transcurrido es $2+4+6+\cdots+2n = 2(1+2+3+\cdots n) = 2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = n(n+1)$, mientras E2 consigue directamente el patrón al tantear valores iniciales como se muestra en la figura 5.

Figura 5. Las reglas de formación de las sucesiones obtenidas por E1 y E2.

En este punto los estudiantes plantearon una función por lo cual el profesor indicó:

P: ¿Una sucesión es una función?
E2: Sí, pues a cada elemento del conjunto de partida le corresponde un elemento del conjunto de llegada.
E1: Sí.

P: Entonces, podríamos extender las reglas de formación de sucesiones a funciones.
P: ¿Qué nos saldría si extendemos a funciones?,¿qué funciones tendríamos?

Se comienza a realizar la extensión reconociendo el dominio de la sucesión a(n) y b(n), que viene a ser los naturales y extenderlo a los reales cuando extienden a(n) y b(n) a las funciones: $f(x) = x^2 + x$ y $g(x) = 3x - 2$.

P: ¿Qué funciones hemos obtenido?
E2: Una cuadrática y una lineal

Posteriormente, se realizó un análisis gráfico de las funciones f y g para la aproximación de la data por medio del GeoGebra (ver figura 6).

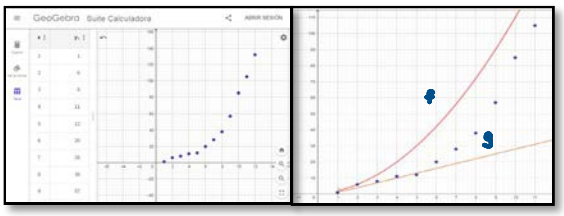


Figura 6. Se implementó como parte de la verificación del modelo, el uso de GeoGebra por los estudiantes E1 y E2.

Al observar las gráficas de las funciones f y g, se realiza el siguiente diálogo:

P: ¿Cuál de las funciones modela mejor a los datos, es decir, a los puntos de morado?
E2: Yo creo que la cuadrática, más que todo por su dominio y el rango.
E2: Bueno, más que todo, porque la cuadrática es una parábola y se va para arriba
El equipo aprecia que al inicio parece que los datos son cercanos a la parábola. Luego, se van distanciado y después vuelven acercarse.
P: ¿Y sobre la gráfica de la función lineal?
E2: Como es recta, se va alejando más.
E1: Yo también creo que la que mejor se acerca a los datos es la parábola.
P: ¿Qué pasaría si solo hubiésemos modelado hasta el día 5? ¿Qué función hubieras elegido?
E2: La recta

El equipo observa que el elegir una función que modele los datos depende de qué intervalo de tiempo se esté tomando. Entonces se planteó: ¿existirá otra cuadrática que se aproxime mejor que la que tenemos a los datos? Esto nos lleva a usar la regla de formación de una función cuadrática: $\boldsymbol{h(x) = ax^2 + bx + c}$; con $\boldsymbol{a \neq 0}$. En el cual los estudiantes utilizaron tres puntos de la tabla e indicaron que debe cumplir: si $(x; y) \in f$, entonces $f(x) = y$. En consecuencia, aparece un sistema de ecuaciones y los estudiantes lo resolvieron por los **métodos de reducción y sustitución**; y lo verificaron por el **método de Cramer** mediante una página web.

Luego, utilizaron GeoGebra para indicar que la función $h(x) = \frac{79}{60}x^2 - \frac{103}{20}x + \frac{29}{6}$ se una mejor aproximación respecto a f y g.

Sesión 5: E2 comenzó a realizar una búsqueda en internet y encontró información de otra técnica; por esa razón E2 intentó solucionar el problema mediante el método de aproximación mínimos cuadrados discreto (regresión cuadrática), es decir, aproximarse a los datos por una parábola (función cuadrática), pero, no pudo identificar correctamente los coeficientes, pues son sumatorias, como se muestra en las notas que realizó de la técnica en la figura 7.

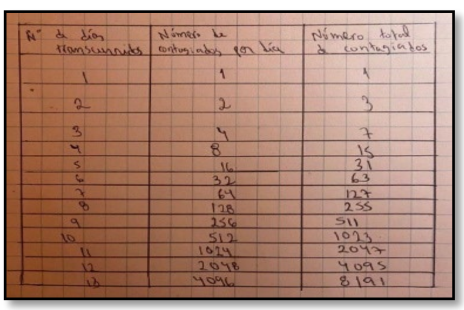
x	y	x^2	x^3	x^4	xy	x^2y
1	1	1	1	1	1	1
2	4	4	8	16	8	16
3	7	9	27	81	21	63
4	10	16	64	256	40	160
5	13	25	125	625	65	325

5a + b + c = 1
a + b + c = 1
a + b + c = 1

Figura 7. Tabla para hallar los coeficientes por el método de mínimos cuadrados (regresión cuadrática)

A continuar con la pregunta: ¿Será posible encontrar una función que se aproxime mejor a los datos que las funciones obtenidas hasta ahora?
E2: En el artículo, encontré que uno se puede aproximar a los datos, además de la función lineal o cuadrática con funciones exponenciales, logaritmos, potenciales, hiperbólicas y logísticas.
E1: Por la forma que van nuestros datos
P: Sí

Los estudiantes observan a la función exponencial como candidato para el modelamiento del número total de contagiados por la forma que tiene su gráfica. Se continúa con la siguiente pregunta: ¿Cuál sería la regla de formación del número total de contagiados por COVID si cada persona que contrae dicho virus llega a contagiar a dos personas en promedio? Como respuesta los estudiantes realizan una tabla como se muestra en la figura 8.



N° de días transcurridos	Número de contagiados por día	Número total de contagiados
1	1	1
2	2	3
3	4	7
4	8	15
5	16	31
6	32	63
7	64	127
8	128	255
9	256	511
10	512	1023
11	1024	2047
12	2048	4095
13	4096	8191

Figura 8. Tabla trabajada por los estudiantes según los datos.

A los estudiantes se les complica encontrar una regla de formación para la secuencia de número de contagiados. Solo se limitan a encontrar el valor del número total de contagiados a pesar, de la sugerencia del profesor que lo escriban como potencias de 2. Pero los estudiantes querían aplicar la técnica del término enésimo o la función cuadrática.

Conclusiones y resultados

En primer lugar, se resalta la importancia del marco teórico (TAD), que permitió identificar las praxeologías matemáticas que se podrían presentarse en el REI y presenta una metodología para el diseño del REI descrita en Barquero y Bosch (como se citó en García et al., 2019). Además, nos permitió identificar las praxeologías matemáticas asociadas al contenido que se presente en la implementación del REI para su análisis por medio de indicadores que en cierta medida nos permite decir que tan relativamente completa están las praxeologías desarrolladas.

A continuación, se menciona algunas observaciones en relación con los indicadores:

- Del I1, se observa el uso de diferentes técnicas relacionadas a sucesiones, función lineal y cuadrática.
- Del I2, se constata la construcción o la búsqueda de los estudiantes de una nueva técnica; por ejemplo, el uso de tres puntos para construir una función cuadrática o que permita obtener la mejor cuadrática que se aproxime a los datos (mínimos cuadrados). Y se evidencia dificultad por parte del estudiante al intentar expresar los datos por medio de tablas, por ejemplo, en el cálculo del término n-ésimo de la sucesión de segundo grado.
- Del I3, se evidencia la dependencia de los ostensivos que integran las técnicas. Por ejemplo, cuando los estudiantes realizaban la notación del coeficiente principal de una cuadrática, necesariamente, tenía que ser representado por la letra a. En caso contrario, causaba errores al realizar las operaciones con los coeficientes de una cuadrática. Además, al simbolizar las funciones que modelan el número de contagiados usan las notaciones clásicas como $f(x)$.
- Del I4, a excepción de una pregunta que se presentó, no se evidenciaron tareas y técnicas inversas.
- Del I5 y I6, al momento del análisis de las primeras respuestas de las preguntas Q_i, los estudiantes buscaron la manera de mejorar su modelo matemático, pasando desde una propuesta por sucesión, a una por función cuadrática. Luego, usaron la función cuya gráfica describa mejor el comportamiento de los datos a través del tiempo.
- Finalmente, el I7, el uso de la cuestión generatriz Q_0 determina una tarea, en el que se desconoce con anticipación qué técnica o técnicas permitirán resolverla. Esto condujo a los estudiantes a encontrar técnicas nuevas como la técnica del método de mínimos cuadrados, las cuales permitieron encontrar un modelo matemático para dar respuesta a Q_0.

Por lo anterior, se encontró restricciones y dificultades; y que no llegan a cumplirse dos indicadores relacionados al desarrollo de tareas inversas y a la independencia del uso de ostensivos.

Además, en el análisis de los resultados, durante la resolución del problema de contagio del COVID 19, pueden emerger algunos de los saberes de funciones propuestos en un curso de matemáticas del primer semestre de la universidad, para ser enseñados. Por ejemplo, los contenidos de la función lineal y cuadrática, y de conocimientos de sistemas de ecuaciones. A la búsqueda o construcción de una función del problema de contagios de COVID 19, aparece la necesidad de establecer una data de valores $(x; y)$ que cumpla con la función, es decir, una necesidad de estudiar la noción del dominio y rango de la función. Pero, existen saberes que surgieron en el desarrollo del REI que no se consideró; por ejemplo, el tema de mínimos cuadrados. Por ello, podemos indicar que sería apropiado relacionar el contenido de funciones con sistemas de ecuaciones y técnicas para hallar la regla de correspondencia de una función (utilizando mínimos cuadrados) como parte de conocimientos propuesto en un currículo.

Por otro lado, los estudiantes se apoyaron en la representación gráfica para orientarse en la búsqueda de una función que dé respuesta a la pregunta planteada; es decir, elaboraron una técnica gráfica para indicar una relación de la gráfica con los datos. Por ello, será importante que el profesor gestione sesiones para ver una variedad de funciones en relación con datos, pues así permite abarcar una mayor parte del contenido de funciones y sus características.

En relación con el software utilizado, a pesar de que tuvieron dificultades en el uso; el empleo ayudó a los estudiantes en visualizar la aproximación de los modelos funcionales, por ello, se incorporó como parte de la técnica utilizada por los estudiantes. Por esta razón, sería conveniente desarrollar un taller sobre la manipulación de GeoGebra.

Finalmente, consideramos que la implementación del REI se desarrolló en una forma abierta, pues los estudiantes reflexionaron sobre sus respuestas con poca intervención del docente quien le ayudó con la orientación de las técnicas. Además, observamos que los estudiantes construyeron y cuestionaron nuevas técnicas.

Agradecimientos

Agradecemos a la Pontificia Universidad Católica del Perú, al Instituto de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas – línea de epistemología de las matemáticas en didáctica de las matemáticas, por el apoyo brindado en la realización de la investigación.

Referencias y bibliografía

Bosch, M., García, F., Gascón, J. y Ruiz, H. L. (2006). La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta de la teoría antropológica de lo didáctico. Educación Matemática, *18,* 37-74.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didáctique des Mathématiques*, *19*(2), 221-266.

Donvito, A., Otero, M. R. y Sureda, P. (2017). *Enseñanza por Investigación en la Escuela Secundaria.* Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires.

Duche, A., Paredes, F., Gutiérrez, O. & Carcausto, L. (2020). Transición secundaria-universidad y la adaptación a la vida universitaria, *Revista de Ciencias Sociales, 26*(3), 244 – 258.

García, F., Barquero, B., Florensa, I. & Bosch, M. (2019). Diseño de tareas en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico*, Avance de Investigación en Educación Matemática*, *15*, 75 – 94.

Lucas, C. (2010). *Organizaciones matemáticas locales relativamente completas* (Memoria de investigación, Diploma de Estudios Avanzados). Universidad de Vigo.

Lujan, P. (2019). *Modelización de la función seno un recorrido de estudio e investigación sobre la respuesta estructural de un edificio frente a un sismo* [Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. Repositorio institucional de la PUCP.

Moraga, N., Copa, B., Musso, G., Giliverti, J. y Macoritto, A. (2015). Estrategias de articulación entre el nivel medio y la universidad. Curso "Me preparo para estudiar ingeniería". *Revista Argentina de Educación Superior*, *10*, 60-85.

Otero, M., Corica, A., Sureda, P., Fanaro, M., Llanos, V. y Parra, V. (2013*). La Teoría Antropológica de lo Didáctico en el aula de Matemática*. Buenos Aires, Argentina: Editorial Dunken.

Rojas, C.& Sierra, T (2021). Conocimientos geométricos como respuesta a un problema espacial en el desarrollo de un recorrido de estudio e investigación. Educación Matemática, *33*(1), 208 – 238.

Serrano, L. (2013). *La modelización matemática en los estudios universitarios de economía y empresa: análisis ecológico y propuesta didáctica.* (Tesis de Doctorado).