La modelación geométrica en la resolución de problemas de teoría de grafos en un contexto auténtico

Luz Marina **Fonseca** Vizcaya
Institución educativa Nuestra Señora de la Salud
Universidad Antonio Nariño
Colombia
gaempa@yahoo.es

Osvaldo Jesús **Rojas** Velázquez
Universidad Antonio Nariño
Colombia
orojasv69@uan.edu.co

Resumen

Desarrollar el pensamiento matemático es fundamental para el avance del ser humano, pues influye de manera significativa en el progreso individual y de las sociedades. Con el propósito de desarrollar habilidades de visualización, creación de sentido y la resolución de problemas retadores, se busca modelar geométricamente conceptos de la teoría de grafos, usando un contexto extra-matemático real auténtico. Aunque los estudiantes no tienen conocimientos previos sobre teoría de grafos, se presenta una oportunidad para conocerla. Este estudio se desarrolla con escolares de edades entre los 13 y 15 años del grado octavo de la básica secundaria en una institución pública, donde se usa una metodología cualitativa. En esta medida, se evidencia que la teoría de grafos y la modelación geométrica tienen una estrecha relación, que puede robustecer las habilidades matemáticas y heurísticas fundamentales para la construcción del saber y el sentido matemático.
Palabras clave: Educación Matemática; Educación secundaria; Enseñanza presencial; Modelación; Resolución de problemas; Investigación Cualitativa; Matemáticas; Supatá; Colombia.

Introducción

El abordaje en la escuela de situaciones problémicas centradas en el mundo real es un procedimiento vital para la proximidad al conocimiento matemático y una oportunidad para poner en práctica todo lo aprendido. Uno de los procesos que lo dinamiza es la resolución de problemas retadores, apoyados indudablemente por la modelación.

Estas temáticas se ven reflejadas en diferentes congresos y reuniones: el Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME) en el Topic Study Groups (TSG) 9 y 23 tiene como eje el análisis de la enseñanza y el aprendizaje de la geometría en secundaria, vinculación del modelado y la resolución de problemas. En el TSG 17 se centra en el planteamiento y la resolución de problemas como clave para el desarrollo del pensamiento matemático. En el Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME) en el Thematic Working Groups (TGW) 4 y 24 se abordan procesos investigativos relacionados con la enseñanza y aprendizaje de la geometría en temas como: el modelado y la resolución de problemas en la enseñanza y aprendizaje de la matemática. Es de resaltar que en la Conferencia Interamericana de Educación Matemática (CIAEM) se exponen reflexiones y experiencias didácticas acerca de la resolución de problemas y la modelación matemática en los procesos educativos.

Además, en las Reuniones Latinoamericanas de Matemática Educativa (RELME) en el ALME 35 (2022) se abordan los campos de pensamiento geométrico, la resolución de problemas, la visualización para la enseñanza y aprendizaje de la matemática en la escuela secundaria. También, se exponen estudios relacionados con modelación matemática y geométrica. En todas estas reuniones se presentan ponencias, cursos y conferencias, que reflejan los avances y oportunidades de mejora en la resolución de problemas a través de la modelación geométrica en la escuela, lo cual evidencia la pertinencia y actualidad de la temática.

Por tanto, existe una conexión esencial entre la resolución de problemas y la modelación. El modelado apunta a relacionar el mundo real y las matemáticas, desarrollando en los estudiantes potencialidades en su pensamiento. Por ende, propiciar espacios en el aula para modelar, concede a los estudiantes desarrollar destrezas de predicción, explicación y dar solución a situaciones en un contexto auténtico y natural.

El presente estudio contribuye al desarrollo del pensamiento matemático a través de actividades que usan la modelación geométrica en la resolución de problemas retadores. Por consiguiente, un proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática, donde se considere la resolución de problemas, a través de la modelación geométrica, requiere de una metodología que integre los dos procesos en toda actividad matemática. Esta integración permite el desarrollo oportuno y adecuado del saber matemático, donde se fortalece el aprendizaje significativo y el interés por el conocimiento de los estudiantes.

Marco teórico

Reconociendo que la modelación geométrica es intrínseca a la modelación matemática, se abordan algunas definiciones dadas por autores que han involucrado la modelación geométrica en la práctica educativa. Por su parte, para Alsina (2008); Zapata, Cano, & Villa (2017); Herbst & Boileau (2018), entre otros, reconocen la modelación geométrica como un proceso que dado a sus conocimientos concibe la creación de un modelo con elementos geométricos para representar de objetos de la realidad y llegar a la solución de un problema. En este estudio la modelación geométrica se establece como: un proceso intencional de representación, donde se utilizan conocimientos y recursos para llevar a cabo el análisis, formulación y elaboración de un modelo, el cual, brinda elementos para hacer inferencias, que favorecen la solución de un problema en un contexto geométrico.

El proceso de modelación geométrica que se trabaja en este estudio tiene relación con un campo de modelado extra-matemático, de forma intencional. En este caso, los estudiantes hacen uso de sus habilidades y conocimientos geométricos, para abordar un problema retador, con el propósito de vincular situaciones cercanas que apoyen el aprendizaje. Considerando los resultados investigativos de Bliss y Libertini (2020), Stillman (2015) y Niss, Blum & Galbraith (2007) el modelado es el medio para relacionar la matemática, la realidad, y despertar el interés en el estudiante por conocer temas matemáticos.

Para Schoenfeld (2016) aprender a pensar matemáticamente tiene dos tipos de significados: el primero hace relación al punto de vista matemático, a la valoración que debe darse a los procesos de matematización, abstracción y habilidad para aplicarlos. El segundo aborda el desarrollo de competencias para usar herramientas con el objetivo de comprender, ambos tipos se dirigen a la creación de sentido matemático, para percibir y usar las matemáticas de manera significativa. En cuanto, al Sense Making en la educación matemática se dirige a desarrollar la comprensión de una situación, contexto o significado a partir de los conocimientos ya construidos. “En cuanto al modelado matemático esta creación de sentido puede presentarse en el contexto de una tarea o aplicación, dándole sentido a una situación del mundo real”. En relación, Odden & Russ (2019) manifiesta que la creación de sentido y el modelado tienen un mismo propósito, construir nuevos conocimientos y la comunicación de nuevas ideas.

La teoría de grafos se reconoce como una rama de las matemáticas y la computación, tiene como objetivo primordial estudiar características y propiedades de los grafos. Un grafo es en sí una estructura matemática formada por vértices y aristas que favorece la modelación de problemas de la cotidianidad cuando se requiere establecer relaciones, además instaura conexiones fuertes con la geometría dado que un grafo es de manera básica un objeto geométrico (Vanegas et al, 2013). Por su parte, la teoría de grafos puede ser desarrollada en la escuela secundaria, dado que no demanda conocimientos anticipados, pero sí desarrolla estrategias que apoyan la resolución de problemas (Nouche, 2008). Por consiguiente, puede ser un escenario apropiado que permite integrar procesos matemáticos como la resolución de problemas y la modelación (Vanegas et al, 2013). De esta manera, los grafos son representaciones significativas para modelar diversas situaciones retadoras en contextos auténticos o simulados. Por lo que, la teoría de grafos es una valiosa herramienta de modelado matemático (Smithers,2005). En esta medida, construir modelos y solucionar problemas mejoran habilidades que favorecen el razonamiento abstracto, permitiendo que los estudiantes vinculen los conocimientos informales y los formales de la matemática, de tal manera que apoya a una mejor disposición para el aprendizaje y avancen en sus niveles de desempeño (Braicovich, et al., 2008).

Metodología

Este estudio se desarrolla con estudiantes de secundaria, de la Institución Educativa Nuestra Señora de la Salud (Colombia). Se fundamenta en un paradigma y enfoque cualitativo centrada en los sujetos de forma integral y completa, abarcando un proceso de indagación inductivo, de interacción con los participantes, analizando los datos descriptivos recolectados, a raíz del avance de los acontecimientos. La muestra es seleccionada por conveniencia, atendiendo características específicas del grupo, la condescendencia y oportunidad de acercamiento por parte de la investigadora. Por tanto, se trabaja con 30 estudiantes del grado octavo, con edades entre los 13 y 15 años, organizados en 10 grupos de tres estudiantes.

En esta investigación se pretende construir conceptos, haciendo uso de la modelación geométrica a partir de problemas retadores, que vinculan la teoría de grafos. De esta manera, se presenta una actividad a los estudiantes que consta de título, objetivo, surgencias metodológicas, materiales a utilizar y el desarrollo de la actividad (basado en problemas). Estos problemas responden a la pregunta ¿Cómo los estudiantes por medio del modelado geométrico pueden construir el concepto de camino y ciclo hamiltoniano? Además, se les entregó a los estudiantes dos problemas, para una mayor comprensión, se les presentó el mapa del municipio (Google Maps) y el mapa general de vías (ver figura 1) con calles y carreras. El objetivo del mapa de vías fue presentar al estudiante grafos sin decírselo y que en este mismo enfoque puedan encontrar respuestas a los problemas, sin embargo, esto lo sabrían los estudiantes por descubrimiento. También se usa un software online para validar los modelos ideados por los estudiantes en el proceso de resolución de los problemas.

Con respecto al problema uno, se pretende que los estudiantes puedan construir el concepto de un camino hamiltoniano y con el problema dos se quiere que los estudiantes construyan el concepto de ciclo hamiltoniano. Se les propuso a los estudiantes algunas orientaciones que le ayudaron a tomar decisiones en el proceso de resolución por si solos. Se les sugiere que consideren escoger la ruta más corta, pasar por calles y carreras, empezar el desplazamiento en un lugar del municipio y terminar en otro, también empezar y terminar en el mismo sitio, tener en cuenta el tamaño de las calles y carreras del mapa. Además, se les solicitó pensar en ¿qué características debe tener el desplazamiento? y ¿qué información necesitan para resolver el problema? A continuación, se presentan los dos problemas propuestos en la actividad.

Figura 1. Mapa de Supatá (Google Maps) y mapa vial elaboración propia.

Problema 1: En Supatá se hacen brigadas de vacunación a niños menores de 10 años. Se ha determinado que al menos vive un niño en una calle o carrera del municipio, por tanto, la alcaldía dispone de un vehículo para transportar los insumos y la enfermera en la ruta más corta. Se quieren vacunar 10 niños por día. ¿Cuál sería el desplazamiento conveniente que debe realizarse en ese día? Piensa en ¿Qué características debe tener el desplazamiento?, ¿qué información necesitas para resolver el problema?

Problema 2: En el segundo día de la brigada es necesario empezar y terminar la vacunación en el mismo lugar, como mínimo se debe vacunar 6 niños, aunque pueden ser más. ¿Cuál sería el desplazamiento apropiado que debe realizarse en ese día?

Los datos fueron recolectados por medio de la grabación de voz de algunas conversaciones realizadas con los grupos, las exposiciones hechas por los estudiantes tomando uno a uno los registros al respecto, las evidencias entregadas en físico que fueron revisadas minuciosamente, una bitácora de trabajo de campo en la cual se escribió los hallazgos más relevantes y de los tiempos empleados por los estudiantes en cada uno de los ciclos del modelado y una encuesta escrita a estudiantes que contiene elementos sobre la cognición y la metacognición. En esta medida, se proponen unos criterios que permiten orientar el análisis de las evidencias aportadas por los estudiantes (ver tabla 1).

Tabla 1
Categorías en la construcción de conceptos en un modelo geométrico

Criterios para camino y ciclo hamiltoniano	
Vértice - arista	Vincula notaciones usadas para reconocer el vértice de un grafo.
Medida	Considera la longitud de las vías para determinar la ruta más corta.
Pertinencia	Incluye la determinación sobre la congruencia del grafo elaborado.
Complejidad	Relaciona el alcance de la elaboración de un grafo que aporte a la solución.
Camino	Enlaza la capacidad de elaborar un camino hamiltoniano que apoya a la solución del problema.
Ciclo	Reúne el alcance al establecer un ciclo hamiltoniano que da interpretación a la solución.
Sentido	Vincula el proceso de dar sentido a su experiencia y alcanzar conocimientos de una disciplina.
Generalización	Concibe la capacidad de poder relacionar el modelo en otros contextos.

Resultados

En el proceso de resolución de los problemas los modelos de rutas construidos por los estudiantes son diversos, cada equipo de trabajo toma diferentes zonas del municipio. Los grupos idearon mentalmente diversos modelos que fueron plasmando en hojas de papel (ver figura 2), utilizaron diferentes representaciones, las cuales iban descartando porque no los conducía a la solución del problema. Con respecto al problema uno y la construcción del concepto de camino hamiltoniano, los estudiantes debían mostrar en su modelo y solución una ruta que empezara en un lugar y terminara en otro cruzando por calles y carreras, así pasaría por todos los vértices una sola vez, además de encontrar la ruta más corta. Ante el problema dos y el concepto de ciclo hamiltoniano la ruta elegida debía empezar y terminar en el mismo sitio, pasar por calles, carrera y vértices una sola vez. Los estudiantes para poder llegar a la simplificación tuvieron que observar detenidamente los mapas, ellos aluden a que el problema está enmarcado en un contexto reconocido por ellos y que esto les haría más fácil buscar la solución.

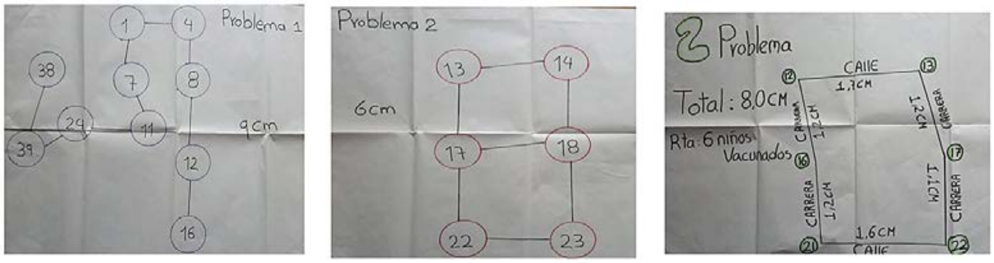

Figura 2. Modelos de camino y ciclo hamiltoniano

Con respecto a la matematización los estudiantes hacen uso de sus conocimientos geométricos para buscar solución a los problemas. En cuanto al problema dos, se toma el concepto de perímetro de una figura plana para buscar un ciclo hamiltoniano (ver figura 2), que representa la ruta más corta, es así como incorporan diferentes figuras planas irregulares y en algunos usan las nociones de paralelismo, además toman conocimientos sobre métrica haciendo uso de medidas a escala.

Algunos equipos de trabajo no determinan la ruta más corta, pero establecen una característica fundamental que es pasar por todos los vértices del grafo que delimita la zona seleccionada, lo que intentan hacer es reconocer cuales calles y carreras son las más cortas de todo el municipio, sin embargo, eso no fue garantía para dar la mejor solución al problema planteado (ver figura 3), buscaron calles y carreras paralelas con las mismas medidas, tratando de garantizar la mejor respuesta. Otros modelos creados por los equipos tienen la ruta más corta, pero no cumple con el concepto de ciclo, debido que deja sin recorrer algunos vértices (ver figura 3).

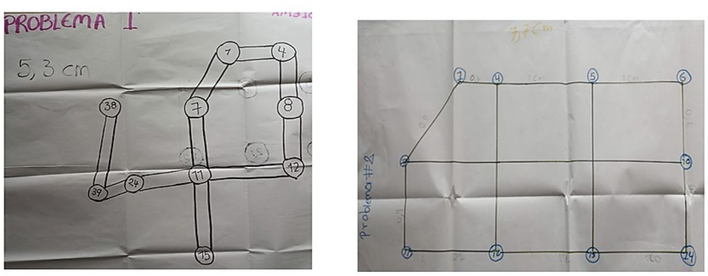

Figura 3. Modelos de grafos que no tienen camino ni ciclo hamiltoniano

A partir de la observación, la revisión de las producciones y las entrevistas de campo con los estudiantes, se evidencia el reconocimiento de vértice y arista e incluso representan un grafo en su modelo (las calles y carreras fueron sus aristas y sus intersecciones los vértices), todos los grupos desarrollan la habilidad de identificar estos conceptos aun siendo llamados en sus lenguajes cotidianos. En este sentido, contrastan estos conceptos luego de que se les orienta sobre sus nombres en teoría de grafos cuando se trabaja con el software en línea, los relacionan con facilidad al problema planteado y a los mediadores visuales dados (mapas).

Entonces, cuando validaron sus modelos con el software en línea pudieron identificar si sus modelos era un camino o ciclo hamiltoniano, fue en ese momento que los estudiantes relacionaron estos conceptos y llegaron a la comprensión de ellos (ver figura 4).

*Figura 4.*Validación del modelo geométrico para camino y ciclo hamiltoniano

Por otra parte, los equipos de trabajo pudieron reconocer que existían diversas maneras de resolver los problemas abordados, las rutas establecidas no fueron iguales. En este sentido, identifican que sus pares construyeron diversos caminos y ciclos, encontrando rutas diferentes que permitían dar solución a los problemas dados (ver figura 5).

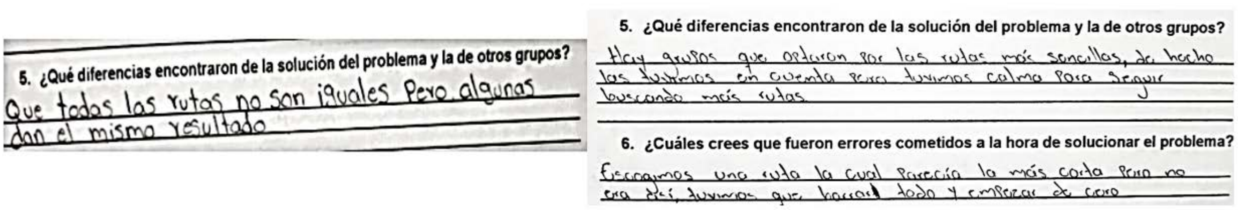

Figura 5. Descripción de diferencias de los modelos

Conclusiones

Los resultados obtenidos en esta investigación permiten destacar lo siguiente:

Se identifica una conexión entre el modelado geométrico y los problemas reales. Por tanto, los estudiantes logran utilizar conceptos geométricos para aplicarlos a la solución de problemas reales, que tienen relación con la teoría de grafos.

No se requieren conocimientos previos de la teoría de grafos para el abordaje del problema (Greefrath et al, 2022), sin embargo, todas las presentaciones y la estructura del problema debe aportar a la comprensión y así poder pasar por todas las fases del modelado, las cuales permiten el desarrollo de habilidades en la resolución de problemas.

Se evidencia que el trabajo de los estudiantes fue motivador, en este sentido usan conocimientos previos sobre geometría para apoyar la solución de un problema de matemática discreta. Por otra parte, muestran comprensión de una situación a partir de los conocimientos ya construidos creando sentido a una situación real (Odden & Russ, 2019).

En relación, la modelación geométrica permite que los estudiantes comprendan realmente el concepto, lo interioricen y lo usen para resolver problemas. Así mismo, favorece la construcción de modelos levantando sus propiedades geométricas conceptuales para luego establecer las variables necesarias, por medio de tres características principales: la visualización, técnicas algebraicas de operalización (matematización) y análisis de los conceptos geométricos para la abstracción por medio de exploración y conjeturas, que permite el desarrollo del pensamiento matemático.

Por su parte, los procesos de cognición que se desarrollan con el modelado son importantes para la construcción de saberes de la matemática discreta y pueden entenderse en base a la metacognición que se adelanta con los estudiantes, estos dos procesos permitieron conocer cómo los estudiantes construyen conocimiento y cuáles son las partes más débiles en el proceso y cómo deben mejorarse.

Referencias y bibliografía

Alsina, C. (2008). Geometría y realidad. *En revista Sigma* (33), 165-179.

Bliss, K. y Libertini, J. (2020). *Lineamientos para la evaluación e instrucción en la educación en modelación matemática.* Gaimme. Society for industrial and applied mathematics (SIAM). https://www.siam.org/Portals/0/Publications/Reports/GAIMME_2ED/GAIMME_en_espan%CC%83ol.pdf

Blum, W., Galbraith, P., Henn, H. y Niss, M. (2007). Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study (Vol. 10*). MA: Springer US*. https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_59

Braicovich, T., Oropeza, S. y Cerda V. (2008). Un desafío: incluir grafos en los distintos niveles educativos. *Memorias del II REPEM* .70-76. http://repem.exactas.unlpam.edu.ar/cdrepem08/memorias/talleres/T11.pdf

Herbst, P. y Boileau, N. (2018). Geometric modeling of mesospace objects: A task, its didactical variables, and the mathematics at stake. *In Visualizing Mathematics Springer*, *Cham*. 280. https://doi.org/10.1007/978-3-319-98767-5_13

Greefrath, G., Hertleif, C. y Siller, H. (2018). Mathematical modelling with digital tools—a quantitative study on mathematising with dynamic geometry software. *ZDM*, *50(1-2)*, 233-244. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0924-6

Nouche, F. (2008). Teoría de grafos: propuesta para escuela secundaria. *Premisa*, 10(39). http://funes.uniandes.edu.co/23043/1/Nouche2008Teoria.pdf

Odden, T. y Russ, R. (2019). Defining sensemaking: Bringing clarity to a fragmented theoretical construct. *Science Education*, 103(1), 187-205. https://doi.org/10.1002/sce.21452

Stillman, G. (2015). Applications and modelling research in secondary classrooms: What have we learnt? In Selected regular lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education. *Springer, Cham*, 791-805. https://doi.org/10.1007/978-3-319-17187-6_44

Schoenfeld, A. (2016). *Mathematical thinking and problem solving*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315044613

Smithers, D. (2005). *Graph theory for the secondary school classroom* [Doctoral dissertation, East Tennessee State University]. https://search.proquest.com/openview/4b0b670c58ff4033e22c81a21a38538d/1?pq-origsite=gscholar&cbl=18750&diss=y

Vanegas, J., Henao, S. y Gustin J. (2013). La teoría de grafos en la modelación matemática de problemas en contexto. *Funes*, 283-290. http://funes.uniandes.edu.co/18735/

Zapata, F., Cano, N. y Villa, J. (2017). Art and Geometry of Plants: Experience in Mathematical Modelling through Projects*. Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education,* 14(2*)*, 585-603. https://doi.org/10.12973/ejmste/76958