XVI CIAEM ICMI
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference of Mathematics Education
UNIVERSIDAD DE LIMA
Lima - Perú
30 julio - 4 agosto 2023
xvi.ciaem-iacme.org

Modelación en la clase de álgebra lineal mediada por GeoGebra: eigenvalores y eigenvectores

Alexander **Betancur Sánchez**
Escuela de Matemáticas. Universidad Industrial de Santander. Edumat-UIS
Colombia
albetsan@correo.uis.edu.co

Resumen

Se presenta algunos resultados de un estudio que involucra la enseñanza de los conceptos de eigenvalor y eigenvector mediante situaciones de modelación desde la perspectiva de Modelos y Modelación y la teoría APOE. Los datos provienen de las producciones de 30 estudiantes de los programas de Ciencia, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas (STEM por sus siglas en inglés). En los se resultados muestran la movilización de diferentes construcciones mentales y momentos donde los estudiantes refinan, comunican, simulan y generalizan modelos para la situación propuesta apoyados en la mediación de GeoGebra. Así la situación de modelación se manifiesta como un rico escenario para el aprendizaje de eigenvalores y eigenvectores en $\mathbb{R}^2$ y otros conceptos como operadores lineales, base y ortogonalidad.

Palabras Clave: Educación superior; Educación matemática; Enseñanza presencial; Teoría APOE; Modelos y Modelación; Álgebra Lineal; Eigenvalores y Eigenvectores; GeoGebra

Introducción

El álgebra lineal hace parte de los cursos básicos para los estudiantes de las áreas STEM. Una gran mayoría de los estudiantes que cursan álgebra lineal sienten haber aterrizado en un mundo nuevo; muy distinto a las matemáticas de la escuela (Dorier et al., 2000). En particular, para los conceptos de eigenvalores y eigenvectores el énfasis exclusivo en el lenguaje formal y los procedimientos algorítmicos terminan por opacar los significados, conexiones, relaciones geométricas y a su vez la comprensión de los mismos (Thomas y Stewart, 2011). Al respecto, algunas investigaciones han presentado propuestas para el aprendizaje de eigenvalores y eigenvectores con aplicaciones en áreas como la física (Beltrán-Meneu et al., 2017) y el uso de ambiente de geometría dinámica (Orozco et al. 2018). Por otra parte, se han reportado situaciones de modelación para la enseñanza de eigenvalores y eigenvectores desde la economía y la representación matricial (Salgado y Trigueros, 2015). Desde la representación geométrica, funcional y matricial de la transformación lineal Betancur et al., (2021) y Parraguez et al., (2022) han propuesto modelos cognitivos que describen la comprensión del concepto de eigenvalor y eigenvector. La presente comunicación pretende mostrar evidencia sobre una situación de modelación para el aprendizaje de eigenvalores y eigenvectores mediada por GeoGebra en el marco de lo señalado en Betancur et al., (2022) y Parraguez et al., (2022).

Elementos teóricos

El estudio reportado en esta comunicación hace uso complementario de la teoría APOE y la perspectiva de Modelos y Modelación. El rol predominante recae sobre la teoría APOE y se vincula con la perspectiva de Modelos y Modelación al usar seis principios de modelación para el diseño de situaciones de modelación.

La teoría APOE

Esta teoría, acrónimo de las estructuras mentales Acción, Proceso, Objeto y Esquema (APOE) se basa en las ideas de Piaget sobre el desarrollo de las estructuras lógico matemáticas de un individuo, siendo la abstracción reflexiva el mecanismo principal y la interiorización, coordinación, encapsulación, tematización y reversión instancias de éste. Para hacer operativa la teoría se considera la descomposición genética (DG) donde se precisan las estructuras previas, mecanismos y construcciones necesarias para avanzar en la comprensión del concepto (Arnon et al., 2014).

La comprensión de un concepto matemático K en APOE se describe por los avances en las diferentes estructuras (Acción-Proceso-Objeto-Esquema). Para el caso del concepto de eigenvalor y eigenvector, Betancur et al., (2022) consideran que el aprendizaje inicia mediante la coordinación del Proceso múltiplo por un escalar y el Proceso de Transformación lineal (Proceso 1). Así mismo, la Acción de determinar soluciones de una ecuación vectorial de la forma $T(v) = \lambda_0 v$, con T un operador lineal o matriz asociada, λ_0 un escalar y v un vector arbitrario. Dicha Acción es interiorizada en Proceso 2, al ser coordinada con el Proceso 1 da lugar al Proceso 3 el cual permite reconocer a λ_0 como un eigenvalor de T asociado a cada vector del conjunto solución de $T(v) = \lambda_0 v$. Una concepción Proceso de espacio nulo de $T - \lambda_0 I$ al ser coordinada con el Proceso 3 mediante la contenencia de los conjuntos da origen al Proceso 4, este involucra reconocer a cada elemento no nulo de $Nul(T - \lambda_0 I)$ como un eigenvector de T asociado al eigenvalor λ_0. De esta manera el Proceso de eigenvalor y eigenvector se origina por la coordinación del Proceso 4 con el Proceso de determinante de $T - \lambda_0 I$ donde hay conciencia de la relación bicondicional de existencia entre cada eigenvalor y los respectivos eigenvectores asociados a T. La reflexión sobre el Proceso de eigenvalor y eigenvector permite vincular a todos los eigenvalores de T con el polinomio característico así, el mecanismo de encapsulación da lugar a una Concepción Objeto de eigenvalor y eigenvector (Betancur et al., 2022). Desde la teoría APOE una estructura Esquema es un conjunto de Acciones, Procesos, Objetos y otros Esquemas que interactúan. Los niveles considerados para el Esquema son: *intra* [elementos aislados, sin relaciones], *inter* [relaciones y transformaciones] y *trans* [pertinencia y alcance] (Arnon et al., 2014).

Principios para el diseño de la situación de modelación

Algunos estudios (Possani et al., 2010; Salgado y Trigueros, 2015) hacen uso complementario entre la teoría APOE con la perspectiva de Modelos y Modelación (Lesh & Doerr, 2003). Los investigadores que han trabajado con esta perspectiva han establecido seis principios para el diseño de situaciones de modelación que generan modelos y se constituyen en conceptos matemáticos. Tales principios fueron propuestos (Lesh et al., 2000) y son:

Principio de realidad: busca dar sentido al problema según sus conocimientos y experiencias personales, sin embargo, debe suscitar la necesidad de elementos matemáticos de modo que la solución no sea trivial.

Principio de construcción de modelos: busca más que respuestas a preguntas, debe demandar explicaciones, predicciones, justificaciones con el fin de desarrollar un modelo para interpretar los datos y posibles procesos de solución.

Principio de autoevaluación: sugiere criterios para valorar la utilidad de las posibles soluciones con el propósito de avanzar en la elaboración del modelo y cuando es necesario un cambio de plan.

Principio de documentación: la situación determinada debe demandar que el estudiante revele explícitamente cómo está pensando, los objetivos y posibilidades de solución consideradas.

Principio de simplicidad: la situación debe ser retadora y accesible para los estudiantes, de manera que al resolverlas puedan convertirse en prototipos importantes en el aprendizaje y el modelo se puede ser reutilizado.

Principio de generalización: ¿el modelo que se desarrolla de la actividad es válido solo para la situación particular? el desarrollo del modelo debe convertirse en un nuevo objeto matemático que los estudiantes puedan aplicar.

Metodología

El estudio siguió el ciclo de investigación propuesto por la teoría APOE el cual consiste en: Análisis Teórico que tiene como resultado una DG para la instrucción del concepto de interés [la DG en este estudio se describió brevemente en la sección de elementos teóricos], Diseño e Implementación de la enseñanza donde se desarrolla la instrucción en el aula siguiendo los momentos de trabajo en pequeños grupos alrededor de una tarea o situación, discusiones generales y tareas complementarias o ejercicios. Finalmente, la recolección y análisis de los datos en el cual se hace seguimiento a las producciones de los estudiantes y se analiza bajo el lente teórico de la DG y discusiones entre investigadores (Arnon et al., 2014). Los participantes del estudio fueron 30 estudiantes de programas STEM de un primer curso de álgebra lineal en una universidad pública colombiana. Se hizo seguimiento a fragmentos de las discusiones realizadas en el aula mediante videograbaciones y también a las producciones escritas en la implementación.

En este escrito nos ocupamos de la situación de modelación referida al diseño de un nuevo reloj.

Situación de modelación

La situación de modelación que se presenta a continuación es reportada en Betancur (2020).

Una empresa está interesada en crear nuevos diseños de relojes de pared. A usted le han solicitado diseñar un nuevo modelo de reloj cuyo contorno sea en forma de elipse y se cumplan algunas condiciones a partir posiciones relativas respecto a otro circular con 1 decímetro de radio. Si el extremo fijo de los minuteros en el reloj circular y en el nuevo diseño es el mismo y se usa esta ubicación como el origen de un plano de coordenadas los requisitos exigidos para el nuevo diseño serían los siguientes:

a). Cuando marca las 12:00 el reloj circular, la ubicación del extremo superior del minutero en el nuevo diseño deberá estar una unidad hacia arriba y otra a la derecha respecto al extremo superior del minutero en el reloj circular.

b). Si son las 3:15 en el reloj circular, la ubicación del extremo derecho del minutero en el nuevo diseño deberá estar una unidad hacia arriba respecto al extremo derecho del minutero del reloj circular.

c). Si en el reloj circular se indica 10 minutos, los minuteros de los dos diseños no pueden estar sobrepuestos.

La empresa se comunicará con usted cuando lo considere necesario. A continuación, se precisa el trabajo que usted debe realizar:

1). Encontrar un modelo para el nuevo diseño de reloj con las condiciones indicadas tal que describa como es transformado cualquier punto del reloj circular y si es el caso, explicar en qué posiciones los minuteros se sobreponen y que relación guardan.

2). Proponer otros modelos de reloj en forma de elipse tal que existan posiciones donde los minuteros se sobrepongan. Mostrar ilustraciones, describir características y condiciones para que esto ocurra y las condiciones para que la posición de las 12:00 y 3:15 en el reloj circular coincida con el eje mayor y menor respectivamente

Momentos con la situación de modelación

Los estudiantes trabajaron en grupos de tres estudiantes durante 40 minutos aproximadamente. Discutían en cada grupo las condiciones propuestas para el diseño del nuevo reloj, realizaban ilustraciones en sus hojas de trabajo para el diseño circular y el diseño en forma de elipse solicitado. Progresivamente las condiciones presentadas en el problema fueron interpretadas y codificadas usando elementos matemáticos; las posiciones de los minuteros para ambos diseños fueron asociadas con vectores bidimensionales y sus respectivas transformaciones. La profesora y el investigador permitían discusiones generales para que los estudiantes comunicaran sus estrategias y razonamientos, dichos momentos eran oportunos para ajustar estrategias o cambiarlas en caso de ser necesario, así como procedimientos equivocados. En las producciones de los estudiantes se evidenció interacciones entre elementos vinculados a los Esquemas de transformación lineal y espacio vectorial.

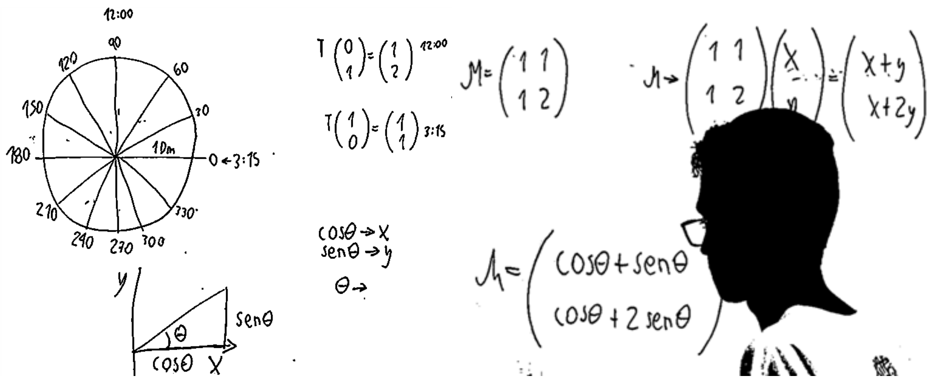

Figura 1. Producciones de los estudiantes sobre la situación de modelación.

En la figura 1 se evidencia que los estudiantes identifican la básica canónica de $\mathbb{R}^2$ y una trasformación que actúa sobre ésta según las condiciones solicitadas. También, pueden evocar una concepción Proceso de transformación lineal y de base para presentar una representación matricial respecto a la base canónica. En discusiones posteriores los estudiantes identifican la necesidad de refinar el modelo propuesto asociando las posiciones de los minuteros en el reloj circular con grados. Tal necesidad de refinar el modelo da cuenta del alcance del diseño de la situación propuesta bajo los principios de la perspectiva de modelos y modelación, así como la interacción más fuerte de elementos de los Esquemas de transformación lineal y espacio vectorial. Lo anterior permite movilizar razonamientos matemáticos más avanzados y construcciones mentales identificadas como necesarias en la DG para el aprendizaje de eigenvalores y eigenvectores.

En la sesión de clase siguiente la profesora y el investigador le facilitan al grupo un archivo de GeoGebra que presenta una simulación del diseño propuesto (ver figura 2), pero al mismo tiempo permite a cada grupo considerar otros posibles diseños de reloj en forma de elipse e investigar condiciones tal que existan posiciones donde los minuteros del reloj circular y otro diseño propuesto se sobrepongan. En la exploración del archivo en GeoGebra los estudiantes identifican como la elección distinta de una base para $\mathbb{R}^2$ y la deformación de dichos vectores determinan modelos distintos de reloj elíptico en algunos casos donde los minuteros no se superponen (figura 2b) y otros donde esto si ocurre (figura 2a).

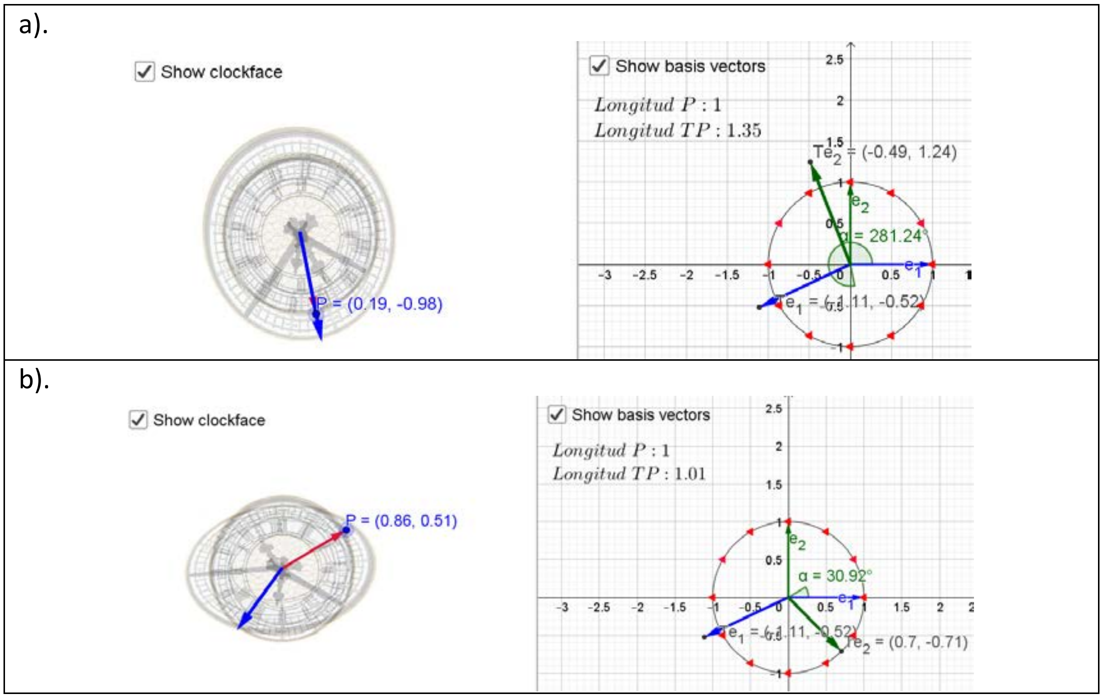

Figura 2. Propuestas de nuevos diseños de reloj en GeoGebra

Reflexiones finales

Las producciones de los estudiantes alrededor de la situación de modelación evidencian que permite movilizar formas de pensar en álgebra lineal asociadas a un Esquema de transformación lineal y Espacio vectorial en el contexto de $\mathbb{R}^2$, lo cual es clave en el aprendizaje de eigenvalor y eigenvector (Betancur et al., 2022; Parraguez et al., 2022). La actividad movilizada por los estudiantes tiene lugar en diferentes ciclos de modelación que involucraron representar, refinar, comunicar, simular y generalizar alrededor de eigenvalores y eigenvectores. La revisión de los fragmentos de videograbación y las hojas de trabajo mostraron evidencia que los estudiantes empiezan a ser conscientes con algunos diseños de la existencia de casos especiales donde los minuteros de ambos diseños se sobreponen, lo cual permite un escenario favorable para dotar de significado geométrico a los eigenvalores y eigenvectores y propiciar la coordinación entre el Proceso de transformación lineal y el Proceso de múltiplo por un escalar. Por otra parte, el uso complementario de la teoría APOE y la perspectiva de Modelos y Modelación mediante los principios de diseño de situaciones de modelación que involucra uso de entornos dinámicos como GeoGebra, deja ver la riqueza de la interacción en el aula para generar aprendizajes en un ambiente dialógico y reflexivo donde el estudiante es el protagonista. La labor conjunta entre los estudiantes, la profesora y el investigador alrededor de la situación de modelación pone en manifiesto formas de pensamiento y construcciones mentales clave en el aprendizaje del álgebra lineal entre ellos referidos a operadores lineales, bases y ortogonalidad.

Referencias y bibliografía

Arnon, L., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS Theory a framework for research and curriculum education*. New York: Springer Netherlands. DOI: 10.1007/978-1-4614-7966-6

Beltrán-Meneu, M., Murillo-Arcila, M. y Albarracin, L. (2017). Emphasizing visualization and physical applications in the study of eigevectors and eigenvalors. Teaching Mathematics and its applications 36, 123-135. Doi: 10.1093/teamat/hrw018.

Betancur, A., Roa Fuentes, S. & Parraguez González, M. (2022). Construcciones mentales asociadas a los eigenvalores y eigenvectores: refinación de un modelo cognitivo. AIEM - Avances de investigación en educación matemática, 22, 23-46. https://doi.org/10.35763/aiem22.4005

Betancur-Sanchez, A., Roa-Fuentes, S. y Ballesteros, S. (2021). Una descomposición genética preliminar del concepto de eigenvalor y eigenvector: el análisis de libros de texto como sustrato en la construcción de modelos cognitivos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 24(3), 245-276, https://doi.org/10.12802/relime.21.2431

Betancur, A. (2020). *Construcción del concepto de eigenvalor y eigenvector: una experiencia con estudiantes universitarios de primer año.* Trabajo de Tesis de Maestría. Universidad Industrial de Santander, Colombia.

Dorier, J., Robert, A., Robinet, R. y Rogalski, M. (2000) The Obstacle of Formalism in Linear Algebra. En J.-L. Dorier (Ed.). *On the Teaching of Linear Algebra*. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Klasa, J. (2010). A few pedagogical designs in linear algebra with Cabri and Maple. *Linear algebra and its applications*, 432(8), 2100-2111. http://doi.10.1016/j.laa.2009.08.039

Lesh, R. & Doerr, H. (2003). *Beyond Constructivist: A Models & Modelling Perspective on Mathematics Teaching, Learning, and Problem Solving*. New Hampshire: Lawrence Erlbaum Associates

Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A & Post, T. (2000). Principles for Developing Thought-Revealing Activities for Students and Teachers. In Kelly, A & Lesh, R (Eds.) *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*, Routledge Handbooks Online. Recuperado de https://www.routledgehandbooks.com/doi/10.4324/9781410602725.ch21

Orozco, J., Cuevas, A., Madrid, H., & Trouche, L. (2018). A proposal of instrumental orchestration to introduce eigenvalues and eigenvectors in a first course of linear algebra for engineering students. *In Actes Re(s)source 2018 international conference ENS*, (pp. 320-323).

Parraguez, M., Roa-Fuentes, S., Jiménez, R., y Betancur-Sanchez, A. (2022). Estructuras y mecanismos mentales que desde una perspectiva geométrica modelan y articulan el aprendizaje de valor y vector propio en $\mathbb{R}^2$. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 25(1), 63-92. http://doi.org/10.12802/relime.22.2513

Possani, E., Trigueros, M., Preciado, J. G., & Lozano, M. D. (2010). Use of models in the teaching of linear algebra. Linear Algebra and its Applications, 432(8), 2125-2140. https://doi.org/10.1016/j.laa.2009.05.004

Salgado, H., & Trigueros, M. (2015). Teaching eigenvalues and eigenvectors using models and APOS theory. *The Journal of Mathematical Behavior*, 39, 100-120. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.06.005

Thomas, M. y Stewart, S. (2011). Eigenvalues and eigenvectors: embodied, symbolic, and formal thinking. *Mathematics Education Research Group of Austaralasia*. 23, 275 - 296. Versión electrónica doi: 10.1007/s13394-011-0016-1.