Como auxiliar crianças na resolução de problemas de raciocínio combinatório: a explicitação dos princípios invariantes

Juliana Ferreira Gomes da **Silva**
Universidade Federal de Pernambuco
Brasil
julianafgs@yahoo.com.br
Alina Galvão **Spinillo**
Universidade Federal de Pernambuco
Brasil
alinaspinillo@hotmail.com

Resumo

O presente estudo testou a ideia de que a explicitação dos princípios que regem o raciocínio combinatório poderia auxiliar as crianças na resolução de problemas de produto cartesiano. Para testar tal hipótese, quarenta crianças com idade entre sete e oito anos resolveram problemas combinatórios com estes princípios omitidos (Situação 1) ou explicitamente mencionados (Situação 2). Os resultados indicam que as crianças são significativamente melhores na Situação 2 do que na Situação 1, tanto em termos de respostas corretas como nas estratégias adotadas. Além disso, o desempenho na Situação 1 (implícito) melhorou significativamente quando os problemas foram resolvidos após os da Situação 2 (explícito). Em conclusão, as crianças podem resolver com sucesso problemas de produto cartesiano em que os princípios básicos são explicitamente citados e também são capazes de empregar esses princípios na solução de problemas mesmo quando estes apresentam a relação de forma implícita.

Palavras chave: raciocínio combinatório, problemas de produto cartesiano, princípios invariantes, crianças.

Abstract

This study tested the idea that children could solve Cartesian product problems when the principles governing combinatorial reasoning are explicitly mentioned. Children aged seven and eight years solved combinatorial problems with these principles either omitted (Situation 1) or explicitly mentioned (Situation 2). The children did significantly better in Situation 2 than in Situation 1 both in terms of correct responses as well as the strategies adopted. The performance in Situation 1 (implicit) improved significantly when the problems were solved after Situation 2 (explicit) was given. In conclusion, children can successfully solve combinatorial problems in which the basic principles are explicitly mentioned and are also able to employ these principles in the solution of problems even when such principles are merely implicit.

Keywords: combinatory reasoning, Cartesian product problems, invariants principles, children.

Introdução

O raciocínio combinatório desempenha um papel importante no desenvolvimento cognitivo (Inhelder e Piaget, 1958; Piaget e Inhelder, 1975) e na compreensão de conceitos matemáticos (Vergnaud, 1991). Além de ser um domínio específico da matemática, o raciocínio combinatório pode ser considerado um sistema operacional, ou seja, um modo de agir ou proceder quando confrontado com um problema cuja solução exige este tipo de raciocínio, tendo, portanto, aplicações práticas. Sua relevância e complexidade tornam este tema de investigação desafiador tanto para o campo da psicologia como do ponto de vista educacional.

As dificuldades das crianças com problemas combinatórios têm sido relatadas na literatura (Bryant, Morgado & Nunes, 1992; Eizenberg & Zaslavsky, 2002; Inhelder & Piaget, 1958; Moro & Soares, 2006; Nesher, 1988; Piaget & Inhelder, 1975; Taxa-Amaro, 2006). As tentativas de correspondência um-para-muitos, isto é, entre um elemento e todos os outros são limitadas em crianças de sete e oito anos. Muitas das crianças de nove anos ainda não usam nenhum método sistemático para a formação de combinações n x n. No entanto, alguns estudos demonstraram que as crianças são capazes de construir e analisar os produtos de dois conjuntos, adotar procedimentos de solução mais eficientes que envolvam a correspondência um-para-muitos e aprender alguns dos princípios básicos que regem o raciocínio combinatório (English, 1991 1992; 1993; Mekhmandarov, 2000).

Assumindo que os conceitos matemáticos envolvem um conjunto de invariantes (Vergnaud, 1997), torna-se importante identificar quais invariantes relacionados ao raciocínio combinatório as crianças precisam compreender a fim de resolver os problemas de produto cartesiano. Mekhmandarov (2000) apresenta quatro princípios básicos que regem o raciocínio combinatório: (i) o entendimento de que uma combinação é formada apenas com um item de cada um dos dois conjuntos elementares, (ii) o entendimento de que a combinação formada é um elemento do novo conjunto produto, (iii) o entendimento de que cada item dos conjuntos elementares pode aparecer em diversas combinações (correspondência um-para-muitos), e (iv) o entendimento de que cada combinação deve aparecer apenas uma vez no conjunto produto (não há repetições). Considerando que, em problemas de produto cartesiano (ao contrário de outros problemas de multiplicação), estes princípios estão implícitos [especialmente a correspondência um-para-muitos, como salientado por Nunes e Bryant (1997)], pode-se perguntar se o fato de mencionar explicitamente estes princípios no enunciado do problema poderia capacitar as crianças para resolver problemas deste tipo corretamente, adotando as estratégias adequadas. Esta possibilidade é analisada no presente estudo, o que contrasta duas situações na solução de problemas de produto cartesiano multiplicativos: uma em que estes princípios estão implícitos e outra em que estes princípios são claramente mencionados.

Método

Participantes

Quarenta crianças, de ambos os sexos, com média de idade de oito anos e dois meses, alunas do 3º ano do ensino fundamental de uma escola primária de classe média na cidade de Recife (Brasil). Nenhuma criança tinha sido instruída formalmente sobre a multiplicação no contexto escolar, também não eram repetentes ou apresentavam dificuldade de aprendizagem, segundo informações da escola.

Procedimento e Planejamento Experimental

As crianças individualmente resolveram oito problemas multiplicativos de produto cartesiano em duas situações distintas: Situação 1, em que os princípios subjacentes à estrutura típica cartesiana de problemas combinatórios (ver os princípios mencionados por Mekhmandarov, 2000) não foram explicitados e Situação 2, em que estes princípios foram explicitados, como pode ser visto nos exemplos apresentados abaixo. Em cada situação, dois problemas de percurso (combinação de entradas e saídas de um parque) e dois problemas de traje (combinação de saias e blusas) foram apresentados em cartelas na forma escrita. As crianças foram solicitadas a explicar o seu raciocínio ao resolver os problemas.

Pensou-se que o tipo de problema poderia ter um efeito sobre o desempenho das crianças e sobre as suas estratégias de solução. A ordem de apresentação dos quatro problemas em cada situação foi aleatória, definida por sorteio realizado antes da entrevista. A única restrição era que dois problemas do mesmo tipo (percurso e traje) não poderiam ser apresentados de forma consecutiva.

A metade dos participantes foi apresentada primeiro aos problemas da Situação 1, seguido pela Situação 2 (Grupo 1), a outra metade foi apresentada primeiro a Situação 2, seguido da Situação 1 (Grupo 2). O objetivo foi comparar estes grupos a fim de observar se a ordem em que as situações foram apresentadas (implícito-explícito versus explícito-implícito) teve um efeito sobre a solução dos problemas pelas crianças em cada grupo. O tempo para solução dos problemas era livre, papel e lápis foram fornecidos e as entrevistas gravadas em áudio.

Os problemas

Os seguintes exemplos são de problemas na Situação 1 (implícito):

O parque tem duas entradas (A e B) e três saídas (1, 2 e 3). Combinando as entradas e saídas, Pedro pode fazer caminhos diferentes para entrar e sair do parque. De quantas maneiras diferentes ele pode entrar e sair do parque? (Problema de percurso).

Júlia tem duas saias (verde e rosa) e três blusas (preto, amarelo e branco). Ela quer combinar as saias e as blusas para formar conjuntos. Quantos conjuntos diferentes ela pode formar? (Problema de traje).

Os seguintes exemplos são de problemas na Situação 2 (explícito):

Paulo foi para o parque de diversões, que tem quatro entradas (A, B, C, D) e duas saídas (1, 2). As pessoas têm que entrar pela entrada e sair pela saída. Elas não podem entrar e sair pela mesma porta. Por exemplo, Paulo pode entrar através de uma entrada e sair pela saída 1. Se ele for ao parque de novo, ele pode entrar através de uma entrada e sair pela saída 2, que é um caminho diferente do que ele usou pela primeira vez, não é? Durante as férias, Paulo quer ir para o parque de diversões muitas vezes em dias diferentes, mas ele não quer repetir os caminhos de entrada e de saída, ele quer fazer um caminho diferente cada vez que ele vai ao parque. Combinando todas as entradas e saídas, de quantas maneiras diferentes Paulo pode entrar e sair do parque de diversões? (Problema de percurso).

Hugo vai viajar para a casa de seu avô. Ele colocou em sua mala três calças (preto, marrom e azul) e cinco camisas (amarelo, vermelho, laranja, verde e cinza). Ele pode combinar as calças e as camisas para formar conjuntos, mas ninguém usa todas as calças e as camisas de uma só vez, ele usa apenas uma calça e uma camisa de cada vez, certo? Combinando as camisas e as calças, ele pode formar conjuntos diferentes. Nesta viagem, Hugo não quer repetir as roupas, ele quer usar roupas diferentes todos os dias. Por exemplo, ele pode usar a calça preta com a camisa laranja em um dia e, em outro dia, ele pode usar a mesma calça preta com a camisa cinza, que seria uma roupa diferente, não é? Combinando todas as calças e camisas, quantos conjuntos diferentes Hugo pode formar? (Problema de traje).

Análise das estratégias adotadas

Como mencioando, as crianças foram solicitadas a explicar a forma com haviam resolvido os problemas. A análise destas explicações permitiu identificar seis tipos distintos de estratégias, com descrito a seguir:

Estratégia 1: a criança realiza a adição ou a subtração dos números contidos no enunciado do problema, sem demonstrar qualquer tentativa de combinar os elementos.

Estratégia 2: a criança pensa em termos de pares fixos (uma blusa com uma saia, uma entrada com uma saída), sem aceitar a ideia de que um elemento pode ser usado em mais de uma combinação.

Estratégia 3: a criança aceita o fato de que um elemento pode fazer parte de mais de uma combinação, mas isso não é feito de forma sistemática e exaustiva. Apesar de gerar uma resposta incorreta, essa estratégia aponta para o surgimento da correspondência um-para-muitos e expressa alguns dos princípios básicos que regem o raciocínio combinatório.

Estratégia 4: a criança realiza a correspondência um-para-muitos com todas as combinações possíveis através da contagem.

Estratégia 5: a criança realiza a correspondência um-para-muitos com todas as combinações possíveis através da adição repetida.

Estratégia 6: a criança realiza o cálculo multiplicativo com os números contidos no enunciado do problema, encontrando todas as combinações possíveis.

Os primeiros três tipos de estratégias são procedimentos inadequados que levam ao erro na resolução do problema. No entanto, apesar de inadequada, a Estratégia 3 expressa o surgimento de uma noção essencial ao raciocínio combinatório que a ideia de combinação flexível dos pares. Neste sentido, esta estratégia parece ser um tipo de erro que se diferencia dos demais. Os últimos três tipos de estratégias envolvem o raciocínio combinatório e levam à resposta correta.

Resultados

Os resultados foram analisados de acordo com o número de respostas corretas e de acordo com as estratégias de resolução adotadas pelas crianças em cada problema.

A Tabela 1 ilustra o desempenho dos participantes neste estudo.

Tabela 1: *Porcentagem de respostas corretas por tipo de problema e situação.*

	Problemas Percurso	Problemas Traje	Total
Situação 1 (implícito)	51.2	50	50.6
Situação 2 (explícito)	67.5	60	63.8
Total	59.4	55	

De modo geral, as crianças se saíram melhor na Situação 2 (explícito) do que na Situação 1 (implícito). A porcentagem de respostas corretas, no entanto, não diferiu com relação ao tipo de problema, quer no geral, quer no interior de cada situação.

A Tabela 2 mostra os resultados em relação a cada grupo de crianças. Nota-se que no Grupo 1 (implícito-explícito), o desempenho na Situação 2 foi significativamente melhor do que na Situação 1 tanto em termos gerais (Wilcoxon: $Z= -2.514$, $p= 0.012$) como em cada tipo de problema (percurso: $Z= -2.640$, $p= 0.008$; traje: $Z= -2.197$, $p= 0.028$). Assim, independentemente do tipo de problema, as crianças do Grupo 1 foram mais bem sucedidas quando resolveram os problemas na Situação 2. O padrão de resultados do Grupo 2 (explícito-implícito) difere do observado no Grupo 1, o desempenho do segundo grupo foi o mesmo em ambas as situações, tanto no geral como em cada tipo de problema. Parece que a Situação 2 (explícito) teve um efeito facilitador na resolução dos problemas na Situação 1 (implícita), como se as crianças do Grupo 2 tivessem aplicado os princípios explicitados na Situação 2 para resolver os problemas na Situação 1, aumentando a porcentagem de respostas corretas de 26.25% para 75%.

Tabela 2: *Porcentagem de respostas corretas por tipo de problema em cada grupo.*

	Problemas Percurso	Problemas Trajes	Total
Grupo 1 (implícito-explícito)			
Situação 1 (implícito)	27.5	25	26.2
Situação 2 (explícito)	62.5	50	56.2
Total	45	37.5	
Grupo 2 (explícito-implícito)			
Situação 1 (implícito)	75	75	75
Situação 2 (explícito)	72.5	70	71.2
Total	73.5	72.5	

Em ambos os grupos, o desempenho foi semelhante com relação aos problemas de percurso e traje, o que indica que estes problemas não diferem quanto ao grau de dificuldade.

A Tabela 3 mostra a distribuição das estratégias empregadas. De modo geral, as estratégias 3 e 5 foram as mais frequentes no Grupo 1, enquanto que as Estratégias 5 e 6 foram mais adotadas no Grupo 2. No Grupo 1, o Teste Wilcoxon revelou que a Estratégia 1 foi significativamente mais frequente na Situação 1 do que na Situação 2 ($Z= -2.264$, $p= 0.024$), enquanto que a Estratégia 4 e a Estratégia 5 ($p< 0.03$) foram mais frequentemente empregadas na Situação 2 do que na Situação 1, portanto, estratégias mais elementares foram mais frequentes na Situação 1 e estratégias mais sofisticadas foram mais frequentes na Situação 2. No Grupo 2, não houve diferença no emprego das estratégias nas duas situações. Ressalta-se que as Estratégias 5 e 6 na Situação 1 foram mais utilizadas no Grupo 2 do que no Grupo 1.

Tabela 3: *Porcentagem de estratégias por situação em cada grupo*.

	Grupo 1		Grupo 2	
	Situação 1 (implícito)	Situação 2 (explícito)	Situação 1 (implícito)	Situação 2 (explícito)
Estratégia 1	20	5	7.5	10
Estratégia 2	13.8	11.2	10	7.5
Estratégia 3	38.8	27.5	7.5	10
Estratégia 4	3.7	16.3	11.2	10
Estratégia 5	21.2	33.8	42.6	46.2
Estratégia 6	2.5	6.2	21.2	16.3

Discussão e conclusões

Os resultados deste estudo indicam que, quando um problema explicita em seu enunciado os princípios básicos do raciocínio combinatório, as crianças são capazes de resolver problemas de produto cartesiano corretamente através da adoção de estratégias adequadas. O mesmo não ocorre na resolução de problemas em que estes princípios estão meramente implícitos, como ocorre na resolução de problemas verbais clássicos frequentemente adotados em pesquisas sobre o raciocínio combinatório em crianças. Explicitar os princípios básicos do raciocínio combinatório no enunciado dos problemas chama a atenção da criança para as propriedades (invariantes) que regem este tipo de raciocínio, como a difícil correspondência um-para-muitos, que são cruciais para a solução de problemas combinatórios. Outro dado importante é que, uma vez que estes princípios básicos são explicitados para a criança, ela é capaz de aplicá-los em outras situações nas quais estes princípios estão implícitos. Isto foi demonstrado pelas crianças do Grupo 2 que resolveram primeiro os problemas em que estes princípios estavam explícitos. Uma investigação futura deve examinar o efeito de ordem como uma sequência didática que pode ser aplicada à sala de aula.

Quanto às estratégias identificadas, parece haver um desenvolvimento nos tipos de erros que as crianças apresentam ao resolver problemas combinatórios, uma vez que existem estratégias que revelam a emergência de uma compreensão da correspondência um-para-muitos, mesmo quando a resposta está incorreta, como é o caso da Estratégia 3. As estratégias que levam à resposta correta também representam uma hierarquia de soluções cada vez mais sofisticadas, que vão desde a simples contagem das combinações estabelecidas para a adição repetida e a utilização (embora rara) da multiplicação, que são ações eficientes que permitam à criança gerar todas as combinações possíveis.

É interessante notar que, apesar das estratégias mais elaboradas serem mais frequentes na situação explícita; estas estratégias também foram adotadas para os problemas implícitos quando os problemas na situação explícita foram resolvidos em primeiro lugar. Assim, a explicitação dos princípios básicos do raciocínio combinatório promove o uso de estratégias mais elaboradas envolvendo correspondência um-para-muitos.

Os resultados do presente estudo são semelhantes aos descritos por English (1992) e Mekhmandarov (2000) em que eles demonstram que, em determinadas circunstâncias, as crianças de oito anos de idade podem resolver problemas de produto cartesiano. Esta descoberta tem implicações relevantes para o ensino de matemática no ensino fundamental. Por exemplo, estudos de intervenção deveriam ser realizados nos quais os princípios básicos que regem o raciocínio combinatório seriam explicitamente mencionados pelo professor em uma grande variedade de situações na sala de aula, incluindo, também, problemas de produto cartesiano resolvidos através da divisão (problemas inversos).

O principal ponto a ser ressaltado aqui é que, para além dos limites do pensamento das crianças, há possibilidades que precisam ser explorados em relação à capacidade de resolver problemas combinatórios.

Limitações do estudo e pequisas futuras

Como o presente estudo investigou crianças que não tinham conhecimento formal acerca da multiplicação, seria interessante examinar crianças mais velhas (4º e 5º ano) com problemas de raciocínio combinatório mais complexos, envolvendo duas ou três variáveis, com valores de combinações possíveis maiores que o desde estudo. Problemas de produto cartesiano resolvidos através da divisão (problemas inversos) são considerados ainda mais difíceis do que os problemas multiplicativos. Seria importante examinar se a explicitação dos princípios básicos que regem o raciocínio combinatório teria o mesmo efeito sobre o desempenho e as estratégias adotadas nos problemas inversos. Um estudo semelhante poderia ser realizado com problemas de arranjo, permutação e combinação, levando-se em consideração as características próprias de cada tipo de problema. Poderia ser desenvolvido, ainda, um estudo de intervenção que combinasse diferentes situações como, por exemplo, situações que enfocassem a natureza prática do conceito (uso do diagrama cartesiano, material concreto, diversas representações) e situações que enfocassem a natureza teórica do conceito (explicitação dos princípios invariantes), a fim de desenvolver uma proposta didática para o ensino de problemas de combinatória.

Referências Bibliográficas

Bryant, P., Morgado, L.; & Nunes, T. (1992). Children's understanding of multiplication. *Proc. of the 16th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education.* Tokyo: PME.

Eizenberg, M. M.; Zaslavsky, O. (2002). Undergraduate student's verification strategies of solutions to combinatorial problems. *Proc. of the 26th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 321-328). Norwich: PME.

English, L. D. (1991). Young children's combinatoric strategies. *Educational Studies in Mathematics*, 22 (5), 451-474.

English, L. D. (1992). Children´s use of domain-specific knowledge and domain-general srategies in novel problem solving. *British Journal of Educational Psychology, 62*, 203-216.

English, L. D. (1993). Children´s strategies for solving two-and three dimensional combinatorial problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 24* (3), 255-273.

Inhelder, B. & Piaget, J. (1958). *The growth of logical thinking: From childhood to adolescence*. London: Routledge and Kegan Paul.

Mekhmandarov, I. (2000). Analysis and synthesis of the cartesian product by kindergarten children. *Proc. of the 24th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 295-301). Hiroshima: PME.

Moro, M. L. F.; Soares, M. T. C. (2006). Níveis de raciocínio combinatório e produto cartesiano na escola fundamental. *Revista Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, v.8, n.1, p. 99-124.

Nesher, P. (1988) Multiplicative school word problems: Theoretical approaches and empirical findings. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.): *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 19-40). Hillsdale, NJ.: Lawrence Erlbaum Associates.

Nunes, T.; Bryant, P. (1997). *Crianças fazendo matemática*. Porto Alegre: Artes Médicas.

Piaget, J. & Inhelder, B. (1975). *The origin of the idea of chance in children*. New York: Norton & Company.

Taxa-Amaro, F. O. S. (2006). Solução de problemas com operações combinatórias. Em M. R. F. de Brito (Org.), *Solução de problemas e a matemática escolar*, pp. 163-183. Campinas: Alínea.

Vergnaud, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10, 133-171.

Vergnaud, G. (1997). The nature of mathematical concepts. In T. Nunes & P. Bryant (Eds.), *Learning and teaching mathematics: An international perspective* (pp.5-28). Hove: Psychology Press.