



## **Atividade de Modelagem Matemática desenvolvida no contexto remoto: uma análise das etapas da experimentação**

Karina Alessandra Pessoa da Silva  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Londrina  
[karinasilva@utfpr.edu.br](mailto:karinasilva@utfpr.edu.br)

### **Resumo**

Neste artigo trazemos resultados para a questão: Como as etapas da experimentação se configuraram no desenvolvimento de uma atividade de modelagem no contexto remoto? Com isso, pautamo-nos na Modelagem Matemática como uma possibilidade para abarcar conteúdos matemáticos e na experimentação como recurso didático. A análise qualitativa, de cunho interpretativo, dos registros produzidos no ambiente virtual por um grupo de alunos na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral de uma universidade federal brasileira, revelou que as etapas da experimentação seguem as necessidades para abarcar conteúdos matemáticos estudados na disciplina.

*Palavras-chave:* Educação Matemática; Ensino Superior; Modelagem Matemática; Experimentação; Cálculo Diferencial e Integral; Contexto remoto; Moodle.

### **Introdução**

No âmbito do Ensino Superior, em cursos em que a Matemática é considerada de aplicação, algumas tendências da Educação Matemática podem ser implementadas de modo a colocar o aluno em uma posição ativa no processo de ensino e de aprendizagem. Em atividades de modelagem matemática, os alunos investigam situações, identificando e resolvendo problemas, por meio de conhecimentos matemáticos. A Modelagem Matemática nas aulas de Matemática permite a transição “entre matemática, ciências experimentais e engenharia” (Carreira & Baioa, 2018, p. 212). Segundo Halverscheid (2008, p. 226), os experimentos “encontram seu lugar natural na estrutura da modelagem matemática, porque representam o ‘resto do mundo’ para o qual os modelos matemáticos são construídos”.

Na literatura, a implementação da modelagem nas aulas de Matemática do Ensino Superior por meio de atividades experimentais tem sido recorrente (Halverscheid, 2008; Carreira & Baioa, 2015, Silva et al., 2018). Nos anos de 2020 e 2021, devido ao contexto pandêmico, a organização das disciplinas presenciais e, conseqüentemente, o desenvolvimento de atividades de modelagem com atividades experimentais e a experimentação precisaram ser reestruturados.

Considerando esse contexto, nos debruçamos em investigar: Como as etapas da experimentação se configuraram no desenvolvimento de uma atividade de modelagem no contexto remoto? Para isso, nos subsidiamos numa análise qualitativa de cunho interpretativo dos dados produzidos pelos integrantes de um grupo que, no primeiro semestre de 2021, cursou a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral de uma variável real (Cálculo 1) no contexto remoto.

### **Modelagem matemática com experimentação**

A experimentação é um recurso didático considerado construtivo, capaz de estabelecer relações entre diversas áreas da ciência, cujo papel para o ensino é propor a “criação de situações que discutam com o sujeito aprendiz a apropriação de conhecimentos já existentes para as ciências, mas novos para o sujeito” (Lima & Teixeira, 2011, p. 6).

No contexto educacional, Emden e Sumfleth (2014) caracterizam três etapas para o desenvolvimento de uma experimentação: (1) os alunos precisam ter uma ideia e estruturar uma hipótese para resolver um problema; (2) a partir dessa ideia ou hipótese os alunos planejam e executam um experimento (físico, computacional, geométrico ou algébrico); (3) os resultados da experimentação são apresentados pelos alunos, podendo levar à revisão da hipótese inicial.

A experimentação, articulada às aulas de Matemática, tem sido discutida em pesquisas presentes na literatura (Borba & Villarreal, 2005; Silva et al., 2018). Para Borba e Villarreal (2005), a abordagem experimental em tarefas matemáticas inclui desde a formulação de conjecturas, o uso de conteúdos matemáticos para encontrar soluções aos problemas até a análise dessas soluções. Os “problemas em modelagem são centrados em uma situação real e requerem uma transferência exigente entre o mundo real e a matemática” (Elfringhoff & Schukajlow, 2021, p. 10). Segundo Elfringhoff e Schukajlow (2021),

quando os alunos têm um alto nível de interesse inicial antes de resolverem um problema, seu envolvimento na solução de problemas pode aumentar e, por meio do envolvimento, os alunos podem manter o interesse e aumentar suas competências de modelagem a longo prazo. (Elfringhoff & Schukajlow, 2021, p. 27)

Ao se fazer uma interpretação matemática para o problema, há a necessidade de perpassar por uma representação matemática. Tal representação matemática consiste no modelo matemático, um sistema conceitual descritivo expresso por uma estrutura matemática. Segundo Carreira e Baioa (2015, p. 835), para “se tornar um modelo, o sistema deve ser útil para descrever, representar, interpretar, explicar ou fazer previsões sobre um fenômeno e seu comportamento”.

No encaminhamento do problema para sua solução, obtida por meio de um modelo matemático, há necessidade de buscar informações, identificar e selecionar variáveis, elaborar

hipóteses, realizar simplificação, validar o modelo, além de analisar a solução para o que está sendo investigado. Essas ações caracterizam uma atividade de modelagem matemática e podem subsidiar uma abordagem experimental no âmbito do Ensino Superior.

### **Aspectos metodológicos**

No primeiro semestre de 2021, na disciplina de Cálculo 1, na modalidade de dependência (DP), formada por 77 alunos dos sete cursos de Engenharias de um dos *campi* de uma instituição federal brasileira, dentre as atividades desenvolvidas no contexto remoto, foram implementadas atividades de modelagem.

Nas aulas síncronas, as atividades de modelagem foram desenvolvidas com o intuito de introduzir ou aplicar conteúdo da disciplina e as temáticas foram escolhidas pela professora. Além dessas atividades, os alunos foram convidados a escolher, em grupos, uma situação-problema para ser investigada no Ambiente Virtual de Ensino e Aprendizagem (AVEA), institucionalmente implementado – o Moodle. Neste AVEA foi criada uma Wiki da Atividade de Modelagem (AM) em que os grupos pudessem interagir com seus integrantes adicionando e editando uma coleção de páginas da web e realizando encontros subsidiados pelo BigBlueButton (BBB), integrado ao Moodle. Os encontros poderiam ser gravados para que a professora pudesse acessar as discussões. Além do AVEA, os grupos poderiam solicitar orientações síncronas com a professora.

O desenvolvimento da AM se iniciou no dia 19 de julho com a escolha da situação-problema a ser investigada e finalizou no dia 24 de agosto com a postagem de um vídeo de cada grupo, apresentando os resultados abarcados.

Os registros escritos, de áudio e de vídeo construídos na Wiki de um dos 14 grupos subsidiaram nossa análise qualitativa de cunho interpretativo de modo a trazer reflexões para a questão de pesquisa. Consideramos para nossa análise o G3 que escolheu desenvolver uma atividade de modelagem em que coletou empiricamente os dados relativos à temperatura de uma amostra de água sob duas condições: acima da temperatura ambiente, deixada para resfriar, e em temperatura ambiente inserida no refrigerador. Além disso, foi o único grupo que solicitou encontros síncronos de orientação com a professora, além de produzir vídeos da coleta de dados e gravar os encontros dos integrantes.

### **Descrição e análise da atividade de modelagem**

Para iniciar a abordagem da situação escolhida para a experimentação, o G3, formado por seis integrantes – Nicole, André, Arlete, Erica, João e Vick (nomes fictícios) –, fez uma pesquisa na Anvisa (Agência Nacional de Vigilância Sanitária) sobre a temperatura recomendada para o interior do refrigerador – cerca de 5°C. Essas informações demarcaram o interesse dos alunos no desenvolvimento da atividade de modo que a solução para o problema poderia subsidiar e manter o interesse (Elfringhoff & Schukajlow, 2021).

Diante das informações disponibilizadas no AVEA, a professora fez intervenções escritas de modo a entender os encaminhamentos que o grupo havia antecipado para a coleta de dados,

porém o grupo já tinha iniciado o trabalho com a experimentação considerando duas amostras de líquidos em quantidades distintas. Por meio das intervenções, a professora se insere no grupo subsidiando e orientando os encaminhamentos da atividade de modelagem (Silva et al., 2018).

No entanto, para essa inserção houve necessidade de a professora entender a intenção do grupo com a experimentação. Em orientação, em um encontro síncrono, solicitado pelo G3, a professora novamente questionou-os sobre a situação-problema a ser investigada e os integrantes justificaram:

*André: A ideia da atividade foi de podermos analisar uma situação do nosso cotidiano, de como podemos utilizar cálculos matemáticos para atividades corriqueiras. Em que por meio de uma coleta de dados, conseguíssemos relacionar os estudos de funções, noções intuitivas de limites e taxa de variação instantânea.*

*Arlete: O que a gente queria era saber como ocorre o resfriamento fora da geladeira e dentro da geladeira. A taxa de variação instantânea. Por exemplo, um líquido quente que estava esfriando e quando colocado na geladeira.*

*Professora: Entendi, mas como foi essa coleta que vocês relataram no Moodle.*

*João: A gente fez com duas amostras, mas aí não dá muito certo professora.*

*Professora: E por que não?*

*João: Eu conversei com Arlete e pensamos que tinha de ser a mesma quantidade as duas amostras até para analisar né. E quem sabe até a mesma amostra que resfria e depois a gente coloca na geladeira.*

*Arlete: Poderia ser algo hipotético? A gente escolhe a água e consideramos que pode ser o comportamento de outros alimentos líquidos?*

*Professora: E o que vocês analisariam.*

*Nicole: A mesma coisa professora. Mas o nosso alimento poderia ser a água?*

De posse de um tema do interesse, relacionado à uma situação da realidade, os alunos intentaram *utilizar cálculos matemáticos para atividades corriqueiras* (comentários de André). De antemão, os alunos se atentaram em centrar a atenção em uma situação real que requer uma transferência para a matemática” (Elfringhoff & Schukajlow, 2021). No entanto, com a comunicação do que pretendiam estudar para a professora, houve a necessidade de alterar os encaminhamentos e uma nova coleta de dados se fez necessária.

Uma amostra de 100 mL de água foi aquecida até atingir a temperatura máxima de 91,3<sup>o</sup>C. Essa amostra foi deixada em temperatura ambiente e, com um termômetro, o G3 fez aferições a cada 10 minutos. Utilizando o *software* GeoGebra, o G3 plotou os pontos no plano cartesiano e ajustou-os a uma curva logística representada por  $y = \frac{21,0653}{1-0,7692e^{-0,0798x}}$ , em que  $y$  era a temperatura em <sup>o</sup>C em função do tempo  $x$  em minutos. Para a escolha desse ajuste, os alunos levaram em consideração o comportamento do fenômeno com o passar do tempo. Um modelo matemático que poderia ter sido considerado e que foi discutido por G3 foi o exponencial, porém ao analisar o limite da função com  $x$  tendendo ao infinito, a temperatura tendia a zero, o que fez o grupo descartá-lo.

Quando a água atingiu 21<sup>o</sup>C, que era a temperatura ambiente no momento da coleta de dados, a amostra foi colocada num refrigerador que estava a uma temperatura de 5,1<sup>o</sup>C. Novamente a temperatura foi aferida a cada 10 minutos e os valores coletados foram dispostos em uma planilha do *software* GeoGebra e, de modo análogo ao que foi feito na condição da coleta de dados anterior, os alunos analisaram o limite de diferentes curvas a serem ajustadas e optaram pela curva logística:  $y = \frac{2,5114}{1-0,8806e^{-0,0107x}}$ .

As representações gráficas e algébricas de ambos os modelos matemáticos são apresentadas na Figura 1.



Figura 1. Curvas ajustadas para o experimento realizado.

Os modelos, de certo modo, descreveram e representaram a situação em estudo e permitiram “explicar ou fazer previsões sobre um fenômeno e seu comportamento” (Carreira & Baioa, 2015, p. 835).

Considerando os modelos matemáticos representativos, ao calcular os limites das funções, a temperatura da amostra de água chegaria bem próxima à temperatura ambiente. No caso da inserção na geladeira, o G3 considerou a necessidade de representar um novo modelo para descrever o resfriamento da água, conforme explicações transcritas a seguir:

*Nicole: No caso da amostra na geladeira, ao calcular o limite chegamos em 2,51, ou seja, um resultado muito diferente de 5,1 que era a temperatura mínima, obtida dentro da geladeira.*

*Arlete: Tendo em vista esse resultado, que consideramos uma invalidade, buscamos por hipóteses para explicar essa invalidade. A que melhor se encaixou foi levando em consideração que, quando foi feita a coleta de dados, a geladeira foi*

*aberta diversas vezes. Então com isso, ela foi sofrendo diversas variações. Então tendo em vista tanto essa hipótese e o fato de que a partir de um certo momento a geladeira ia se manter fechada e a temperatura ia se manter constante, a gente começa a envolver a ideia de funções por partes. [explicou o encaminhamento utilizado para a obtenção das sentenças].*

Considerando a temperatura de  $5,1^{\circ}\text{C}$ , foi feita a substituição na expressão algébrica do modelo, obtendo um tempo aproximado de 51 minutos. Assim, o G3 expressou um “novo” modelo matemático para a situação da amostra de água dentro da geladeira, bem como a representação gráfica (Figura 2). Em não se considerando um modelo matemático válido para o fenômeno, os alunos buscaram por abordagens matemáticas estudadas na disciplina – *a gente começa a envolver a ideia de funções por partes* (comentários de Arlete). Trata-se, portanto, de se realizar um ajuste no modelo para que este ficasse mais próximo da realidade (Borba & Villarreal, 2005).

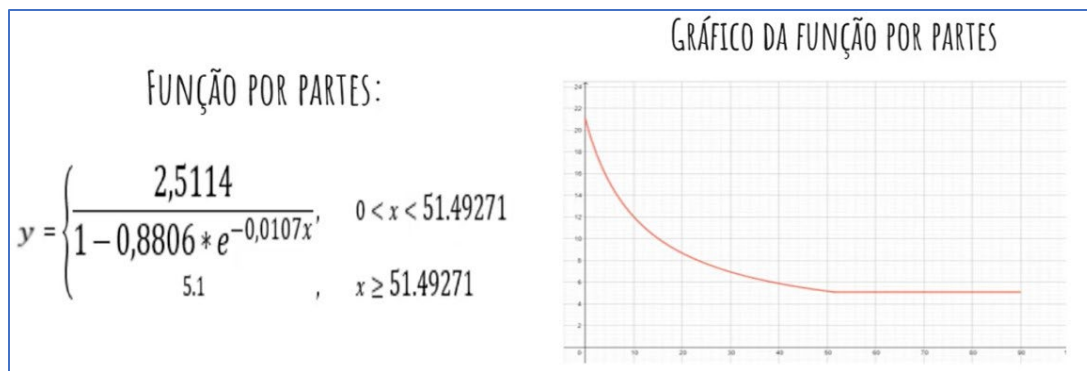


Figura 2. Modelo matemático para a amostra dentro do refrigerador.

Uma abordagem ainda considerada pelo grupo e que fazia parte da definição do problema dizia respeito à taxa de variação instantânea da temperatura em função do tempo nas duas condições: no ambiente fora e no ambiente dentro do refrigerador. De modo a fazer uma comparação, o grupo determinou o tempo de 10 minutos e obteve que a taxa de variação instantânea para a temperatura do líquido no ambiente fora do refrigerador foi de, aproximadamente,  $-1,362^{\circ}\text{C}/\text{minutos}$  e do líquido no ambiente dentro do refrigerador foi de, cerca de,  $-0,488^{\circ}\text{C}/\text{minutos}$ .

No vídeo de apresentação dos resultados, um dos integrantes do grupo utilizou o gráfico da derivada de cada uma das funções para tecer suas considerações (Figura 3), conforme explicava o encaminhamento e os resultados obtidos:

*João: Fica claro para nós que a taxa de variação da primeira condição é muito maior do que quando comparada com a da segunda expressão, que era de dentro da geladeira. Isso podemos ver graficamente também [mostra a representação gráfica das derivadas – Figura 3]. Graficamente nos mostra de que, quando estava fora da geladeira, tinha uma taxa de variação muito maior [percorrendo a curva verde com o mouse] quando comparado com a taxa quando estava dentro da geladeira [percorrendo a curva roxa com o mouse – Figura 3].*

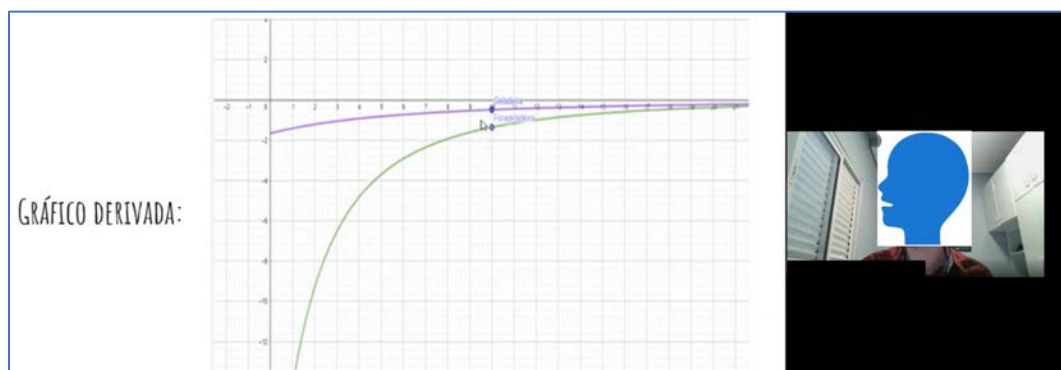


Figura 3. Representação gráfica das derivadas dos modelos matemáticos deduzidos.

Podemos evidenciar que o G3 se interessou em utilizar diferentes representações para analisar os modelos matemáticos, tanto que sentiram necessidade de mostrar a representação gráfica da derivada para explicar os resultados obtidos algebricamente para a taxa de variação instantânea.

### Algumas considerações

O desenvolvimento de uma atividade de modelagem subsidiada por experimentação em que um grupo de alunos criou e discutiu “conhecimentos já existentes para as ciências, mas novos para o sujeito” (Lima & Teixeira, 2011, p. 6), proporcionou abordagens de conteúdos matemáticos estudados na disciplina de Cálculo 1.

A partir do convite da professora em empreender esforços na escolha de uma situação que para se fazer “uma transferência exigente entre o mundo real e a matemática” (Elfringhoff & Schukajlow, 2021, p. 10), os alunos buscaram por um fenômeno que poderia fazer parte do cotidiano. Ao observar alimentos aquecidos que resfriavam com a temperatura ambiente antes de serem levados ao refrigerador, os alunos tiveram uma ideia para resolver um problema – etapa 1 do desenvolvimento de uma experimentação (Emden & Sumfleth, 2014). Diante disso, planejaram e executaram um experimento físico (etapa 2) sem se atentarem a alguns cuidados, como o tipo e a quantidade da amostra analisada. Neste caso, regularidades matemáticas não poderiam ser deduzidas. Neste tocante, com a apresentação de possíveis resultados da experimentação (etapa 3), a professora se inseriu no grupo orientando possíveis encaminhamentos, com cautela para não interferir em demasia na abordagem da situação e o interesse do grupo diminuir.

Por meio de questionamentos, os alunos sentiram necessidade de realizar uma nova coleta de dados empíricos, por meio de uma revisão da hipótese inicial (etapa 3) de modo que experimentações computacionais, gráficas e algébricas (etapa 2) subsidiassem a análise e a abordagem dos conteúdos matemáticos emergentes. No entanto, mesmo considerando os ajustes apresentados pelo *software* GeoGebra, os alunos mostraram entender os comportamentos das funções aliadas à situação em estudo.

O que podemos evidenciar foi que as ações dos alunos, de forma conjunta, revelaram que as etapas da experimentação seguiram as necessidades para abarcar conteúdos matemáticos estudados na disciplina. Todavia há de se evidenciar que os alunos realizaram simplificações com relação ao fenômeno em estudo, no caso, não considerar a variação de temperatura ambiente, que poderia ser associada ao modelo matemático por meio de uma abordagem envolvendo a composição de funções. Além disso, a professora poderia ter aproveitado a abordagem do grupo para discutir a lei de resfriamento de Newton e analisá-la com relação ao fenômeno estudado.

### Referências

- Borba, M., y Villarreal, M. (2005). *Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking: Information and communication technologies, modeling, visualization and experimentation*. New York: Springer.
- Carreira, S., y Baioa, A. M. (2015). Assessing the best staircase: student’s modelling based on experimentation with real objects. *Proceedings of the Congress of the European Society of Research in Mathematics Education* (pp. 834-840). Prague.

- Carreira, S., y Baioa, A. M. (2018) Mathematical modelling with hands-on experimental tasks: on the students' sense of credibility. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 50(1-2), 201-215.
- Elfringhoff, M. S., y Schukajlow, S. (2021). What makes a modelling problem interesting? Sources of situational interest in modelling problems. *Quadrante*, 30(1), 8-30.
- Emden, M., y Sumfleth, E. (2014). Assessing students' experimentation processes in guided inquiry. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 14(1), 29-54.
- Halverscheid, S. (2008). Building a local conceptual framework for epistemic actions in a modelling environment with experiments. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 40(2), 225–234.
- Lima, K. E. C., y Teixeira, F. M. (2011). A epistemologia e a história do conceito experimento/experimentação e seu uso em artigos científicos sobre ensino das ciências. En *Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências / Congresso Iberoamericano de Investigación en Enseñanza de las Ciencias*, Campinas. VIII - ENPEC/I CIEC.
- Silva, K. A. P., Vertuan, R. E., y Silva, J. M. G. (2018). Ensino por investigação nas aulas de Matemática do curso de licenciatura em Química. *Amazônia*, 14(31), 54-72.