Precaución: La resolución de problemas puede generar descubrimiento matemático. El caso de las tuberías.

Rodrigo **Rojas-Muñoz**
Universidad Austral de Chile
Chile
rodolforojas@uach.cl

Palabras clave: Problema de Herón; Resolución de Problemas; Optimización; Aprendizaje Colaborativo.

Contexto

Este descubrimiento se produjo en un taller estudiantes de enseñanza secundaria (13-18 años) de un Club matemático escolar.

El problema de las tuberías

Dos ciudades A y B van a tener un abastecimiento de agua en un río recto que está a *a* km de la ciudad A y a *b* km de la ciudad B. Si los puntos sobre el río más cercano a A y B están separados por *c* km y A y B están en el mismo lado del río, ¿dónde debe estar localizada la estación de bombeo para que se necesite la menor cantidad de tubería?

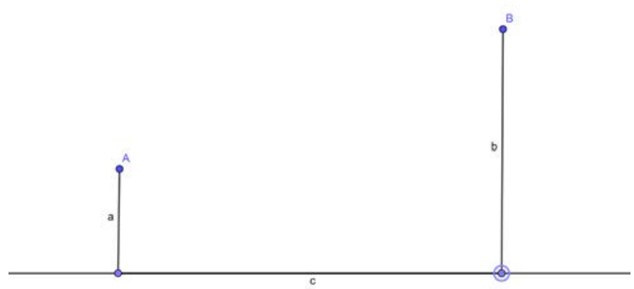

Figura 1. Esquema del problema de las tuberías.

La solución canónica

Este problema se resuelve tradicionalmente mediante derivadas o mediante reflexión. Se refleja axialmente A alrededor del río para obtener A'. Se calcula la distancia d' de B a A'. Esto define un punto C en el río que marca la ubicación de la estación de bombeo. Luego, el largo de las tuberías es igual a

$$d' = \sqrt{(a+b)^2 + c^2}$$

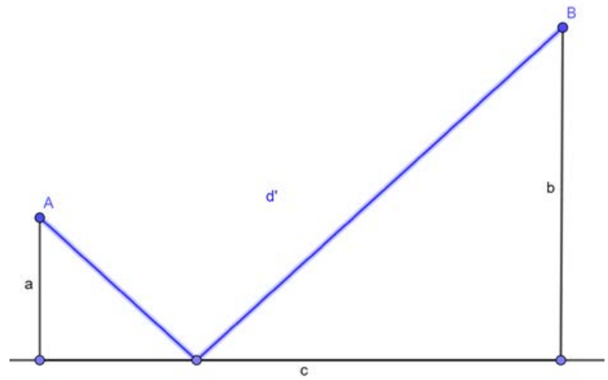

Figura 2. Esquema de resolución del problema de las tuberías por reflexión.

La tarea

Una familia quiere conectar tuberías que unan las dos casas que tienen en un campo con una sola bomba de agua en canal recto. Si una casa está a 10 m del canal y la otra casa está a 20 metros del canal, además los puntos del canal más cercanos a cada casa están a 20 metros entre sí. ¿dónde debe ser ubicada la bomba de agua para que el diseño ocupe menos tubería?

La solución canónica

$$d' = \sqrt{(10+20)^2 + 20^2} = 10\sqrt{13}\,m$$

El descubrimiento

La mayoría de los equipos de la clase llegó a la conclusión tradicional, pero un equipo prefirió un camino que conectara las casas con una tubería y que desde su punto medio saliera una tubería hacia el río. Luego, corrigieron la ubicación hasta darse cuenta que la tubería de menor longitud debía pasar por la casa A.

$$d'' = \sqrt{(b-a)^2 + c^2} = \sqrt{(20-10)^2 + 20^2} = 10\sqrt{5}\,m < 10\sqrt{13}\,m$$

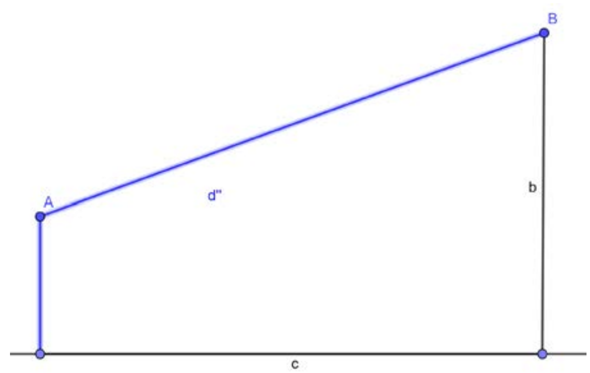

Figura 3. Esquema de resolución del problema pasando la tubería por A.

El teorema

Si A está en el eje Y, existe una hipérbola tal que si B está en la hipérbola las distancias $d' = d''$. La ecuación de la hipérbola es:

$$4\left(\frac{y}{a}\right)^2 - \frac{4}{3}\left(\frac{x}{a}\right)^2 = 1$$

Si B está arriba de la hipérbola, entonces

$$d' > d''$$

Si B está debajo de la hipérbola, entonces

$$d' < d''$$

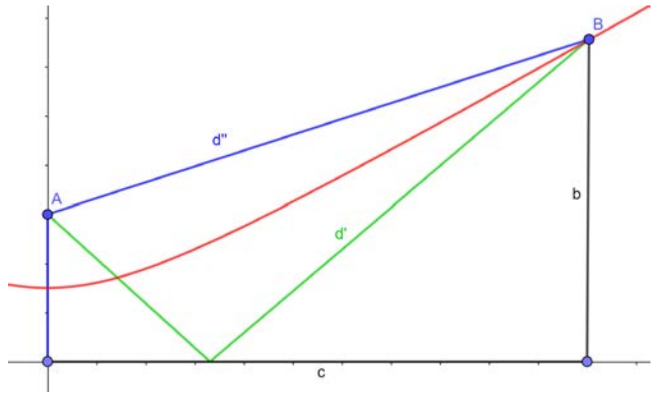

Figura 4. Esquema de la hipérbola de equidistancia.

Reflexiones

- El trabajo colaborativo genera discusión y la discusión genera descubrimiento matemático.
- La resolución de problemas crea un ambiente donde se hace matemática.
- Esté preparado para el pensamiento creativo y divergente.

Referencias y bibliografía

Johnson, D.W., Johnson, R.T. y Holubec, E.J. (1994). *El aprendizaje cooperativo en el aula*. Editorial Paidós SAICF, Argentina.

Morales C., A., Damián M., A., Locia, E. y Contreras, M.G. (2022). Uso de Geogebra para mejorar la comprensión de la resolución de problemas de optimización en el bachillerato. *Números*, 111, 71-89.

Sánchez P., J.A., De la Fuente B., D. y Zamora S., A. (2020). Optimización en Bachillerato: el problema de Herón. *Números*, 104, 75-82.