



## Modelación Matemática y los Eclipses

Elizabeth **Montoya-Delgadillo**

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Chile

[elizabeth.montoya@pucv.cl](mailto:elizabeth.montoya@pucv.cl)

Alejandro **Cabrera-Baquedano**

Universidad Paris Cité Francia

Chile

[alejandro.cabrera@pucv.cl](mailto:alejandro.cabrera@pucv.cl)

### Resumen

En la última década en Chile la incorporación de problemas de modelación matemática ha sido fuertemente impulsados para la enseñanza de la Matemática, y más recientemente, la enseñanza interdisciplinar. Sin embargo, los profesores no siempre tienen las herramientas y la concepción clara de lo que es un problema de modelación. En este taller se presentará el fenómeno del eclipse solar y lunar, y como bajo simulaciones, estudiantes de secundaria logran comprender un fenómeno astronómico y la matemática que pueden ser aprendidos. En el taller se discutirán diferentes perspectivas de modelación matemática como la perspectiva cognitiva o realista (Blomhoj, 2009; Kaiser et al., 2006) para la enseñanza y aprendizaje de la matemática y sus implicancias. Nos parece relevante identificar objetivos de propuestas de investigación, como así también, los intereses asociados a los modelos subyacentes. Para esta parte, se cuenta con la teoría de los *Espacios de Trabajo Matemático*.

*Palabras claves:* Modelación Matemática; Simulación; Eclipses; Astronomía; Trabajo Matemático.

### Los eclipses

Chile posee importantes centros de astronomía a nivel mundial y los últimos fenómenos de eclipses han hecho concurrir a diversos astrónomos a estudiarlos, como así también, a su

población en observarlos durante los años 2018, 2019 y 2020. Esto nos parece clave pues genera una oportunidad para que un ciudadano pueda comprender los eclipses como fenómeno astronómico y así comprendiendo la ciencia en sus formas básicas. Es inusual que eclipses totales de Sol consecutivos sean visibles en un mismo país. Sin embargo, debido a los 8.000 kilómetros de longitud que tiene Chile (al considerar la Antártica), se ha dado la posibilidad única de observar durante tres años seguidos espectaculares ocultamientos de nuestra estrella. Así, nos hemos propuesto que los docentes participantes de este taller analicen el razonamiento matemático, desde una perspectiva semiótica, instrumental y discursiva, que desarrollaron estudiantes de liceo al enfrentarse a una actividad de modelación matemática en un contexto de fenómenos reales relacionados con los eclipses, donde es esencial la simulación en la plataforma <https://stellarium.org> y mediciones con imágenes reales (ver Figura 1) ofrecidas por los físicos (y astrónomos) Caerols y Asenjo (2019).



Figura 1. Imágenes reales del eclipse solar año 2020 la Serena Chile. Imágenes propias de Caerols y Asenjo.

El eclipse (del griego *ἐκλειψις*, *ékleipsis*, que quiere decir ‘desaparición’, ‘abandono’) es el nombre que se le da al fenómeno astronómico donde 3 cuerpos celestes: estrella, planeta y satélite se alinean en un punto de sus órbitas, interponiéndose uno de estos en el camino de la luz del sol. Existen eclipses solares y lunares. En términos generales, un eclipse solar es un fenómeno que se produce cuando la Luna se interpone en el camino del astro solar, siendo visible desde la Tierra. Para que ocurra, el Sol, la Luna y la Tierra deben estar en el mismo plano, y existen totales, parciales o anulares. Un eclipse lunar se produce cuando la tierra se coloca entre la luna y el sol, de manera que la sombra generada por nuestro planeta se proyecta en el satélite, y existen penumbral, parcial y total. La diferencia visible en algunos eclipses lunares es que además de oscurecerse adquiere un color rojizo o dorado,

La astronomía puede generar diferentes instancias de aprendizaje significativo en los estudiantes al momento de emplear la matemática, y no se trata de usarla sino de comprenderla y tener la posibilidad de enseñar de manera integrada e interdisciplinar. Así, en este taller se mostrarán razonamientos de los estudiantes al comprender los eclipses y su geometría, obtener distancias como el radio de la luna utilizando proporciones, como también, comprender que el error en las aproximaciones implica un error de medidas mucho mayor al tamaño real de la luna. Por último, es importante mencionar el rol que juegan las herramientas digitales que nos permiten indagar en una enseñanza interdisciplinar. Cabe señalar, que en este caso se usará Stellarium puesto que permite a los estudiantes explorar los movimientos de los cuerpos celestes y simular el fenómeno del eclipse y, GeoGebra debido a que es un software de geometría dinámica que permite analizar matemática imágenes importadas a él, además ambos softwares son de acceso abierto.

Modelar fenómenos físicos son temas de interés para muchos investigadores y existen trabajos de larga data, y el congreso ICTMA es un claro ejemplo de las investigaciones que se

desarrollan. En particular, Laguerre (2014) aborda el tema de los eclipses en un programa de física para estudiantes de noveno grado de un establecimiento de Francia; y pone en relieve la comprensión de la realidad y fenómenos físicos con una perspectiva de la Didáctica de los Dominios de Experiencia e integrando la modelación matemática.

En este taller presentamos datos de una investigación (Vergara et al., 2021), en el cual, abordamos modelar un eclipse solar total con estudiantes de nivel 8 (12-13 años) de un establecimiento de Chile.

### Marco Teórico

Basados en el objetivo propuesto y el diseño de las tareas, articulamos el ciclo de modelación (Borromeo-Ferri, 2010) y la teoría de Espacios de Trabajo Matemático (Kuzniak et al., 2016; 2022), ver Figura 2. Esta teoría, reconocida por la sigla ETM, permite describir y caracterizar el trabajo matemático de un individuo en una tarea específica. Con esta aproximación es posible describir como elementos epistemológicos y cognitivos son articulados en la resolución de una tarea, mostrando circulaciones entre los distintos elementos que lo componen, e involucrando sus dimensiones semióticas (registros y signos), instrumentales (artefactos digitales o no) y discursivas (razonamientos de prueba y justificación).

Incorporamos determinados conceptos relacionados al modelamiento matemático desde un punto de vista cognitivo, para esto utilizaremos el ciclo de modelación Blum-Borromeo (Borromeo-Ferri, 2010) quien ilustra el ciclo de modelado basado en seis procesos. Así, el modelo matemático es un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que representa, de alguna forma (gráfica, numérica o algebraica), el fenómeno en cuestión. La autora define la modelización como un proceso cíclico donde la reflexión sobre el modelo y la intención de utilizarlo conducen a una constante redefinición.

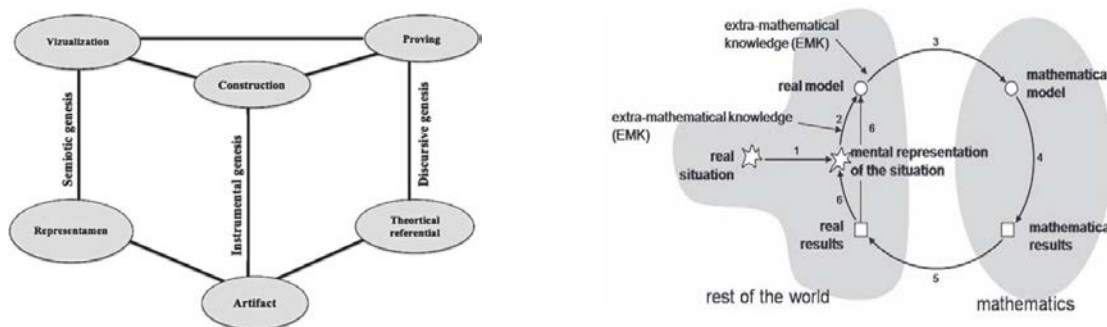


Figura 2. Diagrama del ETM de Kuzniak et al., (2022) y Ciclo de modelación de Borromeo-Ferri (2010).

### Metodología

La metodología del taller es del tipo teórico-práctica. Durante la sesión se discutirán elementos teóricos asociados a las diferentes perspectivas de modelación matemática y la teoría de los Espacios de Trabajo Matemático que permitirán a los presentes analizar datos que serán presentados y, por otro lado, los asistentes al taller recrearán el fenómeno de los eclipses lunares

y solares mediante la plataforma Stellarium y posteriormente, realizar procedimientos matemáticos en Geogebra para validar resultados teóricos.

Los datos que se muestran en este taller fueron recolectados durante una sesión de 90 minutos en el año 2021 mediante una situación didáctica que contempló tres etapas. Los estudiantes con quienes se implementó esta situación contaban con acceso a internet y un computador con el software Geogebra. Los participantes de la experimentación fueron 30 estudiantes de 12 a 13 años, de un establecimiento público de Chile. En cuanto a la recolección y análisis de datos esta se realizó a partir de las producciones escritas de los estudiantes, los archivos Geogebra que los estudiantes desarrollaron, y la transcripción de diálogos realizadas entre estudiantes y el profesor.

## Resultados

En el taller se recreará la primera etapa y se entregarán datos de las dos etapas siguientes para que los asistentes caractericen y analicen (con un sustento teórico) el trabajo realizado por los estudiantes (que se describen en el apartado de la metodología), y puedan los asistentes analizar el razonamiento empleado por los estudiantes al desarrollar una actividad de modelación matemática en un contexto de fenómeno real como son los eclipses.

También, se espera que los asistentes reflexionen sobre los alcances y limitaciones de un problema de modelación matemática, como así también, comprender la complejidad de esta cuando se elige una perspectiva de modelación epistemológica, cognitiva (como en este caso) o la educacional, socio-crítico, realista y contextual (Blomhoj, 2009; Kaiser et al., 2006; Cosmes Aragón et al., 2021).

A modo de ejemplificar en este escrito, mostramos algunos datos de las etapas que se recrearán en el taller:

**Etapa 1.** El objetivo de la primera parte es caracterizar los conocimientos previos que poseen los estudiantes en relación con los eclipses y si presenciaron los que ocurrieron en 2019 y 2020. Para ello, los asistentes simularán un eclipse usando el software Stellarium, (ver figura 3).

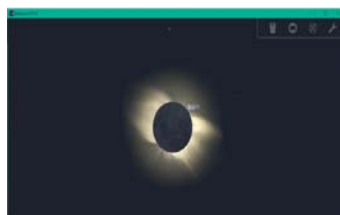


Figura 3. Software Stellarium al momento de suscitarse el eclipse total. Elaboración propia.

**Etapa 2.** El objetivo consistía en que los estudiantes pudiesen transitar al modelo matemático (MM). Al respecto, reconocemos en la transición entre el modelo real (MR) y el modelo matemático (MM) es influido por el uso del software Stellarium, y los estudiantes obtienen los resultados reales utilizando solo sus competencias matemáticas y la instrumentalización del software Geogebra, (ver figura 4).

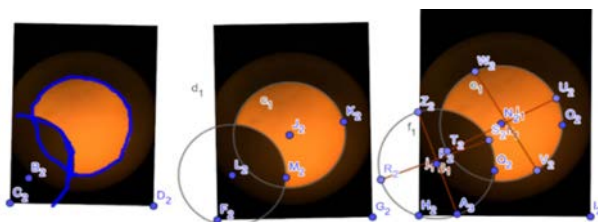


Figura 4. El estudiante traza cuerdas cercanas al diámetro como estrategia para determinar el centro de la circunferencia.

## Conclusiones

Si bien es cierto que parece apropiado modelar el sol y la luna como una circunferencia y hacer emerger una matemática con sentido, de lugares geométricos y propiedades en la Geometría Euclidiana, también es apropiado cuestionarse la perspectiva de modelación matemática (MM) que se desea llevar a la sala de clases. Así, tanto formadores como investigadores, pueden discutir frente a estos desafíos y oportunidades de enseñar matemáticas dialogando con otra disciplina, o bien, en un contexto interdisciplinar.

En este taller esperamos que los asistentes reflexionen de sus propias producciones para lograr comprender el trabajo de los estudiantes con una perspectiva práctica y teórica. Nos parece, que generar diálogos es fundamental y la modelación matemática permite generar vínculos interdisciplinarios para la enseñanza de la matemática y las ciencias básicas.

## Referencias y bibliografía

- Bikner-Ashbahr, A., Knipping, C., & Presmeg, N. (2015). *Approaches to qualitative research in mathematics education*, Dordrecht: Springer.
- Blomhøj, M. (2009). Different perspectives in research on the teaching of learning mathematical modelling. In M. Blomhøj, & S. Carreira. *Mathematical application and modelling in the teaching and learning of mathematics. Proceedings from Topics Study Group 21*(pp. 1-18) Monterrey, México.
- Borromeo-Ferri, R. (2010). On the Influence of Mathematical Thinking Styles on Learners' Modeling Behaviour. *Journal Für Mathematik-Didaktik*, 31(1), 99–118. <https://doi.org/10.1007/s13138-010-0009-8>
- Caerols, H., & Asenjo, F. (2019). Estimating the Moon to Earth radius ratio with a smartphone, a telescope and an eclipse. *The Physics Teacher*, 58(7):497–501, 2020.
- Cosmes Aragón, S., & Montoya Delgadillo, E. (2021). Understanding links between mathematics and engineering through mathematical modelling- The case of training civil engineers in a course of structural analysis (pp 527-538). In F. Leung, G.A. Stillman, G. Kaiser & K.L. Wong (Eds.), *Mathematical Modelling in East and West*. Cham: Springer.
- Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM. The International Journal On Mathematics Education*, 38(3), 302-310.
- Kuzniak, A., Montoya Delgadillo, E., y Vivier, L. (2016). El espacio de trabajo matemático y sus génesis. *Cuadernos xv de Investigación y Formación en Educación Matemática* (237-251). En Centro de Investigación y Formación en Educación Matemática, Universidad de Costa Rica, (Eds.), Costa Rica.

- Kuzniak, A., Montoya Delgadillo, E., & Richard, P. (2022). *Mathematical Work in Educational Context: The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces*. Springer Publishing.  
<https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8>
- Laguerre, E. (2014). Une modélisation d'une éclipse solaire totale. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 34(2-3), 133-165. <https://revue-rdm.com/2014/une-modelisation-d-une-eclipse/>
- Vergara, N, y Valenzuela, G. (2021). Enseñanza de círculo y circunferencia en estudiantes de octavo básico, desde la observación de un eclipse solar. Trabajo final para optar al título de profesor de Matemáticas. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile.
- Yin, R. K. (2009). *Case study research. Design and methods* (4th ed). Thousand Oaks: SAGE Publications INC.