



Errores y dificultades en la modelización matemática: Un caso con estudiantes de educación secundaria

Karen **Porras** Lizano

Escuela de Matemática, Universidad Nacional
Costa Rica

karen.porras.lizano@una.cr

Elena **Castro-Rodríguez**

Universidad de Granada

España

elenacastro@ugr.es

Juan Luis **Piñeiro** Garrido

Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación
Chile

juanluis.pineiro@umce.cl

Resumen

Llevamos a cabo un estudio cualitativo para identificar y caracterizar los errores y dificultades que incurren estudiantes de educación secundaria al resolver una tarea de modelización. Los estudiantes fueron instruidos en el proceso de modelización desde educación primaria. Los resultados muestran que no aplicaron todas las fases de la modelización, siendo la de validación la más perjudicada. Detectamos una mayor presencia de errores debidos a asociaciones incorrectas al resolver el modelo matemático. Concluimos que los errores son elementos de reflexión que deben incentivar la búsqueda de estrategias de enseñanza que ayuden a superar las deficiencias de los estudiantes en la modelización.

Palabras clave: Educación matemática; Educación secundaria; Modelización matemática; Dificultades; Errores; Costa Rica.

Introducción

Diversas corrientes en educación matemática coinciden en la concepción de la modelización como una transición entre la realidad y la matemática en la resolución de

problemas con contexto real (Ledezma et al., 2022). En las actividades de modelización, el pensamiento matemático del resolutor es involucrado en tareas complejas, requiriendo “describir, explicar, debatir, justificar, predecir, escuchar de forma crítica y cuestionar de manera constructiva” (English, 2007, p. 8), procesos esenciales para una vida profesional futura. No obstante, la complejidad de las tareas de modelización matemática que promueven su aprendizaje conlleva una serie de errores y dificultades en los que incurren los estudiantes (Guerrero, 2016).

La mayoría de las investigaciones se han centrado en detectar y categorizar los errores cometidos en el proceso de resolución de problemas, así como sus causas (e.g., Guerrero, 2016; Socas et al., 2016). Dichos estudios muestran que los estudiantes presentan deficiencias tanto en el contenido matemático como en el manejo de las fases de la modelización matemática — descripción, manipulación, predicción y validación (Lesh y Doerr, 2003). Por ello, es necesario estudiar tanto los errores relacionados específicamente con la matemática, como los que se involucran en las fases del proceso de modelización.

En Costa Rica la modelización matemática es presentada como parte fundamental del currículo y aunque en algunas partes de este documento se encuentran menciones sobre la perspectiva de modelización contextual propuesta por Lesh y Doerr (2003), la perspectiva teórica de modelización que sigue este documento no es clara. Ante esto, en este trabajo nos centramos en un grupo de estudiantes de educación secundaria que deberían haber sido instruidos a lo largo de su educación con este enfoque. Lo que podría incentivar la detección y tratamiento de los errores de una forma crítica y constructiva (English, 2007). Específicamente, identificamos y caracterizamos los errores en los que incurren un grupo de estudiantes de Costa Rica cuando aplican las fases del proceso al resolver una tarea de modelización matemática.

Errores en educación matemática

Los errores son un punto de partida para proponer medidas con el fin de prevenir, detectar, atender y solventar las deficiencias que impiden avanzar a los estudiantes en su aprendizaje (Ruano et al., 2008). En este trabajo nos situamos en la línea de investigación sobre el diagnóstico, análisis, documentación y clasificación de los errores más comunes (Abrate et al., 2006). Específicamente, nos basamos en la clasificación de errores propuesta por Abrate et al. (2006), basada en los estudios de Movshovitz-Hadar et al. (1987) y Radatz (1980), la cual contempla las siguientes categorías:

1. Errores debidos al lenguaje matemático: se producen por una traducción incorrecta entre lenguajes, por ejemplo, del lenguaje natural al lenguaje formal matemático o viceversa.
2. Errores debidos a dificultades para obtener información espacial: errores cometidos por los estudiantes al procesar información presentada mediante imágenes visuales.
3. Errores debidos a inferencias o asociaciones incorrectas: son generados al aplicar reglas y propiedades que son válidas en contextos parecidos o relacionados, se producen por falacias de razonamiento, y no se deben al contenido específico.
4. Errores debidos a la recuperación de un esquema previos: se deben a la persistencia de algunos aspectos del contenido o del proceso de resolución de una situación, a pesar de que la tarea matemática es nueva.

5. Errores debidos a cálculos incorrectos o accidentales, como añadir datos extraños o información inconsistente, el olvido de algún dato, entre otros.
6. Errores eventuales debidos a deficiencias en la construcción de conocimientos previos: son causados por aprendizajes incorrectos o inadecuados de hechos, destrezas y conceptos previos que interfieren en un adecuado procesamiento de la información.
7. Errores debidos a la ausencia de conocimientos previos: la causa del error es la carencia en aprendizajes de hechos, destrezas y conceptos previos, es decir, la falta del conocimiento previo necesario para construir una base conceptual más compleja.

Modelización matemática

Los modelos matemáticos son “sistemas conceptuales utilizados para construir, describir o explicar otros sistemas, e incluyen un sistema conceptual y los procedimientos que lo acompañan” (Gallart et al., 2017, p. 266). La modelización matemática es entendida como el procedimiento que parte de un problema del mundo real, el cual requiere de simplificación para elaborar un modelo matemático, plantear conjeturas sobre este y utilizar la matemática como instrumento para elaborar una respuesta, finalizando, con el análisis de los resultados y su contraste con el problema inicial (López et al., 2017). Por tanto, es considerado un proceso complejo (Gallart et al., 2017).

Según Lesh y Doerr (2003), se desarrolla de forma cíclica y no-lineal (Czocher, 2017), a través de cuatro fases: descripción (la información relevante se comprende y se sistematiza), manipulación (se obtiene y resuelve el modelo matemático que representa el problema), predicción (se interpretan y analizan los resultados en relación con las condiciones del problema), y validación (se reflexiona y juzga la viabilidad de la solución del problema matemático). Para Borromeo Ferri (2007) cada sujeto construye su pensamiento por medio de rutas de modelización, en el que se describe el proceso individual (interno o externo) que realiza según su preferencia al modelizar (Borromeo Ferri, 2007). Es decir, “inicia este proceso durante una determinada fase, según sus preferencias, y luego pasa por diferentes fases varias veces o solo una, enfocándose en ciertas fases y/o ignorando otras” (Borromeo Ferri, 2007, p. 265). Por tanto, y debido a la complejidad del pensamiento que requiere este proceso, es aquí donde el estudiante podría presentar dificultades manifestadas a través de errores específicos de cada una de las fases del ciclo de modelización (Guerrero, 2016).

Metodología

La investigación realizada sigue un enfoque cualitativo. Se aplicó una tarea de modelización a 24 estudiantes del nivel de séptimo de Educación Secundaria cuya edad promedio fue de 13 años y con un estatus socioeconómico medio-bajo, que corresponde al K7 de K11 de la educación general básica de Costa Rica. La implementación de la tarea se realizó en las clases de matemática, en la que participaron 22 estudiantes, divididos en grupos de 2 a 3 estudiantes. Esta configuración fue realizada por los mismos estudiantes como es habitual en su trabajo de aula, obteniendo 8 grupos en total.

La tarea de modelización matemática utilizada para este estudio (ver Figura 1) fue validada en un proceso de investigación previo (Porras y Fonseca, 2015) y cumplen con los principios

propuestos por Lesh et al. (2003) —significado personal, construcción del modelo, autoevaluación, documentación, prototipo simple y generalización del modelo— que las caracterizan como actividades de modelización matemática.

¡Hola! Soy Mario, necesito tu ayuda con un problema acerca de mi mesada. Cuando mi hermana Mariela tenía 13 años, recibía una mesada de ₡2000 pero eso fue hace diez años. Ahora yo tengo 13 años. Mis padres me dan ₡2000 a la semana también. Creo que deberían de aumentar mi mesada teniendo en cuenta que las cosas cuestan más en la actualidad. En Costa Rica con ₡2000 ya no se puede comprar lo mismo que compraba mi hermana hace diez años.

Para probar mi hipótesis he recogido los precios de hace 10 años de algunos artículos. De igual forma, recolecté los precios de los artículos similares en la actualidad.

¡Esto es lo que necesito de tí!

Usa la información de los precios actuales y de hace 10 años para determinar ¿cuál debe ser el monto actual de mi mesada?. Justifica tu respuesta con razones lógicas pues mis padres no aceptarán argumentos emocionales o ilógicos.

Además explica el método de solución del problema para que tus compañeros en situaciones similares lo puedan utilizar para determinar cuáles deben ser sus entradas en la actualidad.



Figura 1. Precios de Sateques hace 10 años



Figura 2. Precios de Sateques en el 2012



Figura 3. Precio de Play Station hace 10 años



Figura 4. Precio de Play Station actualmente



Figura 5. Combo Papa Johns hace 10 años



Figura 6. Combo Papa Johns en el 2012

Figura 1. Tarea 1 de modelización “Calculando mi mesada” (Porras y Fonseca, 2015, p. 56-57)

Los datos se recolectaron a través de las producciones escritas de los participantes y la realización de entrevistas. En primer lugar, se aplicó la actividad de modelización matemática en una sesión de 80 minutos. Al inicio se realizó una presentación de la actividad, para familiarizar al estudiante con el contexto utilizado. Se le pidió que escribieran todas sus respuestas en un informe, también se recogió información de algunos borradores de los procesos que los estudiantes realizaron. Con ello, recopilamos las producciones escritas de los procedimientos de los estudiantes. En segundo lugar, después de la implementación de la tarea se realizaron entrevistas individuales a algunos de los estudiantes de los grupos seleccionados en forma aleatoria con el fin de contrastar los resultados obtenidos de las producciones escritas y conocer más acerca de los procesos realizados que evidenciaban errores y dificultades de los estudiantes al resolver las situaciones problema.

El tratamiento de los datos contempla un análisis de contenido, utilizando la teoría de Lesh y Doerr (2003) para los errores específicos de las fases del ciclo de modelización. Además, se utiliza la categorización de Abrate et al. (2006) para el análisis de errores matemáticos. En ella se proponen clasificaciones como errores debidos a (a) uso del lenguaje matemático, (b) dificultades para obtener información espacial, (c) inferencias o asociaciones incorrectas, (d) la recuperación de un esquema previo, (e) cálculos incorrectos o accidentales, (f) deficiencias en la construcción de conocimientos previos y (g) la ausencia de conocimientos previos.

Resultados

Los resultados respecto a omisiones específicas de las etapas del ciclo de modelización señalan que, en general, los grupos participantes no aplicaron todas las fases del proceso de modelización matemática —descripción, manipulación, predicción y validación. Cada grupo de estudiantes planteó una respuesta a la tarea, por lo que se obtuvo un total de 8 respuestas, todas

ellas incorrectas. La Figura 2 presenta las distintas rutas de modelización de preferencia según el estilo de pensamiento matemático de los grupos participantes al resolver la tarea propuesta.

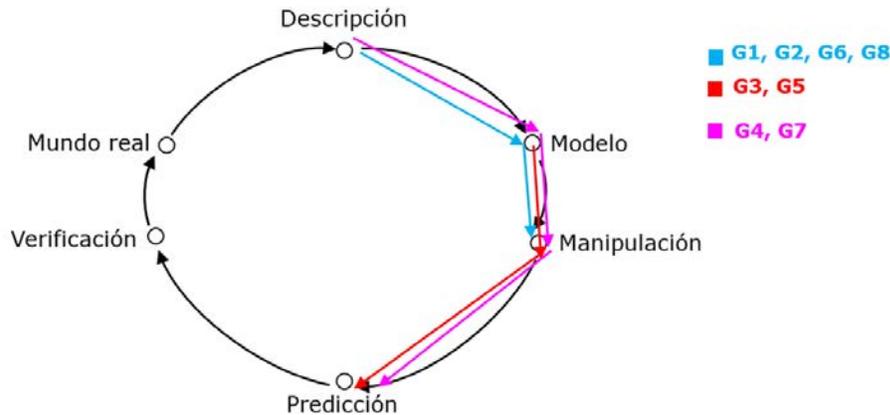


Figura 2. Rutas de pensamiento al resolver la tarea de modelización.

En la figura anterior observamos que se obtuvieron 3 rutas distintas de modelización. Donde 4 de los grupos involucrados (G1, G2, G6, G8), coincidieron en una misma ruta, es decir realizaron las mismas etapas del ciclo de modelización, específicamente: Descripción-Modelo-Manipulación. El resto de los grupos realizaron rutas distintas a la anterior, usando igual cantidad (2 etapas) o más (3 etapas) del ciclo en comparación a la primera ruta mencionada.

En cuanto a cada una de las fases, encontramos que dos de los grupos omitieron la primera fase, descripción, planteando directamente el modelo matemático sin realizar una sistematización previa de la información, esto se evidencia en la figura 3(a).

Handwritten student work showing calculations: $2,995 + 2,115 + 3,990 = 9,100$ and $9,800 + 5,750 + 11,350 = 26,900$. Below the calculations, the student writes: "Aprecio de la comida de 26,900 de mesada" and "ya que en tiempos actuales todo es caro".

(a) Omisión de etapa descripción

Handwritten student work listing items and prices: 180500 Playstation, 2805 Bolso, 7360 Pizza. The question asks for the current amount of the allowance. The student lists: "Actual Debe de ser \$5000", "Bolso: en 1 semana", "Pizza: en 2 semanas", "Play 3: en 60 días".

(b) Omisión de la etapa manipulación

Handwritten student work showing calculations: $2,105 = 9,800$, $2,115 = 256,750$, $+ 3,900 = 11,350$, $8,200 / 277,900$, $= 2,69,600$. Below, the student writes "6" and $2000,33 = 66,000$.

(c) Omisión de etapa validación

Figura 3. Ejemplos de omisión de las etapas del ciclo de modelización.

Para la segunda fase, manipulación, dos de los grupos (G4 y G6) omitieron la construcción del modelo matemático y la resolución de este, ejecutando también la primera fase — descripción— esto se muestra en la figura 3(b). Aquí los estudiantes del grupo 4 en su solución brindan las cantidades de \$180 500 para Playstation, \$2805 para el bolso y \$7360 para la Pizza. Además, afirman que el monto de la mesada debe ser \$5000. Sin embargo, no justifican como dedujeron estas cantidades, por lo que se les preguntó a los estudiantes a cerca de este razonamiento:

Profesora: ¿Cómo obtuvieron los montos que ubican al inicio de la solución?

Estudiante: Lo que hicimos fue restar los números de hace 10 años con los actuales, por eso obtuvimos esos resultados.

Profesora: Y el monto de la mesada de \$5000 ¿Cómo lo obtuvieron?

Estudiante: Lo que hicimos fue darnos una cantidad más alta y ver si efectivamente con ese monto, con el transcurrir de las semanas o días, Mario podría comprar cada uno de los artículos actualmente.

Sin embargo, este razonamiento es incorrecto para algunos casos. Por ejemplo, al realizar la diferencia del precio actual menos el precio hace diez años correspondiente al artículo bolso, no coincide con el resultado de \$2805. Tampoco, el multiplicar \$5000 por 9 semanas (aproximadamente 60 días), coincide con el monto superior de \$180 500, para que Mario compre el artículo. Por lo que, la solución propuesta no es correcta.

En relación con la tercera fase, predicción, cuatro de los grupos (G1, G2, G6, G8) omitieron esta fase al gestar una respuesta numérica, pero no una interpretación, ni el proceso utilizado para concebirla. Esto sugiere que han estado expuestos a una enseñanza donde se prioriza la respuesta final, y no el proceso para llegar a ella. Finalmente, para la cuarta etapa, validación, no se aplicó durante ninguna de las rutas del proceso de modelización. Ninguno de los grupos realizó una reflexión y juzgó la viabilidad de la solución final obtenida. Un ejemplo de la omisión de ambas etapas, es decir tanto de predicción como la validación, se muestra en Figura 3(c) donde se observa la solución del grupo 8, cuando calculan los totales al sumar los precios de los tres artículos de hace 10 años y los de la actualidad, obteniendo como resultados 8300 y 277900 respectivamente. Sin embargo, los estudiantes cometen errores, obteniendo datos incorrectos. Posteriormente buscaron la diferencia entre ambos totales, obteniendo como resultado 269600, por lo que los estudiantes querían saber cuánto dinero había aumentado los precios de los mismos artículos al transcurrir 10 años. En la solución del problema aparece la multiplicación $2000 \times 33 = 66000$, pero se omite información en la solución sobre cómo se obtuvo el factor de 33. En la entrevista que se realizó, se consultó sobre ello:

Profesora: ¿Qué operaciones realizaron para obtener el factor de 33 que utilizan en el producto de 2000×33 que aparece como la última operación de la solución del problema?

Estudiante: Comenzamos a darnos números que al multiplicarlos por esta cantidad (señalando el valor de 8300) nos dieran 277900. Probamos varios números, hasta que encontramos la cantidad más cercana.

Profesora: ¿Y esa cantidad cercana fue el número 33?

Estudiante: Sí, así es.

Profesora: ¿Y este fue el resultado final? ¿33 es el aumento a la mesada de Mario?

Estudiante: Sí eso fue lo que nos dio. Hay algo malo, porque no puede ser tan poquito.

Como vemos en el diálogo anterior, los estudiantes observan que la solución es incorrecta, pero no realizaron una revisión de la solución del problema, es decir, no aplicaron la etapa de validación del proceso de modelización matemática. Por tanto, los resultados obtenidos muestran que, en general, los subgrupos participantes no aplicaron todas las fases del proceso de modelización matemática.

Atendiendo a la clasificación de Abrate et al. (2006), en la actividad de modelización, la categoría de los errores debidos a asociaciones incorrectas (con respuestas de aumentos incorrectos) fue la que presentó mayor frecuencia. En la figura 3, todas las soluciones expuestas son ejemplos de este tipo de error. También se obtuvo otros tipos de errores, que coinciden con los expuestos por Socas et al. (2016) como la confusión del punto de separación de las unidades de millar, con la coma que separa la parte decimal en las cantidades y como el resolver incorrectamente operaciones aritméticas básicas por recuperación de un esquema antiguo del conocimiento (como confundir la operación división con números naturales con la de cantidades decimales). Los hallazgos de las entrevistas confirmaron que la falta de realización de la fase de validación, o sea una reflexión y juicio de la viabilidad de la solución, a la luz de las condiciones del problema, podría haber evitado muchos errores matemáticos antes expuestos. Lo que concuerda con los resultados de Guerrero (2016) y Socas et al. (2016).

Conclusiones

Si bien, la omisión de alguna etapa del proceso de modelización por sí sola no constituye un error, los resultados obtenidos sugieren que gran parte de los errores pudieron haber sido superados si los estudiantes hubieran realizado la etapa de validación de la solución del problema, ya sea a través de una revisión previa de los procesos matemáticos al final o durante el proceso cíclico de modelización. Concluimos que a pesar de que el currículo de Costa Rica contempla la modelización como un elemento esencial de la contextualización activa en el aprendizaje matemático (MEP, 2012) y los estudiantes participantes deberían haber sido formados desde la educación primaria en ambientes de modelización, los errores encontrados vislumbran un panorama que no coincide con la formación que debieron haber recibido, por ello se consideran elementos de reflexión, avance y retroalimentación para la labor docente.

Consideramos que es necesario hacer más énfasis en la enseñanza de las etapas del ciclo de la modelización, con especial atención a la necesidad de reflexionar en el proceso seguido, la razonabilidad de la solución y su validación. Al mismo tiempo, incentivar la búsqueda de estrategias de enseñanza adecuadas que ayuden a solventar las deficiencias presentes al resolver actividades de modelización, como las detectadas en este estudio.

Reconocimiento

Este trabajo ha sido desarrollado como parte de la tesis doctoral titulada “Conocimiento profesional de maestros de primaria en ejercicio sobre modelización matemática” dentro del Doctorado en Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada, España.

Referencias

- Abrate, R., Brate, R., Pochulu, M. y Vargas, J. (2006). *Errores y dificultades en matemática: Análisis de causas y sugerencias de trabajo*. Universidad Nacional de Villa María.
- Borromeo Ferri, R. (2007). Modelling problems from a cognitive perspective. En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum y S. Khan (Eds.), *Mathematical modelling*. Education, Engineering and Economics–ICTMA 12 (pp. 260–270). Woodhead Publishing. <https://doi.org/10.1533/9780857099419.5.260>

- Czocher, J. A. (2017). Mathematical modeling cycles as a task design heuristic. *The Mathematics Enthusiast, Montana*, 14(1), 129–140. 2017. <https://doi.org/10.54870/1551-3440.1391>
- English, L. D. (2007). Interdisciplinary modelling in the primary mathematics curriculum. En J. Watson y V. M. Adams (Eds.), *Proceedings 30th Mathematics Education Research Group of Australasia Annual Conference* (pp. 275–284). Universidad de Launceston.
- Gallart, C., Ferrando, I., García-Raffi, L. M., Albarracín, L. y Gorgorió, N. (2017). Design and implementation of a tool for analysing student products when they solve Fermi problems. En G. A. Stillman, W. Blum, W. y G. Kaiser, (Eds.), *Mathematical modelling and applications: Crossing and researching boundaries in mathematics education* (pp. 265–275). Springer
- Guerrero, F. (2016). Errores matemáticos en la resolución de problemas de modelización matemática. Caso: estudiantes del primer año de educación media. *Revista ciencias de la educación*, 26(47), 93–113.
- Ledezma, C., Font, V. y Sala, G. (2022). Analysing the mathematical activity in a modelling process from the cognitive and onto-semiotic perspectives. *Mathematics Education Research Journal*. Primero online. <https://doi.org/10.1007/s13394-022-00411-3>
- Lesh, R., Cramer, K., Doerr, H. M., Post, T. y Zawojewski, J. S. (2003). Model development sequences. En R. Lesh y H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 203–204). Lawrence Erlbaum Association.
- Lesh, R. y Doerr, H. M. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning and problem solving. En R. Lesh y H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 3–33). Lawrence Erlbaum Association.
- López, R., Molina, M. y Castro, E. (2017). Modelización en el aula de ingeniería: un estudio de caso en el marco de un experimento de enseñanza. *PNA*, 11(2), 75–96. <https://doi.org/10.30827/pna.v11i2.6075>
- Ministerio de Educación Pública (MEP). (2012). *Programas de estudio de matemáticas: I, II y III ciclos de la educación general básica y ciclo diversificado*. Autor. <https://www.mep.go.cr/sites/default/files/programadeestudio/programas/matematica.pdf>
- Movshovitz-Hadar, N., Inbar, S. y Zaslavky, O. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*. National Council of Teachers of Mathematics, 18(1), 3–14. <http://doi.org/10.2307/749532>
- Porras, K. y Fonseca, J. (2015). Aplicación de actividades de modelización matemática en la educación secundaria costarricense. *Uniciencia*, 29(1), 42–57. <http://dx.doi.org/10.15359/ru.29-1.3>
- Radatz, H. (1980). Students' errors in the mathematical learning process: a survey. En AUTOR (Ed.). *For the Learning of Mathematics* (pp. 16–20). FLM Publishing Association.
- Ruano, R. M., Socas, M. M. y Palarea, M. M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA*, 2(2), 61–74. <https://doi.org/10.30827/pna.v2i2.6201>
- Socas, M., Ruano, M. R. y Hernández, J. (2016). Análisis didáctico del proceso matemático de modelización en alumnos de secundaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 9, 21–41. <https://doi.org/10.35763/aiem.v0i9.146>