Modelando a área invadida de uma nascente

José Antonio **Salvador**
Departamento de Matemática, Universidade Federal de São Carlos
Brasil
jasalvador@ufscar.br

Resumo

Uma preocupação para o desenvolvimento sustentável de nosso planeta é a invasão das áreas de preservação das nascentes. As nascentes são fontes de águas superficiais cristalinas que deveriam ter uma área circular de preservação permanente de 50 m (metros) de raio, para favorecer a infiltração da água das chuvas no solo, mantendo assim, o abastecimento dos aquíferos, garantindo a produção de água potável e contribuindo para redução do risco de escassez, o que é essencial ao equilíbrio ambiental. Apresentamos a Modelagem Matemática, trabalhada com uma turma de Licenciatura em Matemática, para o cálculo da área invadida de uma nascente na direção anelar e radial, usando matemática básica e softwares livres para efetuar cálculos, fazer gráficos e simulações, Dessa forma, se pode fornecer dados para que um agente ambiental possa tomar decisões cabíveis sobre a área invadida.

Palavras-chave: Educação Matemática; Matemática Aplicada; Abordagem de tema transversal; Modelagem Matemática Ambiental; Área de preservação permanente de nascentes no Brasil; Uso de softwares livres.

Introdução

Um dos temas contemporâneos transversais de suma importância no ensino do Brasil é a Educação Ambiental, que foi proposta desde o final do século passado; entretanto, este tema vem sendo tratado timidamente no processo de ensino e aprendizagem de Matemática em todos os níveis, embora já conste dos projetos pedagógicos da maioria dos cursos.

A exploração de temas transversais pode ser inserida em diferentes ambientes acadêmicos permeando várias disciplinas usando a Modelagem Matemática.

Trazemos algumas referências sobre a Modelagem Matemática no ensino e sobre o problema ambiental de uma APP (Área de Preservação Permanente) das nascentes. Além disso, relatamos algumas simulações do cálculo da área de uma nascente invadida k, m (metros), na região anelar e na direção radial, desde sua fronteira de proteção ambiental de 50 m de raio, que foram discutidas e elaboradas dinamicamente por uma turma de estudantes do curso de Licenciatura em Matemática usando softwares livres.

Dada a importância do tema, cabe ao professor orientador propiciar aos estudantes, em especial, os diversos questionamentos sobre o problema, provocar a elaboração de possíveis formulações matemáticas no nível básico ou superior e investigar simulações. As orientações iniciais para simular o cálculo da área invadida de uma APP de uma nascente, foram, no sentido de usarem os conceitos de Matemática do Ensino Básico, para que um agente ambiental de nível médio, pudesse entender os resultados dos cálculos realizados, e que pudessem levar também aos alunos das escolas básicas. E em seguida, foi proposta a modelagem da área invadida com conceitos matemáticos vistos no início do Ensino Superior.

Algumas referências sobre o problema

Os diversos impactos ambientais estão nos atingindo com mais intensidade nos últimos tempos e estão provocando grandes mudanças no nosso planeta. O fomento de uma discussão crítica e a conscientização dos problemas ambientais nas disciplinas básicas, especialmente a Matemática, como algo lúdico relacionado à natureza que nos cerca, contribuem para preservar a qualidade de vida e a existência das futuras gerações na nossa Terra.

Muitos educadores, como Freire (1987), na segunda metade do século passado, pregavam abordagens educacionais diferenciadas, inclusive com um viés direcionado para o ambiente que vivemos, alertando sobre a importância de o estudante aprender a ler o mundo, e que ele está inserido em um local que faz parte do nosso planeta, que não é algo abstrato viajando no universo, mas que é seu bairro, sua vizinhança.

A BNCC (Base Nacional Comum Curricular) aponta que durante o Ensino Médio se deve consolidar, ampliar e aprofundar as aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Básico e trazer a Matemática para mais perto da realidade. Além disso, elenca e reforça a incorporação de abordagens transversais integradoras para o ensino:

> *"Cabe aos sistemas e redes de ensino, assim como às escolas, em suas respectivas esferas de autonomia e competência, incorporar aos currículos e às propostas pedagógicas a abordagem de temas contemporâneos que afetam a vida humana em escala local, regional e global, preferencialmente de forma transversal e integradora" (Brasil, 2018, p.19).*

Ela também prega que os estudantes utilizem tecnologias, como calculadoras e planilhas eletrônicas, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Assim, os tópicos transversais devem ser considerados no processo de ensino e de aprendizagem, e podem ser tratados usando a modelagem matemática, que é facilitada com o uso das ferramentas tecnológicas, além de essencial para o desenvolvimento do pensamento matemático computacional.

Transversalmente, a proposta da investigação dos documentos e das leis ambientais relacionadas ao problema, promove uma interação maior entre os estudantes, o orientador e especialistas ampliando o conhecimento do problema, inclusive ressalta a nossa grande responsabilidade sobre a preservação das nascentes e do ambiente em que vivemos.

O encaminhamento do uso da modelagem matemática para tratar de temas transversais é uma estratégia pedagógica que começa pela iniciativa da escolha do tema, que pode surgir dos próprios estudantes, do professor ou mesmo por uma demanda da realidade local ou global. Neste sentido, o problema real que tratamos para determinar a medida da área invadida ao redor de uma nascente na direção radial, foi motivado por uma demanda local de um agente ambiental.

Resolvido o problema, pensamos levar uma discussão geral para salas de aulas, dada a relevância do tema transversal que é capaz de: promover a cidadania, incrementar o espírito crítico, a autonomia, desenvolver habilidades de cálculos matemáticos e computacionais para a formação do futuro professor de Matemática.

O problema de exploração da área invadida de uma nascente foi inicialmente lançado por Salvador e Arenales (2022), para estudantes de Engenharia Ambiental, e agora exploramos com mais detalhes numa turma do curso de Licenciatura em Matemática, com uma discussão mais geral e com a ideia de que os futuros professores possam levar ao Ensino Básico, modelando as várias possibilidades da área invadida. Mostraremos aqui os casos em que se adentra numa região anelar de espessura k, $0 \leq k \leq 50$, m e na direção radial até uma corda ao círculo da APP.

A modelagem matemática tem um papel relevante na área de pesquisa em Matemática Aplicada, nas mais diversas atividades dos povos ao longo do tempo e vem contribuindo com o avanço das civilizações. Ultimamente, ela vem se tornando uma linha importante de investigação na Educação Matemática e como uma excelente estratégia de ensino e aprendizagem. Segundo Bassanezi (2006), a modelagem matemática é “a arte de transformar um problema da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real”. Vários pesquisadores como Almeida, Araújo e Bisognin (2011), Almeida, Silva e Vertuan (2012), Araujo (2010), Barbosa (2006), Borba e Hermínio (2010), Meyer, Caldeira e Malheiros (2011), Salvador e Arenales (2022) e outros como aparecem em Matos, Blum, Houston e Carreira (2001), abordam a Modelagem Matemática no processo de ensino e aprendizagem.

Na exploração de um modelo matemático no ensino, simplificadamente podemos afirmar que após a escolha do tema, busca-se o reconhecimento dos dados e variáveis para a formulação matemática, daí o desenvolvimento e aprofundamento do conteúdo envolvido para a resolução do problema, simulações, que são facilitadas pelas ferramentas computacionais, análise crítica das soluções e interpretação dos resultados.

Foi muito importante a pesquisa sobre nascente, fonte de água doce, essencial para a vida na Terra, que deve ter uma APP ao seu redor de 50 m de raio, conforme a Lei 12651/2012 e a resolução do CONAMA (Conselho Nacional do Meio Ambiente) nº 303, de 20 de março de 2002 (Brasil, 2022), que dispõe sobre os parâmetros, as definições e os limites de áreas de preservação permanente, pois muitos estudantes ainda não conheciam este fato.

Na abordagem do problema do cálculo da área de uma APP invadida, com Modelagem Matemática, vislumbramos como a Matemática realmente se insere num problema real e, como é possível explorar vários conteúdos, sem limitar aos procedimentos lineares estabelecidos nas matrizes curriculares dos cursos. Enriquecido, ainda, com a possibilidade do uso de ferramentas computacionais para trabalhar com dados reais, elaborar tabelas, gráficos e fazer simulações, o que é apontado pela BNCC, atividade que pode ser levada para o Ensino Básico.

Observamos que, à medida que os grupos de estudantes vão discutindo e entendendo o problema, os conceitos matemáticos e ideias vão surgindo naturalmente e, quando necessário, questionamos e recapitulamos os conhecimentos prévios e os levamos a pesquisarem, revisarem e descobrirem, ou mesmo, deduzirem novos resultados. Discutimos alguns passos da modelagem com os estudantes: iniciar com a leitura e entendimento do problema, verificar se é possível uma visualização geométrica, identificar os dados e as variáveis. E então, a partir daí, propor uma formulação matemática adequada, buscar uma estratégia para chegar a uma simulação das soluções possíveis, e no final, indagar sobre a coerência dos resultados e sua validade.

Verificamos que a matemática explorada nas várias tentativas dos estudantes de resolver o problema, foi desde os conceitos abordados no Ensino Básico de círculo, centro, raio, diâmetro, circunferência, perímetro e área de um círculo, área de um anel, ângulo, setor circular, regra de três, área de um setor circular, tangente, secante, corda a um círculo, área limitada pela corda e a fronteira de um círculo, triângulo, simetria, trigonometria, triângulo retângulo, teorema de Pitágoras, área de um triângulo, área de um triângulo retângulo, funções discretas e contínuas, funções trigonométricas e porcentagem. Também se abordou ferramentas da Geometria Analítica e do Cálculo Diferencial e Integral para o equacionamento da região limitada pela circunferência limite da APP e da área invadida, a integração definida, o uso de calculadora científica, planilha eletrônica ou um software computacional para explorar cálculos, tabelas, gráficos e fazer as simulações.

O cálculo da área invadida da APP

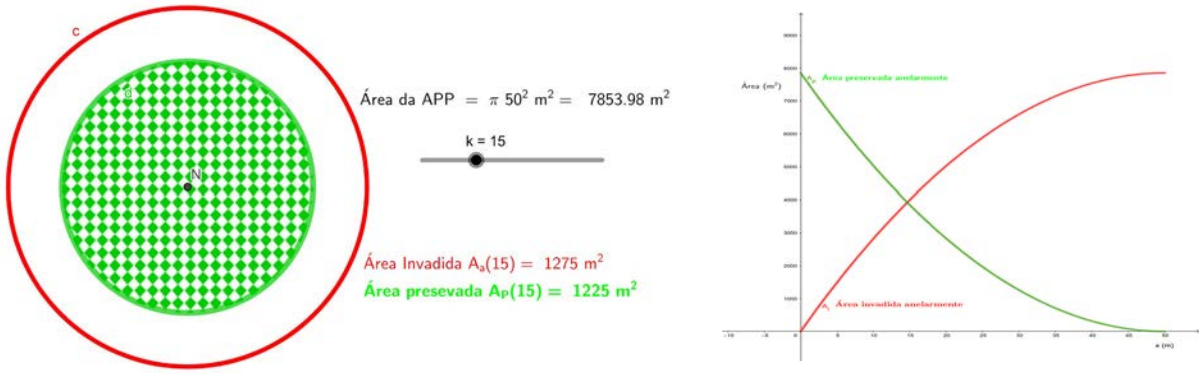
Citamos aqui algumas das principais questões iniciais do problema de invasão da APP de uma nascente que foram levantadas:

- Qual é a área de preservação permanente de uma nascente?
- Que parte da área de preservação da nascente foi invadida?
- Como calcular a área invadida?
- Qual é a porcentagem da área invadida em relação a área que deveria ser preservada?

E, após discussões, um fato relevante, quando perguntados, a maioria dos estudantes disse que nunca tinha visto uma nascente brotando água límpida. E sobre as várias possibilidades de como a APP está sujeita a invasão, ficou claro para eles que a área invadida poderia ser representada como uma parte da área do círculo protetor da nascente. Inicialmente fizeram a representação gráfica de um círculo para a área total de preservação da nascente e, mostraram diferentes formas geométricas de como a área de preservação poderia ser invadida. Neste trabalho mostraremos os casos da invasão anelar (Figura 1a) e a invasão radial adentrando até uma corda a k, $0 \leq k \leq 50$, m da borda da APP (Figura 2a).

Explorando a invasão anelar da APP

Na Modelagem Matemática devemos ter clareza sobre sobre qual é o problema que deve ser modelado e qual é o objetivo do modelo. Neste caso, queremos obter a área da APP, a área invadida segundo um anel ao redor da nascente, e a área que ficou preservada, como mostra a Figura 1a), elaborada com o software GeoGebra ([https://www.geogebra.org/classic)](https://www.geogebra.org/classic).



a) *b)*

Figura 1: Simulação da área da APP de uma nascente invadida anelarmente e a preservada e simulação a) e b).

Inicialmente se calculou a área A_N da APP, em m^2, círculo de centro N e raio R = 50 m em torno da nascente, que deveria ser preservado, dada por uma expressão quadrática do raio: $A_N = \pi R^2 = \pi 50^2$

Neste primeiro momento, foi importante observar que, o valor obtido não é um número inteiro ou racional, o que nos leva a investigação de como se calcula o valor aproximado de π. Boyer (1996), cita que o cálculo da área e perímetro de regiões limitadas por curvas, como a do círculo, sempre foi um grande desafio, desde as primeiras civilizações.

Propomos a cada grupo de estudantes a obtenção de um valor aproximado de π de modo lúdico, por exemplo, fazendo experimentos com a média do quociente das medidas dos perímetros de regiões circulares pelos seus respectivos diâmetros. Se estiverem visitando uma nascente com árvores próximas, por exemplo, poderiam calcular a medida da circunferência a altura do peito pelo diâmetro a altura do peito,$\frac{CAP}{DAP}$, e obter o valor aproximado de π. Considerando π = 3.1416, temos a área de preservação de uma nascente A_N, em m^2: A_N = 7854

Uma discussão pertinente aqui, foi sobre as unidades de medidas de comprimento e de áreas de figuras planas, unidades de medidas agrárias como acre (4047 m^2), hectare (10000 m^2) e a medida do alqueire nos diversos estados brasileiros, bem como as conversões de unidades. Solicitamos o cálculo da área $A_a(k)$, em m^2, da região invadida anelarmente $0 \leq k \leq 50$ m, como mostra a Figura 1a), que é igual, à diferença da área do círculo da APP e a área do círculo de raio menor da APP, r = 50 - k metros, que ficou preservada. Observamos que o problema pode ser resolvido usando a matemática do Ensino Básico:

$$A_a(k) = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi 50^2 - \pi(50-k)^2 = \pi(100k - k^2)$$

Considerado simples pelos estudantes, primeiro calcularam a área invadida e a preservada para alguns valores discretos de k, gerando tabelas e gráficos. Alguns grupos simularam usando o controle deslizante para $0 \leq k \leq 50$ no Geogebra, conforme Figura 1 a) e b), incrementando a ideia do pensamento computacional. Tais valores plotados permitiram a discussão de uma função discreta de k, crescente, à medida que a área invadida vai aumentando. Outros, consideraram a espessura do anel invadido, k = x, variando continuamente para $0 \leq x \leq 50$, e plotaram a função $A_a(x) = \pi(100x - x^2)$, crescente da área invadida, e também a função área que ia ficando preservada $A_p(x) = \pi[50^2 - (100x - x^2)]$, decrescente, com o aumento da invasão, mostrando o ponto onde elas se igualaram quando $k = 50 - 25\sqrt{2}$ ~ 14.64 como na Figura 1b).
Interessante a observação de que a porcentagem da área invadida, k = 15 m, anelarmente $P_{15} = \frac{A_a(15)}{A_N} = 50{,}97\%$, já ultrapassa 50% da área da APP, como mostra a Figura 1b).

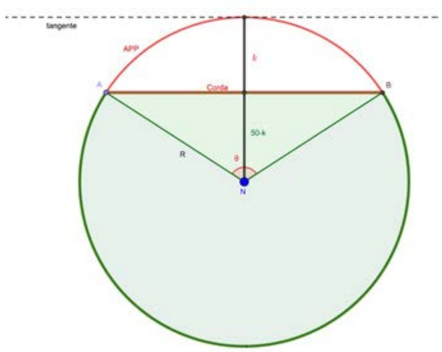
Explorando a invasão radial da APP

A área invadida radialmente até uma corda AB do círculo da APP, foi pensada como a diferença entre a área de um setor circular de um ângulo θ e a área do triângulo ABN, que subentendem a corda AB, adentrada k metros na direção da nascente N, como representada na Figura 2a). Para o entendimento do problema, inicialmente fizeram a visualização geométrica e obtida uma solução da APP invadida radialmente, até uma corda AB adentrada na direção da nascente N, para um valor fixo. Em seguida, foi generalizado até uma região preservada a partir da corda AB com distância d = 50 - k, m do centro da APP, conforme Figura 2a). Da região triangular do setor circular não invadido, o triângulo ABN, suporte da corda, foi dividido em dois triângulos retângulos simétricos, com medidas da hipotenusa, R = 50, cateto d = 50 - k, e outro cateto de L metros, correspondendo a metade da corda AB, que em função de k é dado por:

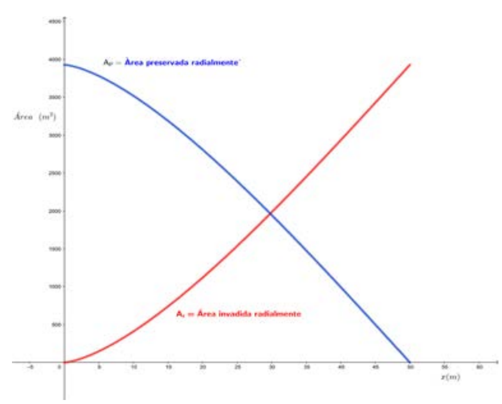
$$L^2 + (50 - k)^2 = 50^2 \Rightarrow L = \sqrt{100k - k^2}, \quad 0 \leq k \leq 50,$$

que é a medida do cateto do triângulo retângulo, que subentende o ângulo θ/2 radianos, em que:

$$sen\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sqrt{100k-k^2}}{50} \Rightarrow \theta = 2arcsen\left(\frac{\sqrt{100k-k^2}}{50}\right), \text{ ou } cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{50-k}{50} \Rightarrow \theta = 2arccos\left(\frac{50-k}{50}\right)$$



a)



b)

Figura 2: Área de uma nascente invadida k metros radialmente e área preservada a) e simulação b).

Aqui, surgiu uma questão deveras importante, que foi discutida com os estudantes: por quê a medida do ângulo para funções trigonométricas é considerado em radianos, não em graus?

A área de todo o setor circular A_s, que abrange a área invadida em m^2, obtida por uma regra de três, é dada em função de k por:

$$A_s = R^2\frac{\theta}{2} = 50^2\left[\frac{2arccos\left(\frac{50-k}{50}\right)}{2}\right] = 2500arccos\left(\frac{50-k}{50}\right)$$

Retirando a área A_T do triângulo ABN, limitado pela corda AB do círculo da APP e vértice N,

$$A_T = \frac{2\left[\sqrt{100k-k^2}\right](50-k)}{2} = \left[\sqrt{100k-k^2}\right](50-k)$$

temos, a área invadida radialmente A_{ri} como uma função de k, igual a:

$$A_{ri}(k) = A_s - A_T = 2500arccos\left(\frac{50-k}{50}\right) - \left[\sqrt{100k-k^2}\right](50-k),\ \ 0 \le k \le 50$$

Com as ferramentas tecnológicas como a calculadora, os softwares livres GeoGebra ou wxMaxima, os estudantes realizaram os cálculos, tabelas, gráficos e simulações para obter a área invadida para diversos valores de k. Com estas abordagens, usando e revisitando os conteúdos básicos, vimos que o problema também pode ser levado para estudantes do Ensino Médio.

Abordagem do problema usando conceitos do Ensino Superior

Numa abordagem com tópicos do ensino superior os estudantes discutiram a formulação matemática com o uso das disciplinas básicas. Representando a nascente N, no centro de um sistema cartesiano plano ortogonal xoy, a função $f(x) = \sqrt{50^2 - x^2}$, $0 \le x \le 50$, representando a semicircunferência superior que limita a área de preservação da nascente e a corda situada a k metros da tangente ao círculo da APP, pela função $g(x) = 50 - x, -L \le x \le L$, que separa a região da nascente invadida da preservada, conforme Figura 2a).

Dessa forma, a integral

$$\int \sqrt{50^2-(x^2)} - (50-x)dx = \frac{1}{2}\sqrt{50^2-(x^2)} + 1250arcsin\left(\frac{x}{50}\right) - (50-x)x$$

da diferença das duas funções f e g, definida de -L a L, nos dá:

$$L\sqrt{50^2-L^2} + 2500arcsin\left(\frac{L}{50}\right) - 100L + 2kL,$$

que em função de k metros, invadido na direção radial é:

$$A(k) = \sqrt{100k-k^2}\left[\sqrt{50^2-(100k-k^2)} + 2k - 100\right] + 2500arcsin\left(\frac{\sqrt{100k-k^2}}{50}\right),\ \ 0 \le k \le 50.$$

Esta função de k foi plotada para valores discretos de k e, também continuamente e simulada com o controle deslizante do GeoGebra. Para a realização ou conferência dos cálculos aritméticos, representações gráficas e simulações, foram usadas as ferramentas computacionais como o GeoGebra ou wxMaxima, conforme sugerimos. Ao checarmos os valores obtidos, verificamos que a medida que a área invadida, na direção radial vai aumentando com o aumento da invasão k, e a área preservada vai diminuindo. Foi verificado, neste caso, para $0 \le x \le 50$ temos que metade da área da APP do lado da invasão se iguala com a área invadida para $k = 30$ m.

Considerações finais

A abordagem do problema ambiental do cálculo da área de invasão de uma APP de uma nascente, com a modelagem matemática, foi uma das possibilidades de ensino atual que encontramos para os licenciandos de uma turma de Matemática pudessem tratar de um tema transversal, explorando e revisando muitos conceitos e conteúdos matemáticos, além das ferramentas computacionais. Mostramos que é de suma importância a apresentação de problemas transversais ambientais em atividades de Matemática, e que os grupos de licenciandos receberam este tema com bastante motivação, se empenharam na busca de soluções para apresentarem seus resultados para a turma, nos propiciando valiosas discussões, inclusive, sobre a influência e as pressões provocadas pelas atividades humanas que vem causando ao ambiente, gerando uma degradação constante.

Nos comentários gerais das discussões provocadas pela turma, citamos, entre elas, o fato de que a água transbordante das nascentes poderia ser escoada para uma área fora da zona de proteção, onde os animais poderiam beber, e em seguida, direcionada seu curso rio abaixo. Levantamos também as sugestões de como se poderia mitigar os danos causados da área invadida ao redor da nascente, como ela deveria ser recomposta e cercada, por exemplo, para impedir o acesso de animais pesados, especialmente em áreas de pastagens, em que, um pisotamento constante pode compactar o solo, bem como favorecer o seu desaparecimento; porém, a tomada de decisões acerca dos resultados obtidos cabe a um profissional como o agente ambiental. A Modelagem Matemática de problemas reais, utilizada por nós constantemente nas disciplinas básicas de Matemática dos cursos de graduação e de mestrado profissional, tem se mostrado uma boa estratégia pedagógica para simulações e a exploração de vários conteúdos matemáticos, pois motiva os grupos de estudantes e o professor orientador a contribuir para a investigação científica e o aprendizado significativo da Matemática.

Referências e bibliografia

Almeida, L. M. W., Araújo, J. L. & Bisognin, E. (2011). Práticas de modelagem matemática na educação matemática: relatos de experiências e propostas pedagógicas. *Londrina: EDUEL*

Almeida, L. M. W., Silva, K. A. P. & Vertuan, R. E. (2012). Modelagem Matemática na Educação Básica. *São Paulo: Contexto.*

Araujo, J. L. (2010). Brasiliam Research on Modelling in Mathematics Education, *ZDM Mathematics Education, 42,* 337-348.

Bassanezi, R. C. (2006). Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia. 3. ed. *São Paulo: Contexto.*

Barbosa, J. C. (2006). Mathematical modelling in classroon: a critical and discursive prespective, *ZDM Mathematics Education, 38, n. 3*, 293-302.

Borba, M. C. y Hermínio, M. H. G. B (2010) A Noção de Interesse em Projetos de Modelagem Matemática, *Educ. Matem. Pesq., 12, n.1,* 111-127.

Boyer, C. B. (1996) História da Matemática. Tradução de Elza F. Gomide. 2. ed. *São Paulo: Edgar Blucher*.

Brasil (2018). Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. *Brasília: MEC.*

Brasil (2022). Ministério do Meio Ambiente (MMA). *Conselho Nacional do Meio Ambiente (CONAMA). Resolução CONAMA nº 303, de 20 de março de 2002.*

Freire, P. (1987) Pedagogia do Oprimido. *17. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra.*

Matos, J. F., Blum, W., Houston, S. K. & Carreira, S. P. (2001). Modelling and Mathematics Education ITMA9: Applications in Science and Thecnology, *Horwood Publishing Series: Mathematics and Applications.*

Meyer, J. F. C. A., Caldeira, A. D. & Malheiros, A. P. S. (2011). Modelagem em Educação Matemática. *Belo Horizonte: Autêntica.*

Salvador, J. A. & Arenales, S. (2022). Modelagem Matemática Ambiental. *São Carlos: EdUFSCar.*