XIII CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
CIAEM 2011
26 - 30 Junho, 2011
Recife, Brasil
50 anos do Comitê Interamericano de Educação Matemática

O que fazem alunos do 5º ano de escolarização básica diante de situações combinatórias?[1]

Cristiane Azevêdo dos Santos **Pessoa**
Universidade Federal de Pernambuco
Brasil
cristianepessoa74@gmail.com
Laís Thalita Bezerra dos **Santos**[2]
Universidade Federal de Pernambuco
Brasil
laisthalita@hotmail.com

Resumo

Este artigo visa discutir sobre a compreensão de alunos do 5º ano da escolarização acerca de problemas combinatórios. Foram entrevistadas individualmente vinte crianças de uma escola pública de Pernambuco, divididas em quatro grupos, cada grupo respondendo a um bloco de questões específico. Pretende-se analisar a compreensão dos alunos acerca da Combinatória, os tipos de respostas apresentados e a possibilidade de influência do tipo de problema e da grandeza numérica na resolução. Os resultados apontam para a importância da grandeza numérica, ou seja, problemas com números que levam a uma menor quantidade de possibilidades foram mais facilmente resolvidos do que problemas com números que levavam a uma maior quantidade de possibilidades. Além disso, nos tipos de respostas categorizados, percebe-se que quando os alunos sistematizavam as possibilidades, obtinham maior êxito do que os alunos que não sistematizavam suas respostas. Conclui-se que, muitas vezes, basta uma pergunta para que o aluno perceba um invariante ou alguma característica da questão para compreendê-la. Com isso, discute-se a importância do professor nesse processo de ajudar o aluno a pensar sobre seus conhecimentos e assim ajudá-lo a avançar na aprendizagem.

Palavras chave: Raciocínio Combinatório, Resolução de problemas, Tipos de problemas combinatórios, Arranjo, Permutação, Combinação, Produto Cartesiano, Educação Básica.

---

[1] Esta pesquisa foi parcialmente financiada pela Fundação de Amparo à Ciência e Tecnologia do Estado de Pernambuco (Facepe – APQ 1095-7.08/08) e pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (MCT/CNPq – 476665/2009-4).

[2] Rute Elizabete de Souza Rosa **Borba** – Universidade Federal de Pernambuco – Brasil – também é co-autora do presente trabalho.

Introdução

Em relação ao *raciocínio combinatório,* os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, Brasil, 1997), orientam para o 1º e 2º ciclos “levar o aluno a lidar com situações-problema que envolvem combinações, Arranjos, Permutações e, especialmente, o princípio fundamental da contagem” (1997, p. 57) e para o 3º e 4º ciclos, no que se refere aos problemas de contagem, “o objetivo é levar o aluno a lidar com situações que envolvam diferentes tipos de agrupamentos que possibilitem o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a compreensão do princípio multiplicativo para a aplicação no cálculo de probabilidades” (Brasil, 1998, p. 52).

Apesar das recomendações dos PCN, na prática de sala de aula, a maioria dos problemas de *raciocínio combinatório* (*Arranjo, Combinação e Permutação*) é introduzida formalmente na escola a partir do 2º ano do Ensino Médio. Apenas o do tipo *Produto Cartesiano* é trabalhado explicitamente nas séries iniciais do Ensino Fundamental. Além disso, embora os livros didáticos destinados aos anos iniciais do Ensino Fundamental já tragam diversificados problemas de *raciocínio combinatório* (como evidenciado por Barreto, Amaral e Borba, 2007), os mesmos não fazem uma distinção desses tipos, ou seja, não há um trabalho sistemático com o *raciocínio combinatório* antes do 2º ano do Ensino Médio.

Mesmo sem um trabalho sistemático com o *raciocínio combinatório*, estudos como o de Pessoa e Borba (2009) mostram que é possível desenvolver compreensões sobre estes tipos de problemas antes de sua introdução formal na escola e que os alunos são capazes de desenvolver estratégias para resolver problemas combinatórios dos diferentes tipos. Os problemas de Combinatória podem ser explorados desde cedo, pois expectativas de um acontecimento, regras de um jogo, arrumação de objetos, determinação de grupos, formação de casais para danças, escolha de vestimentas, combinações de sucos e sanduíches em uma lanchonete ou de sabores de um sorvete, são ricas situações que podem ser exploradas nos primeiros ciclos de escolaridade sobre *combinatória* e *probabilidade*.

Vergnaud (1986) defende que alguns conceitos desenvolvem-se por um longo período de tempo. Para este autor, o saber forma-se, tanto nos aspectos práticos quanto nos aspectos teóricos, a partir de problemas a resolver, os quais ele define como *situações a dominar*. Neste sentido, acredita-se que a compreensão de conceitos como os envolvidos no *raciocínio combinatório*, pode iniciar-se antes do ensino formal e influenciar-se tanto por experiências escolares quanto extra-escolares nas quais este modo de pensar se faz necessário.

Assim, é importante que se observem as estratégias utilizadas pelos alunos – sejam as desenvolvidas diretamente por instrução escolar, sejam as aprendidas por meio de instrução indireta ou através de experiências extra-escolares – ao resolverem problemas de *combinatória*, pois seus procedimentos de resolução podem servir de base para a construção de intervenções mais próximas das suas formas de pensar sobre os problemas.

Apesar do elevado número de estudos sobre Combinatória, justifica-se a realização de pesquisas, como a atual, que investiguem mais aprofundadamente o *raciocínio combinatório*. É importante analisar como os alunos pensam sobre problemas desta natureza, quais são as suas dificuldades, facilidades, estratégias de resolução e conceitualizações prévias, para, a partir desses dados, desenvolver intervenções que possibilitem uma compreensão mais ampla da Combinatória.

O presente artigo visa discutir sobre a compreensão de alunos do 5º ano da escolarização básica acerca de problemas combinatórios; analisar os tipos de respostas apresentados pelos alunos entrevistados; e analisar a influência do tipo de problema e da grandeza numérica na resolução dos problemas combinatórios.

A Combinatória: conceitos e definições

As situações-problema podem ser pensadas como situações que geram conflito e cujas soluções não são óbvias, ou seja, quando um aluno recorre ao conjunto de respostas imediatamente disponível e não obtém sucesso na solução, está frente a um problema. Deve, então, criar uma saída própria. Logo, o que para um aluno é um problema pode não ser para outro. As possibilidades que se tem diante de uma situação é a análise da mesma, identificação dos elementos que a caracterizam, a relação entre os mesmos e a escolha de um caminho de solução. A escolha pode ser por um procedimento mais formal, como as regras e algoritmos que seguem sempre uma ordem de passos de solução, ou uma heurística que é menos formal, no sentido de ser adequada a cada situação. Assim, alunos desenvolvem estratégias próprias de resolução de problemas, as quais podem ser aproveitadas pela escola como ponto de partida para a ampliação de conhecimentos.

Para Pessoa e Borba, (2009), a Combinatória nos permite quantificar conjuntos ou subconjuntos de objetos ou de situações, selecionados a partir de um conjunto dado, ou seja, a partir de determinadas estratégias ou de determinadas fórmulas, podendo-se saber quantos elementos ou quantos eventos são possíveis numa dada situação, sem necessariamente ter que contá-los um a um. Merayo, (2001) diz que análise combinatória é a técnica de saber quantos objetos há em um conjunto sem realmente ter que contá-los, porque essa técnica não necessita listar ou enumerar todos os elementos que formam o conjunto.

Para resolver questões que envolvem combinatória, é possível utilizar fórmulas específicas para cada tipo de questão como também desenvolver estratégias próprias de resolução que venham a solucionar corretamente as questões.

Baseadas em Merayo (2001) e classificações anteriores (Nunes e Bryant, 1997; Vergnaud, 1983 e 1991 e PCN, 1997), Pessoa e Borba (2009) classificam os problemas que envolvem *raciocínio combinatório* em uma organização única – não identificada em estudos anteriores. A seguir estão colocados os tipos de problemas, ou seja, significados presentes na combinatória (Produto Cartesiano, Arranjo, Permutação e Combinação) e seus respectivos *invariantes do conceito*, ou seja, relações e propriedades que se mantém constantes:

Produto Cartesiano (1) Dados dois (*ou mais*) conjuntos distintos, os mesmos serão combinados para formar um novo conjunto; (2) A natureza dos conjuntos é distinta do novo conjunto formado. O que caracteriza estes problemas é que dois ou mais conjuntos disjuntos são combinados para formarem um terceiro conjunto.

Permutação (1) Todos os elementos do conjunto serão usados, cada um apenas uma vez (especificamente para os casos sem repetição); (2) A ordem dos elementos gera novas possibilidades. O que caracteriza esses problemas é que todos os elementos são usados em diferentes ordens para formar as Permutações.

Arranjo (1) Tendo **n** elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos.... **p** elementos, com $\mathbf{0 < p < n}$, sendo **p** e **n** números naturais; (2) A ordem dos elementos gera novas possibilidades. O que caracteriza esses problemas é que de um grupo maior, alguns subgrupos são organizados e a ordem dos elementos gera novas possibilidades, sendo importante na composição das possibilidades.

Combinação (1) Tendo **n** elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos.... **p** elementos, com **0< p < n, p** e **n** naturais; (2) A ordem dos elementos não gera novas possibilidades. De forma semelhante aos problemas de Arranjo, tem-se um conjunto maior e dele são selecionados elementos para formar subconjuntos, porém, de forma diferente, a ordem dos elementos não gera novas possibilidades.

As diversas situações existentes no cotidiano envolvendo a Combinatória podem ser apontadas como uma das características que podem vir a facilitar a elaboração de estratégias pelas crianças para a resolução de tais problemas antes do ensino formal, visto que as regras de um jogo, a arrumação de objetos, a formação e seleção de determinados grupos, e a formação de pares de dança, por exemplo, são situações vivenciadas pelas crianças em seus cotidianos e que são, fundamentalmente, resolvidas através da Análise Combinatória, ainda que sem a existência da fórmula em si.

Objetivos e metodologia

O presente estudo teve como objetivo discutir sobre a compreensão de alunos do 5º ano da escolarização básica acerca de problemas combinatórios; analisar os tipos de respostas apresentados pelos alunos entrevistados; e analisar a influência do tipo de problema e da grandeza numérica na resolução dos problemas combinatórios.

Foram realizadas entrevistas (uma sessão com cada aluno) nas quais foram aplicados oito problemas que envolvem o raciocínio combinatório para 20 alunos de uma escola pública. O teste é composto por dois problemas de cada tipo (*Arranjo*, *Combinação*, *Permutação* e *Produto Cartesiano*) e foi organizado em função da grandeza numérica (números que levam a uma maior quantidade de possibilidades e números que levam a uma menor quantidade de possibilidades) e do grau de dificuldades dos tipos de problemas de acordo com o estudo de Pessoa e Borba (2009): *Permutação* foi o tipo em que os alunos apresentaram maior dificuldade, seguido de *Combinação* e de *Arranjo*, sendo o de *Produto Cartesiano* o que os alunos apresentaram maior facilidade em resolver. Os alunos foram divididos em quatro grupos de cinco alunos e organizados da seguinte forma:

Grupo 1 - Escola A	Permutação Combinação Arranjo Produto Cartesiano	Números pequenos
	Permutação Combinação Arranjo Produto Cartesiano	Números grandes

Grupo 2- Escola A	Permutação Combinação Arranjo Produto Cartesiano	Números grandes
	Permutação Combinação Arranjo Produto Cartesiano	Números pequenos

Grupo 3 - Escola A	Produto Cartesiano Arranjo Combinação Permutação	Números pequenos
	Produto Cartesiano Arranjo Combinação Permutação	Números grandes

Grupo 4 - Escola A	Produto Cartesiano Arranjo Combinação Permutação	Números grandes
	Produto Cartesiano Arranjo Combinação Permutação	Números pequenos

O Grupo 1 iniciou com problemas que resultam em números menores e, em seguida, resolveu problemas que resultam em números maiores e estes foram resolvidos do tipo que apresenta maior dificuldade para o de menor dificuldade. O Grupo 2 iniciou com problemas que resultam em números maiores e, em seguida, resolveu problemas que resultam em números menores; assim como no Grupo 1, os problemas foram resolvidos do tipo que apresenta maior dificuldade para o de menor dificuldade. O Grupo 3 iniciou com problemas que resultam em números menores e, em seguida, resolveu problemas que resultam em números maiores e estes foram resolvidos do tipo que apresenta menor dificuldade para o de maior dificuldade; o Grupo 4 iniciou com problemas que resultam em números maiores e, em seguida, resolveu problemas que resultam em números menores; assim como no Grupo 3, os problemas foram resolvidos do tipo que apresenta menor dificuldade para o de maior dificuldade. O objetivo desta organização é o de perceber se variáveis como o cansaço ou a desmotivação pela grandeza numérica e pela dificuldade ou facilidade em resolver os problemas interferem na resolução.

A seguir, as questões propostas aos alunos:

- Na estante da minha casa há fotos do meu pai, da minha mãe e do meu irmão, sendo um total de 3 porta-retratos. De quantas formas diferentes posso organizar esses porta-retratos de modo que eles fiquem lado a lado? **(Permutação – números pequenos)**
- Foi feito um sorteio na festa do dia das crianças da escola. Estão participando Laís, Cecília e Jane. As duas primeiras sorteadas ganharão uma boneca de presente, cada uma. Sabendo que as bonecas são iguais, de quantas formas poderemos ter as duas sorteadas para ganharem as bonecas? **(Combinação – números pequenos)**
- Para prefeito de uma cidade se candidataram 3 pessoas (Joana, Vitória e Rafael). De quantas formas diferentes poderemos ter o primeiro e o segundo colocado nesta votação? **(Arranjo – números pequenos)**
- Para a festa de São João da escola temos 2 meninos (Pedro e João) e 3 meninas (Maria, Luíza e Beatriz) que querem dançar quadrilha. Quantos pares diferentes podemos formar, se todos os meninos dançarem com todas as meninas? **(Produto Cartesiano – números pequenos)**
- Usando os números 1, 2, 3, 4, quantas sequências diferentes poderemos formar, sem repetir os números? **(Permutação – números grandes)**
- Para a festa de aniversário de Camila poderão ser convidados cinco amigos entre os sete (Aline, Cintia, Giselle, Rodrigo, Fernando, Allan e Gabriela) que moram na sua rua. De quantas formas diferentes Camila poderá escolher os cinco amigos para a festa? **(Combinação – números grandes)**
- A Semifinal da Copa do Mundo será disputada pelas seguintes seleções: África, Brasil, França e Alemanha. De quantas maneiras diferentes podemos ter o primeiro, o segundo e o terceiro colocado nessa disputa? **(Arranjo – números grandes)**
- Maria tem 7 blusas (verde, azul, rosa, branca, amarela, lilás e vermelha) e 4 shorts (bege, cinza, marrom e preto) para ir à festa da escola. Quantos trajes ela poderá formar, combinando todas as blusas com todos os shorts? **(Produto Cartesiano – números grandes)**

Análise dos resultados

Análise dos tipos de respostas

Os dados apresentam um espectro de possibilidades, de estratégias e de justificativas que fazem com que se reflita sobre como os alunos pensam em relação à Combinatória. Foram categorizados os tipos de respostas apresentadas pelos alunos entrevistados, as quais são colocadas no Quadro 1, a seguir.

Quadro 1: Categorização dos tipos de respostas apresentadas pelos alunos durante as entrevistas.

1. Em branco	Os alunos que não responderam afirmaram não saber como resolver a questão, seja por não entender o contexto ou por considerar o problema de difícil resolução.
2. Resposta incorreta, sem o estabelecimento de relação correta	Não utilizam, em sua maioria, os dados da questão, não demonstrando compreender a diversidade de possibilidades nem o entendimento de que utilizando os elementos fornecidos, eles podem formular, ao menos, uma possibilidade. Nela, enquadraram-se, por exemplo, respostas do tipo: "*votando*", para a questão de Arranjo com números pequenos, que estava num contexto de eleições ou respostas que utilizam outros dados que não os fornecidos pela questão, como na questão de Permutação com números maiores, na qual algumas crianças utilizaram outras sequências como "5, 6, 7, 8" ao invés de "1, 2, 3, 4".
3. Resposta incorreta, com o estabelecimento de relação correta, utilizando uma estratégia não sistemática	Apresentam certa compreensão do problema, iniciando a resolução com o estabelecimento de relação correta, porém utilizando uma **estratégia não sistemática** e afirmando não haver outras possibilidades, ainda que haja. Encaixam-se aqui aqueles que responderam com apenas uma possibilidade.
4. Resposta incompleta, com o estabelecimento de relação correta, utilizando uma estratégia não sistemática	Apresentam certa compreensão do problema, iniciando a resolução com o estabelecimento de relação correta, porém utilizando uma **estratégia não sistemática**. Por exemplo, se no problema de Produto Cartesiano com shorts e blusas, a criança só associar 4 shorts com 4 blusas e desconsiderar as três blusas restantes, se encaixa como *Resposta incorreta, com o estabelecimento de relação correta, utilizando uma estratégia não sistemática* porque ela não consegue perceber as outras possibilidades. Entretanto, se ela colocar, por exemplo, 5 combinações (repetindo a cor de um short com outra blusa que não tenha sido usada ainda), é classificada como *Resposta incompleta, com o estabelecimento de relação correta, utilizando uma estratégia não sistemática*, porque assim ela dá indícios de que sabe que um mesmo short pode ser combinado com várias blusas.
5. Resposta incorreta, com o estabelecimento de relação correta, utilizando uma estratégia sistemática	Apresentam certa compreensão do problema, iniciando a resolução com o estabelecimento de relação correta, utilizando uma **estratégia sistemática**, porém afirmando não haver outras possibilidades, ainda que haja.
6. Resposta incompleta, com o estabelecimento de relação correta, utilizando uma estratégia sistemática	Apresentam certa compreensão do problema, iniciando a resolução com o estabelecimento de relação correta, utilizando uma **estratégia sistemática.** Parecem ter a compreensão de que há outras possibilidades, mas não explicitam as mesmas.
7. Resposta correta (explicitando estratégia)	Demonstram que compreenderam o que o problema solicita, conseguindo explicitar a ideia, esgotando todas as possibilidades.

Na Tabela 1, a seguir, observam-se os percentuais de tipos de respostas dos alunos durante as entrevistas.

Tabela 1: Percentual dos tipos de respostas apresentadas pelos alunos durante as entrevistas.

	Permutação		Combinação		Arranjo		Produto Cartesiano	
	NP	NG	NP	NG	NP	NG	NP	NG
Em branco	10	0	20	0	10	5	0	5
Resposta incorreta, sem o estabelecimento de relação correta	15	45	10	25	15	15	10	0
Resposta incorreta, com o estabelecimento de relação correta, utilizando uma estratégia não sistemática	20	5	30	35	65	40	60	50
Resposta incompleta, com o estabelecimento de relação correta, utilizando uma estratégia não sistemática	45	35	0	40	5	40	10	40
Resposta incorreta, com o estabelecimento de relação correta, utilizando uma estratégia sistemática	5	15	5	0	0	0	0	0
Resposta incompleta, com o estabelecimento de relação correta, utilizando uma estratégia sistemática	0	0	0	0	0	0	0	0
Resposta correta (explicitando estratégia)	5	0	35	0	5	0	20	5

Obs.: NP = números pequenos, ou seja, problemas que levam a um menor número de possibilidades; NG = números grandes, ou seja, problemas que levam a um maior número de possibilidades.

Podemos observar que foi pequeno o percentual de alunos que deixou as questões *em branco*, o que nos indica que eles, em sua maioria, mostraram-se dispostos a tentar solucionar as questões, apresentando um raciocínio, ainda que não totalmente elaborado, acerca do que está sendo proposto. Os que deixaram algumas das questões em branco alegaram não saber responder, algumas vezes pela dificuldade em compreender o que de fato estava sendo solicitado pela questão ou por estarem influenciados pelo contexto, como um menino (Aluno Q) que disse que não sabia combinar roupas. Esta criança foi do Grupo 4, no qual o Produto Cartesiano com números grandes era o primeiro problema a ser resolvido. Essa dificuldade pode ter aparecido por ter sido a 1ª questão que ele resolveu, não tendo, assim, um entendimento acerca do que era solicitado (como se tem, ainda que superficialmente, na 8ª questão, por já ter passado por outras sete antes). Além disso, nesse caso específico, a dificuldade no tipo de contexto pode ter gerado uma certa desmotivação/travamento na compreessão dos problemas seguintes.

Quanto à *resposta incorreta, sem o estabelecimento de relação correta*, há uma certa variedade de respostas que se enquadram nessa categoria, pois aqui se encaixam tanto aqueles que responderam com "votando" para a questão de Arranjo com números pequenos, que estava num contexto de eleições, como aqueles que utilizaram outros dados que não o da questão para solucioná-la, como aconteceu com a questão de Permutação com números maiores, que tinha como dados os números "1, 2, 3, 4". Acredita-se que por dificuldade em interpretar a questão, alguns alunos continuaram a sequência, respondendo, por exemplo: "5, 6, 7, 8". Foi este justamente o tipo de problema (Permutação com números grandes) que gerou a maior dificuldade entre os alunos, com um percentual maior neste tipo de resposta do que nos outros tipos.

Diferenciamos as categorias *resposta incorreta, com o estabelecimento de relação correta, utilizando uma estratégia não sistemática* e *resposta incompleta, com o estabelecimento de relação correta, utilizando uma estratégia não sistemática* da seguinte forma: se enquadraram na primeira categoria aqueles que responderam, por exemplo, na questão de Produto Cartesiano com números menores, com apenas dois pares de dança, pois a criança que assim responde parece não perceber a possibilidade de "troca" para que novos pares sejam formados. Já se a resposta apresentar três pares formados, ao invés de dois, a resposta foi classificada como *incompleta* e não como *incorreta*, pois já é possível, a partir de tal resposta, pensar sobre a possibilidade de que a criança tenha a percepção de que novos pares podem ser formados, não tendo concluído a questão com êxito por falta de sistematização ou por não ter um pensamento mais amadurecido ainda sobre tal questão.

Outro exemplo que podemos citar é o das respostas obtidas a partir da questão de Arranjo com números menores, que, como já citado anteriormente, estava envolvida em um contexto de eleições. As crianças que apresentaram como resposta apenas uma ou duas possibilidades foram colocadas na categoria *resposta incorreta, com o estabelecimento de relação correta, utilizando uma estratégia não sistemática***.** Já aquelas que responderam com três ou mais, tiveram suas respostas consideradas como *incompletas* e não como *incorretas.*

De um modo geral, essas duas categorias juntas apresentam os maiores percentuais. Levantamos a hipótese de que a maior dificuldade apresentada pelos alunos é a de sistematizar as posibilidades e de não se perderem nessa organização. Diferentemente das categorias que representam a *não sistematização*, as duas categorias que representam a *sistematização*, apresentaram um baixo percentual de aparição. Parte dos alunos que conseguiram sistematizar as possibilidades, chegaram à resposta correta.

A partir da catalogação das respostas apresentadas pelas crianças, pode-se perceber que a questão de Combinação com números pequenos foi a que apresentou o maior número de acertos completos (35%) com explicitação de estratégia, diferentemente de resultados encontrados em pesquisas anteriores (Pessoa e Borba, 2009; Pessoa e Borba, 2010), que apresentaram o Produto Cartesiano como sendo o problema que apresentou o maior número de acertos completos.

Esses são os dois tipos de problemas (Produto Cartesiano e Combinação) que apresentaram aparições nos tipos de respostas *sistematizadas*. Os outros tipos de problemas (Permutação e Arranjo) apresentam percentual zero em estratégias *sistematizadas.*

Análise da influência do tipo de problema e da grandeza numérica no problema

Nas Tabelas 2, 3, 4 e 5, podemos observar os tipos de respostas por problema apresentado ao aluno de acordo com o grupo (ver metodologia), ou seja, de acordo com a ordem de apresentação dos problemas, do mais fácil para o mais difícil ou do mais difícil para o mais fácil, com números que geram uma maior quantidade de possibilidades ou com números que geram uma menor quantidade de possibilidades. Observar que os tipos de problemas e a grandeza numérica se modificam em cada uma das tabelas.

Tabela 2: Percentual de tipo de resposta, por problema apresentado aos alunos do Grupo 1

GRUPO 1							
	TR1[3]	TR2	TR3	TR4	TR5	TR6	TR7
Perm NP	40	40			20		20
Comb NP	40	20	20				40
Arranjo NP	20	40	40				20
Prod. Cart NP		20	40				40
Perm NG		20		40	40		
Comb NG		40	40	40			
Arranjo NG			40	60			
Prod. Cart. NG			40	40			20

Tabela 3: Percentual de tipo de resposta, por problema apresentado aos alunos do Grupo 2

GRUPO 2							
	TR1	TR2	TR3	TR4	TR5	TR6	TR7
Perm NG		80			20		
Comb NG		60	20	20			
Arranjo NG	20	20	60				
Prod. Cart NG			80	20			
Perm NP		40	20	40			
Comb NP	20	40	20				20
Arranjo NP		20	80				
Prod. Cart. NP			80	20			

Tabela 4: Percentual de tipo de resposta, por problema apresentado aos alunos do Grupo 3

GRUPO 3							
	TR1	TR2	TR3	TR4	TR5	TR6	TR7
Prod. Cart. NP			80	20			
Arranjo NP	20		60	20			
Comb NP			60		20		20
Perm NP			20	80			
Prod. Cart NG			20	80			
Arranjo NG			40	60			
Comb NG			20	80			
Perm NG		40		60			

Tabela 5: Percentual de tipo de resposta, por problema apresentado aos alunos do Grupo 4

GRUPO 4							
	TR1	TR2	TR3	TR4	TR5	TR6	TR7
Prod. Cart. NG	20		60	20			
Arranjo NG		20	80				
Comb NG		20	60	20			
Perm NG			40	60			
Prod. Cart NP			80	20			
Arranjo NP		20	80				
Comb NP	20		20				60
Perm NP			40	60			

[3] TR1 = Tipo de Resposta 1 (*Em branco*); TR2 = Tipo de Resposta 2 (*Resposta incorreta, sem o estabelecimento de relação correta*); TR3 = Tipo de Resposta 3 (*Resposta incorreta, com o estabelecimento de relação correta, utilizando uma estratégia não sistemática*); TR4 = Tipo de Resposta 4 (*Resposta incompleta, com o estabelecimento de relação correta, utilizando uma estratégia não sistemática*); TR5 = Tipo de Resposta 5 *(Resposta incorreta, com o estabelecimento de relação correta, utilizando uma estratégia sistemática)*; TR6 = Tipo de Resposta 6 *(Resposta incompleta, com o estabelecimento de relação correta, utilizando uma estratégia sistemática)*; TR7 = Tipo de Resposta 7 *(Resposta correta (explicitando estratégia))*.

O grupo 1, se comparado aos demais grupos, foi o que indicou maior percentual de TR7 (*Resposta correta, explicitando estratégia*), em uma quantidade maior de questões do que os outros grupos. O Grupo 1 teve cinco questões com percentuais de acertos totais, enquanto os outros grupos tiveram apenas um acerto em cada, todos no tipo de problema *Combinação com números pequenos*. Ou seja, o problema de *Combinação com números pequenos* foi o único que teve percentual de acertos em todos os grupos, independentemente da ordem em que aparece una ficha. Este resultado difere dos resultados encontrados por Pessoa e Borba (2010). No referido estudo, o problema de Combinação foi o mais difícil em um teste aplicado para 568 alunos do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio. Talvez, no presente estudo, o contexto tenha favorecido a quantidade maior de acertos.

É preciso pensar no porquê do Grupo 1 ter se destacado tanto se comparado aos demais grupos. Talvez o fato de iniciar a resolução das questões com um problema tido como de difícil resolução (Permutação – números pequenos), tenha feito com que as crianças, no decorrer do teste, ao se depararem com problemas de mais fácil resolução, tenham encontrado mais facilidade para resolver as questões. Entretanto, o Grupo 2, que também iniciou com um problema do tipo Permutação, mas com números grandes, não demonstrou tantos percentuais de TR7 (*Resposta correta, explicitando estratégia*). Foram apenas 20% de acertos na questão de Combinação com números pequenos, o que nos faz pensar se o tipo de problema com o qual se inicia a questão exerce de fato influência durante a resolução, ou se o que mais influencia é a grandeza numérica ou o contexto.

Nesse aspecto, se compararmos os grupos 3 e 4, que começaram por Produto Cartesiano, sendo o primeiro com números menores e o segundo com números maiores, podemos perceber que o teste que inicia apresentando grandezas menores obteve melhores resultados, se compararmos os números apresentados nas categorias TR3 (*Resposta incorreta, com o estabelecimento de relação correta, utilizando uma estratégia não sistemática*) e TR4 (*Resposta incompleta, com o estabelecimento de relação correta, utilizando uma estratégia não sistemática*)**,** pois o Grupo 3 apresentou maior percentual de respostas em TR4 em todas as questões (consideramos TR4 como mais elaborada que TR3).

Em todos os grupos, as questões finais apresentam tentativas mais elaboradas de resolução. Além disso, nenhuma das "oitavas questões" foi deixada em branco, o que fortalece a ideia de que, com o decorrer da resolução, as crianças se apropriam mais do assunto que está sendo abordado e sentem-se mais aptas para a resolução.

Mais do que a ordem na qual as questões são apresentadas, acreditamos que um fator que exerce influência sobre a resolução das questões é o contexto no qual o problema Combinatório está inserido, que pode vir a dificultar/favorecer a resolução dos problemas. Acreditamos que contextos mais próximos das vivências ou do conhecimento dos alunos favorecem uma melhor compreensão do que contextos mais distantes da sua vida. Por exemplo, no estudo piloto percebeu-se que as crianças apresentavam muitas dificuldades no problema de Combinação com números grandes (*Uma escola tem 9 professores (Cristiano, Isabel, Laura, Mateus, Nívea, Pedro, Roberto, Sandra e Vítor), dos quais 5 devem representar a escola em um congresso. Quantos grupos diferentes de 5 professores pode-se formar?)* não só pela grandeza numérica que ia muito além do que eles conseguiam resolver por estratégias próprias, mas também pelo contexto, pois eles perguntavam: o que é congresso? Além disso, muitas vezes eles utilizam como resposta elementos que não condizem com a questão matemática e sim com questões de uso social, como por exemplo, na questão referente às seleções (Arranjo com números grandes), alguns alunos colocam que só é possível resposta em que o Brasil é o primeiro colocado (essas se encaixam no tipo de resposta 2, *Resposta incorreta, sem o estabelecimento de relação correta*).

Considerações finais

Foi possível perceber a importância da sistematização durante a resolução das questões para o esgotamento de possibilidades. Tal característica permite uma melhor visualização acerca do problema proposto, bem como do que falta fazer para concluí-lo.

Ao resolver o problema sem a preocupação com a sistematização da organização dos elementos, o aluno está sujeito a se perder durante a resolução da questão, possivelmente não obtendo êxito em seu término. Pode-se observar ainda que os alunos que demonstraram sistematizar seus procedimentos de resolução obtiveram melhores resultados no que se refere ao término completo e correto da questão.

Quanto aos alunos serem capazes de diferenciar cada uma das questões de acordo com os invariantes das mesmas, foi possível observar que eles conseguem, em sua maioria, perceber a importância da ordem dos elementos em problemas do tipo "Arranjo" ou "Permutação", mas não conseguem explicitar tal percepção quando são colocados diante de dois problemas, um com a ordem sendo importante e outro não (Arranjo e Combinação), por exemplo. As questões de Arranjo e Combinação, sejam elas de grandezas maiores ou menores, apareciam juntas em todos os blocos de questões, e foram comparadas algumas vezes, por crianças que não conseguiam perceber as diferenças entre elas, afirmando que eram iguais. Entretanto, houve também situações em que as crianças souberam distinguir, com aparente clareza, o porquê de as questões serem diferentes.

Além disso, foi possível perceber também a importância que tem o professor como agente facilitador da aprendizagem, visto que o aluno muitas vezes tem a compreensão equivocada de que é suficiente fornecer uma única resposta, não havendo ainda a percepção de que a questão exige todas as possibilidades possíveis. Esta afirmação é feita porque durante as coletas, muitas vezes foi possível perceber que uma simples pergunta, do tipo: "há mais alguma possibilidade?", foi suficiente para que o aluno percebesse a existência de outras posibilidades além das colocadas inicialmente e as escrevesse como resposta.

Assim, a partir dos resultados encontrados e de estudos desenvolvidos anteriormente, como o de Pessoa e Borba (2009), acreditamos que a existência de um estudo sistemático com a Combinatória em sala de aula, partindo de situações vivenciadas pelas crianças e fazendo uso das estratégias de resolução por elas desenvolvidas pode e deve ser inserido o mais cedo possível na escolarização básica, fazendo com que as crianças tenham a percepção do que está sendo estudado, e não apenas decorando as fórmulas que são apresentadas pelos professores, por volta do 2º ano do Ensino Médio.

Referências

Barreto, Fernanda; Amaral, Fábio & Borba, Rute. (2007). Como o raciocínio combinatório tem sido apresentado em livros didáticos de séries iniciais. *Caderno de Trabalhos de Conclusão de Curso de Pedagogia*, Recife: UFPE, v. 2, p. 1-21.

Brasil. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de educação fundamental. (1997). *Parâmetros*

Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília: MEC/SEF.

Brasil. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. (1998). *Referencial Curricular Nacional para a Educação Infantil.* v.3 Brasília: MEC/SEF.

Merayo, Felix.(2001). *Matemática Discreta.* Madri: Editora Thomson Paraninfo S.A.

Nunes, Terezinha; Bryant, Peter. (1997). *Crianças fazendo matemática.* Porto Alegre: Artes Médicas.

Pessoa, Cristiane Azevêdo dos Santos; Borba, Rute Elizabete de Souza. (2009). Quem Dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. *ZETETIKÉ*, Campinas, v.17, n.31, jan/jun, p. 105-155.

Pessoa, Cristiane Azevêdo dos Santos; Borba, Rute Elizabete de Souza. (2010). O Desenvolvimento do Raciocínio Combinatório na Escolarização Básica. *Em Teia: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana,* v.1, n.1. Disponível em: <http://emteia.gente.eti.br/index.php/emteia/article/view/4> Acesso em: 21 set. 2010.

Vergnaud, Gérard.(1983). Multiplicative structures. In: Lesh, R. & Landau, M. (Eds.). *Acquisition of mathematics: Concepts and processes*. New York: Academic Press.

Vergnaud, Gérard. (1986). Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas Um exemplo: as estruturas aditivas. *Análise Psicológica,* 1, pp. 75-90.

Vergnaud, Gérard. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad - Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. Mexico: Trillas.