XVI CIAEM ICMI
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference of Mathematics Education
UNIVERSIDAD DE LIMA
Lima - Perú
30 julio - 4 agosto 2023
xvi.ciaem-iacme.org

Problemas de cuadratura de polígonos: pruebas y argumentaciones en el bachillerato

José Luis **López** Hernández
Escuela Nacional Preparatoria Antonio Caso, UNAM
México
jose.lopez@enp.unam.mx

Resumen

En este artículo se reportan los resultados de la aplicación de una estrategia didáctica para explorar el tipo de pruebas y argumentaciones dadas por estudiantes de bachillerato de una escuela pública de la Ciudad de México, al resolver de manera colaborativa, en parejas, problemas de tipo geométrico en torno a la cuadratura de polígonos en ambiente de lápiz-y-papel. De acuerdo con la literatura de investigación relacionada con este tema, se observa que sus pruebas y argumentaciones se apoyan en evidencias empíricas a partir de figuras geométricas; sin embargo, también hay estudiantes que hacen buen uso de un razonamiento deductivo formal y de un lenguaje simbólico claro y ordenado propio de las matemáticas.

Palabras clave: Cuadratura, polígonos, resolución de problemas, geometría, pruebas y argumentaciones.

Introducción

El razonamiento es un elemento fundamental en el estudio y desarrollo de las matemáticas, contribuye en la organización de las ideas y en la articulación del discurso. Para Balacheff (1987) no se debe esperar que los estudiantes de bachillerato razonen de una manera rigurosa y formal, dado que en este nivel educativo básicamente ellos comienzan a aprender, a usar las matemáticas y a comprender y manejar sus métodos de demostración.

Para Hanna y Barbeau (2008), la elaboración de una prueba contribuye al desarrollo de nuevas ideas matemáticas y proporciona a los estudiantes nuevas estrategias y métodos para la resolución de problemas.

Es por ello que en esta investigación se ha decidido poner atención en el problema de las cuadraturas, que consiste en construir un cuadrado de área igual a la de un polígono dado y construir, en general, figuras de áreas iguales (Boyer, 1999; Boltyanskii, 1973; Collette, 2006, entre otros), figuras planas cuya área permanece constante (Galván, 2005).

Marco conceptual

Dentro de la comunidad matemática la demostración se sigue a través de un razonamiento deductivo válido, formal y riguroso. Por ejemplo, Zaslavsky et al, (2012), comentan que dadas ciertas suposiciones un propósito de la demostración es explicar por qué una afirmación es verdadera. Sin embargo, en el ámbito de la matemática educativa la demostración ha sido abordada desde distintos enfoques. De acuerdo con diferentes investigaciones, se ha discutido la importancia de la demostración y sus grados de validez; es decir, la demostración se refiere a un proceso de argumentación que genera y valida conocimientos. Asimismo, se ha puesto énfasis en los tipos de argumentación dados por los estudiantes en los diversos niveles educativos.

Por ejemplo, para Grabiner (2012), las demostraciones proporcionan explicaciones para convencer de la validez y sentido de algún resultado, llevan a cabo verificaciones al ayudar a distinguir entre lo verdadero y lo plausible y logran el descubrimiento de propiedades. Balacheff (1987) menciona dos tipos de demostraciones: (a) las intelectuales, apoyadas en propiedades matemáticas y en las relaciones que existen entre ellas y, (b) las pragmáticas, en que los estudiantes recurren a la acción y a ejemplos concretos, las cuales se subdividen en varios tipos: el empirismo ingenuo, la experiencia crucial, el ejemplo genérico y la experiencia mental.

Camargo, Perry y Samper (2005) destacan la importancia del razonamiento y la visualización. Hanna (1990), así como Siñeriz y Ferraris (2005), se refieren al tipo de lenguaje y grado de formalidad utilizados en la demostración, como son la prueba formal, la prueba que demuestra y la prueba que explica; además de la argumentación deductiva formal y la argumentación deductiva coloquial.

La argumentación deductiva formal se caracteriza por llevar a cabo una serie de inferencias lógicas y válidas basadas en las hipótesis, propiedades, axiomas o definiciones; así. un argumento válido se deduce de la validez de sus premisas y es común el uso de expresiones simbólicas. Mientras que la argumentación deductiva coloquial ocurre cuando el sujeto efectúa inferencias basadas en las hipótesis, propiedades o definiciones, y trata de dar una explicación, sobre todo, por medio del lenguaje coloquial.

Metodología

En esta investigación de tipo cualitativo participaron 12 estudiantes (entre 16 y 17 años de edad) de distintos grupos de bachillerato en la Ciudad de México, que cursaban en ese momento la asignatura Matemáticas V. Los estudiantes trabajaron de manera colaborativa en equipos de dos integrantes cada uno; ellos fueron videos grabados mientras resolvían problemas de cuadratura de polígonos en ambiente de lápiz-y-papel. El acopio de datos se llevó a cabo por medio de videograbaciones y hojas de trabajo.

Como parte de esta investigación, en este artículo sólo se reporta el trabajo de dos de los equipos resolviendo el Problema 1, del cual se habla en el siguiente apartado.

Resultados y análisis

En seguida se muestran algunos extractos de la discusión y reflexión que llevaron a cabo los estudiantes (Pepe y Toño) del Equipo 1 y las estudiantes (Luna y Perla) del Equipo 2 al resolver el Problema 1, así como la descripción y el análisis de los datos obtenidos en relación con sus respuestas. Cada equipo trabajó por separado, en pareja, de manera colaborativa. Ellos compartieron conocimientos y discutieron acerca de sus soluciones en cada problema. La recolección de los datos se llevó a cabo por medio de videograbaciones que evidencian el trabajo de las y los estudiantes, así como sus respuestas por escrito.

Problema 1.
En la Figura 1, las rectas l_1, l_3 y l_5 son, respectivamente, paralelas a las rectas l_2, l_4 y l_6, y H es punto medio de $\overline{EG}$.

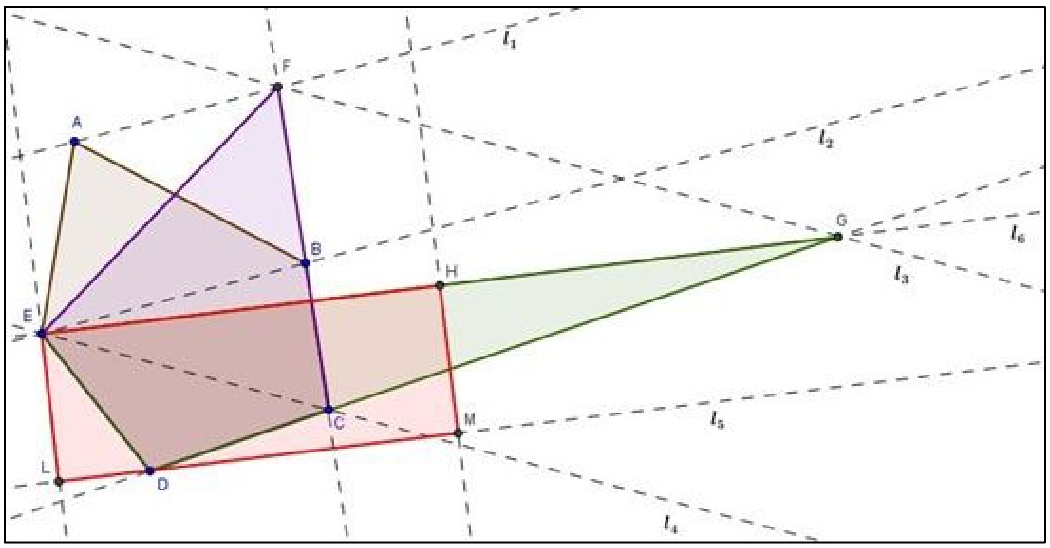


Figura 1. Polígonos de la misma área y de perímetro distinto.

(a) Prueba que las áreas de:

(i) ⬟*ABCDE* [1] con la del ◊*CDEF* [2],

(ii) ◊*CDEF* con la del △*DEG* [3],

(iii) △*DEG* con la del ▭*EHML* [4] son iguales.

Desarrollo y análisis de la solución del Problema1

Equipo 1. Argumentación deductiva formal

---

[1] ⬟*ABCDE* se refiere a cualquier pentágono cuyos vértices son los puntos A, B, C, D y E.
[2] ◊*CDEF* se refiere a cualquier cuadrilátero cuyos vértices son los puntos C, D, E.y F.
[3] △*DEG* se refiere a cualquier triángulo cuyos vértices son los puntos D, E y G.
[4] ▭*EHML* se refiere a cualquier rectángulo cuyos vértices son los puntos E, H, M y L.

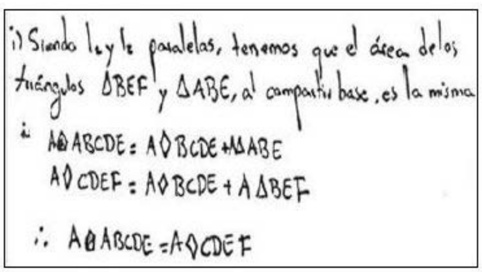
(a) (i) Igualdad de las áreas de ⬟*ABCDE* y de ◊*CDEF*

Pepe: Ah, estos [⬟*ABCDE y* ◊*CDEF; Figura 2a*] tienen áreas en común [*señala con su dedo* ◊*BCDE; Figura 2b*] y estos [*señala con su dedo* △*ABE y* △*FBE*] tienen la misma altura. Y como su base es común…

(2a) (2b)

Figura 2. En (2b), Pepe explica a Toño por qué las áreas de ⬟*ABCDE* y de ◊*CDEF* que se muestran en (2a) son iguales.

Toño*:* Sí, ya con eso. [*En seguida comienzan a escribir la prueba que se muestra en la Figura 3a*].



i) Siendo l_1 y l_2 paralelas, tenemos que el área de los triángulos ΔBEF y ΔABE, al compartir base, es la misma

∴ A⬟ABCDE = A◊BCDE + AΔABE

A◊CDEF = A◊BCDE + AΔBEF

∴ A⬟ABCDE = A◊CDEF

i) Siendo l_1 y l_2 paralelas, tenemos que el área de los triángulos $\triangle BEF$ y $\triangle ABE$, al compartir base, es la misma.

Si $A(⬟ABCDE) = A(\lozenge BCDE) + A(\triangle ABE)$

$A(\lozenge CDEF) = A(\lozenge BCDE) + A(\triangle BEF)$

$\therefore A(⬟ABCDE) = A(\lozenge CDEF)$

(3a) (3b)

Figura 3. Prueba escrita de Pepe y Toño para la sección (a) (i) de que las áreas de ⬟ABCDE y ◊CDEF son iguales.

(a) (ii) Igualdad de las áreas de ◊*CDEF* y de △*DEG*

Pepe: Esta área [*señala con su dedo* △*CDE*] es común a ambas [*señala con su dedo* ◊*CDEF y* △*DEG*] y estas dos [*señala con su dedo las rectas* l_3 *y* l_4] son paralelas. [*Véase la Figura 4a*]

Pepe y Toño: Entonces estos dos triángulos son iguales [*Pepe señala con su dedo* △*CEF y* △*CEG*].

Toño: Sí, este punto [*se refiere al punto de intersección del lado* $\overline{CF}$ *de* ◊*CDEF con el lado* $\overline{EG}$ *de* △*DEG*]… Si *P* es el punto de intersección del lado $\overline{CF}$ de ◊*CDEF* con el lado $\overline{EG}$ de △*DEG*, entonces, la región común a ambos polígonos es ◊*CDEP* [*se refiere a* la región común entre ◊*CDEF* y △*DEG*]. Y al recortar lo común…

Pepe: Sí, este triangulito [*señala con su dedo △CDE; Figura 4b*] es común, y ya los otros [*se refiere a △CEF y △CEG*] tienen áreas iguales.

(4a) (4b)

Figura 4. En (4a) Pepe y Toño identifican las paralelas l_3 y l_4 relacionadas con ◊CDEF y △DEG, y en (4b) identifican la región común a estos polígonos.

A continuación, los estudiantes escriben su respuesta en el papel (Figura 5).

a)
ii) Siendo l_4 paralela a l_3, los ΔCEF y ΔCEG, al compartir base ($\overline{CE}$), tendrán la mismo área.
A◊CDEF = AΔCDE + AΔCEF
AΔDEG = AΔCDE + AΔCEG
A◊CDEF = AΔDEG

(5a)

ii) Siendo l_4 paralela a l_3, los $\triangle CEF$ y $\triangle CEG$, al compartir base ($\overline{CE}$), tendrán la misma área,

$A(\lozenge CDEF) = A(\triangle CDE) + A(\triangle CEF)$

$A(\triangle DEG) = A(\triangle CDE) + A(\triangle CEG)$

$A(\lozenge CDEF) = A(\triangle DEG)$

(5b)

Figura 5. Prueba escrita de Pepe y Toño para la sección (a) (ii) de que las áreas de ◊CDEF y △DEG son iguales.

(a) (iii) Igualdad de las áreas de △*DEG* y de □*EHML*

Pepe: Ahora para △*DEG* y □*EHML* (Figura 6a), como nos dijeron que este es punto medio [*se refiere a H*] pues sí, ya está. [*Se refiere a que con eso ya es suficiente, que ya está probado.*]

Toño: Ah, es lo mismo, sí; porque son paralelas ésta y ésta [*señala con su dedo l_6 y l_5*]. Sí, ya está.

A continuación, los estudiantes escriben su respuesta en el papel (Figura 7).

Figura 6. Pepe explica a Toño la igualdad de las áreas de △DEG y □EHML.

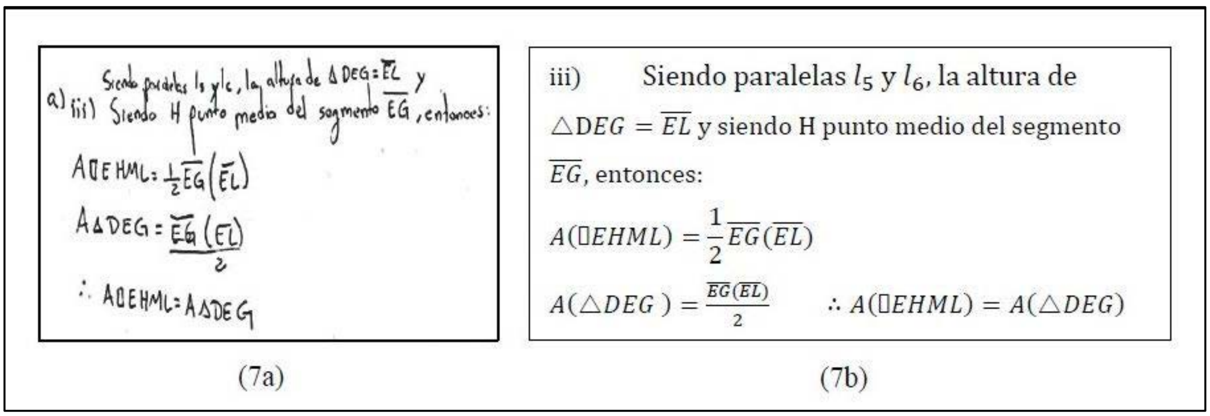


Figura 7. Prueba escrita de Pepe y Toño para la sección (a) (iii) de que las áreas de △DEG y □EHML son iguales.

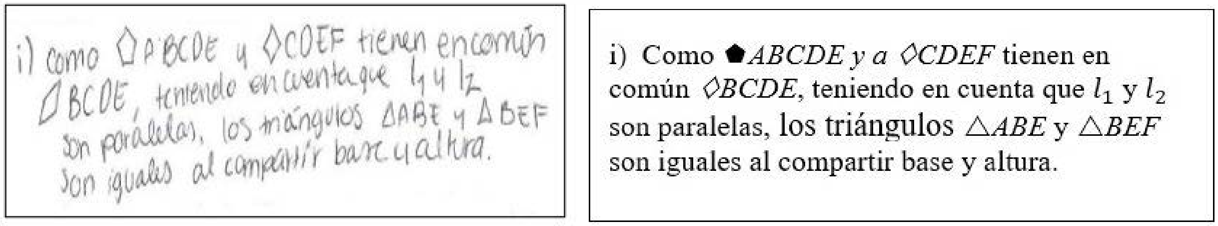
Durante la resolución del Problema 1, los estudiantes del Equipo 1dialogaron e intercambiaron conocimientos haciendo uso del lenguaje coloquial, que en ocasiones fue impreciso; sin embargo, es de llamar la atención el uso del lenguaje simbólico formal en sus respuestas por escrito. Pepe y Toño explicaron y justificaron por qué son iguales las áreas de los polígonos de interés. Ellos incorporaron conocimientos previos relacionados con conceptos básicos de geometría que desde un principio pusieron en acción, como se muestra en sus diálogos y en las figuras 3 a 7.

En la resolución del Problema1 se manifiesta la presencia de la argumentación deductiva formal por parte de los estudiantes del Equipo E1.

Equipo 2. Argumentación deductiva coloquial

(a) (i) Igualdad de las áreas de ⬟*ABCDE* y de ◊*CDEF*

Luna: [⬟*ABCDE* y ◊*CDEF*] tienen esto de área en común [*comienza señalando el punto E*], [*el cuadrilátero*] *EBCD* es común, su área es común [◊*EBCD es común a* ⬟*ABCDE y a* ◊*CDEF*]. Y como l_1 y l_2 son paralelas, entonces estos triángulos que sobran [*se refiere a* △*ABE y* △*FBE y los señala con su dedo*] tienen la misma base y la misma altura, entonces son iguales [*se refiere a que △ABE y △FBE son iguales en área*]. [*Véase la Figura 8*]


i) como ⬠ABCDE y ◊CDEF tienen en común ◊BCDE, teniendo en cuenta que l_1 y l_2 son paralelas, los triángulos ΔABE y ΔBEF son iguales al compartir base y altura.

i) Como ⬟*ABCDE y a* ◊*CDEF* tienen en común ◊*BCDE*, teniendo en cuenta que l_1 y l_2 son paralelas, los triángulos △*ABE* y △*BEF* son iguales al compartir base y altura.

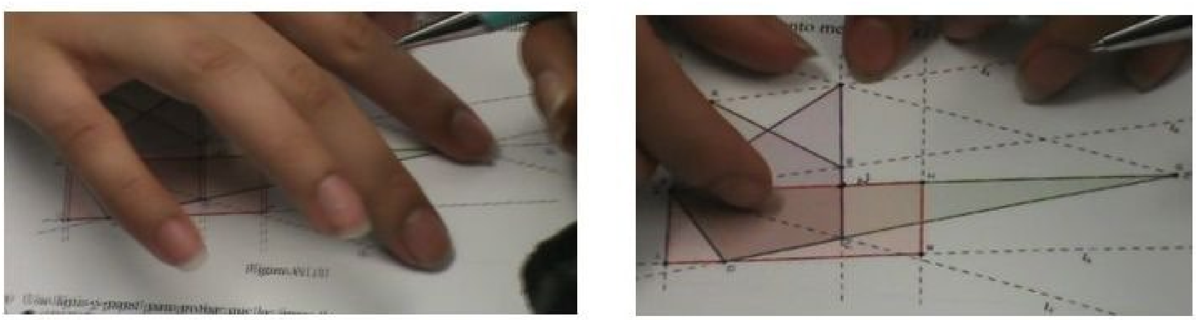
(8a) (8b)

Figura 8. Prueba escrita de Luna y Perla de que las áreas de ⬟*ABCDE y* ◊*CDEF* son iguales.

(a) (ii) Igualdad de las áreas de ◊*CDEF* y de △*DEG*

Luna: [...] Su área común es ésta, ¿no? [*Señala con su dedo el área determinada por el cuadrilátero común a* ◊*CDEF y a* △*DEG*]

Perla: […] Sí, podemos añadir un punto aquí… N. [*Le llama N al punto de intersección de* $\overline{CF}$ *y* $\overline{EG}$]. [...] Pero, ésta y ésta son paralelas [*se refiere a las rectas* l_3 y l_4]. [*ver Figura 9*] [...] Ah, en vez de poner el cuadrilátero común [◊*CDEN*] mejor poner [△] *CDE* [*señala dicho triángulo*], y ya te queda ésta [*se refiere al segmento* $\overline{CE}$] como base de este triángulo [*señala* △*CFE*] y de este otro triángulo [*señala* △*CEG*].



(9a) (9b)

Figura 9. Perla explica a Luna que las rectas l_3 y l_4 son paralelas y cuál es la importancia del segmento $\overline{CE}$.

Luna: Ah, sí. Y como comparten base…

Perla: Comparten base y altura.

Luna: [...] Sí, entonces las áreas totales son iguales. [*Véase la Figura 10*]

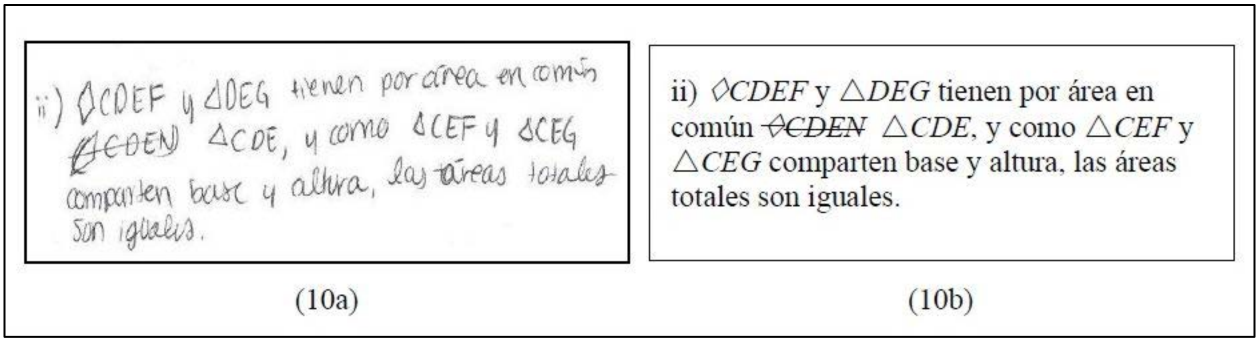


Figura 10. Prueba escrita de Luna y Perla de que las áreas de ◊*CDEF* y △*DEG* son iguales.

(a) (iii) Igualdad de las áreas de △*DEG* y de ▭*EHML*

Luna: Son paralelas [*se refiere a las rectas l_5 y l_6*]

Perla: H es punto medio [del segmento $\overline{EG}$]. [*Perla señala el punto H. En seguida Luna señala el punto G y Perla señala también el punto E*]

Luna: Sí, el triángulo [△*DEG*] tiene el doble de la base [*se refiere al segmento* $\overline{LM}$ de ▭*EHML*; *el cual señala con su dedo*], y estos tienen la misma altura [*se refiere al* ▭*EHML y a* △*DEG*]. [...] Entonces, sus áreas son iguales [de △*DEG* y ▭*EHML*]. [*Véase la Figura 11*]

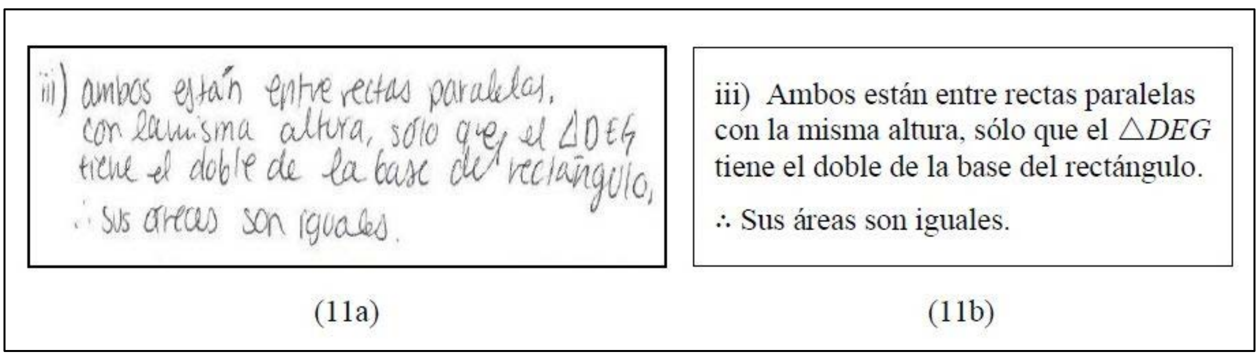


Figura 11. Prueba escrita de Luna y Perla de que las áreas de △*DEG* y ▭*EHML* son iguales.

Durante la resolución del Problema 1, las estudiantes del Equipo 2 intercambiaron conocimientos haciendo uso del lenguaje coloquial, que en ocasiones fue impreciso. Luna y Perla incorporaron conocimientos previos relacionados con conceptos básicos de geometría que desde un principio pusieron en acción para explicar y justificar por qué son iguales las áreas de los polígonos de interés, como se muestra en sus diálogos y en las figuras 8 a11.

En la resolución del Problema1 prevalece la argumentación deductiva formal por parte de las estudiantes del Equipo E2.

Conclusiones

A la luz del análisis de los datos del trabajo realizado por los estudiantes de ambos equipos en torno al Problema 1 en relación con la cuadratura de polígonos, se observa que Pepe y Toño, integrantes del Equipo 1, sí utilizaron un lenguaje simbólico formal con claridad y elaboraron de manera aceptable las demostraciones por medio de una argumentación deductiva formal, dado que llevaron a cabo una serie de inferencias lógicas y válidas basadas en las hipótesis, en las propiedades y en las definiciones.

Mientras que Luna y Perla, integrantes del Equipo 2, sólo dieron explicaciones mediante el uso del lenguaje coloquial, tanto en su argumentación oral como en sus respuestas por escrito, a pesar de haber efectuado inferencias basadas en las hipótesis, en las propiedades y en las definiciones, Ellas llevaron a cabo una argumentación deductiva coloquial.

El diseño e implementación de estas actividades es muy importante, brinda a los estudiantes nuevas estrategias para la resolución de problemas en geometría y les ayuda a desarrollar un pensamiento lógico y un razonamiento intuitivo que con la guía del profesor puede encaminarse al desarrollo de un razonamiento deductivo formal de los objetos geométricos.

Referencias y bibliografía

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics, 18*(12), 147-176.

Boltyanskii, V. G. (1973). *Figuras equivalentes y equidescomponibles*. México. Editorial Limusa.

Boyer, C. (1999). *Historia de la matemática*. Madrid, España: Alianza Editorial.

Camargo, L., Perry, P. y Samper, C. (2005). La demostración en la clase de geometría: ¿puede tener un papel protagónico? *Educación Matemática*, 17(3), 53-76.

Collette, J. P. (2006). *Historia de las matemáticas I*. México: Siglo XXI Editores.

Galván, C. (2005). Cuadratura de polígonos. *Unión, 1*, 7-15.

Grabiner J.V. (2012). "Why proof? A historian's perspective". En Hanna, G., de Villiers, M. (Eds.), *Proof and proving in mathematics education*. The 19th ICMI Study (pp. 147–167).

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange*, *21*(1), 6-13. https://doi.org/10.1007/BF01809605

Hanna, G. & Barbeau, E. (2008). Proofs as bearers of mathematical knowledge. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 40*(3), 345-353.

Siñeriz, L. y Ferraris, C. (2005). Tipos de prueba: una de las categorías de un Modelo Teórico del proceso de aprendizaje de la demostración en geometría. *Memorias del VII Simposio de Educación Matemática,* Chivilcoy, Argentina. Vol. XII.

Zaslavsky, O., Nickerson, S., Styliandes, A., Kidron, I. & Winicki, G. (2012). The need for proof and proving: Mathematical and pedagogical perspectives. In Hanna, G., de Villiers, M. (Eds.), *Proof and proving in mathematics education.* The 19th ICMI Study (pp. 215-229).