XVI CIAEM
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference of Mathematics Education
UNIVERSIDAD DE LIMA
Lima - Perú
30 julio - 4 agosto 2023
xvi.ciaem-iacme.org

Herramienta de análisis de las dificultades en la comprensión del Principio de Inducción Matemática

José Ricardo **Herrera** Alfaro
Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander
Colombia
herrerauisj@gmail.com
Jorge Enrique **Fiallo** Leal
Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander
Colombia
jfiallo@uis.edu.co

Resumen

Se da a conocer un avance de investigación en curso, que tiene como objetivo propiciar la comprensión del Principio de Inducción Matemática, a partir de la ruptura cognitiva (Garuti et al, 1996), entre el planteamiento de conjeturas y la construcción de demostraciones, con estudiantes de un curso de Teoría de Números. Para ello se propone una herramienta de análisis y un marco conceptual que analiza desde el punto de vista estructural y referencial (Fiallo, 2011; Pedemonte, 2005; Pedemonte & Balacheff, 2016) los procesos de planteamiento de conjeturas y construcción de demostraciones, y que permite identificar las dificultades y errores presentes en los dos procesos.

Palabras clave: Argumentación, Inducción Matemática, Demostración.

Introducción

Al realizar una búsqueda de investigación sobre la demostración, se encontró que los estudiantes de todos los niveles educativos tienen dificultades para construir demostraciones en el aula, y poco se ha usado la teoría producida por investigaciones en el campo para abordar dichas dificultades, fenómeno que se convierte en la problemática de la investigación (Stylianides, Stylianides y Philippou 2007; Stylianides y Stylianides, 2017).

Por otro lado, se encontró que el estudio sobre las dificultades al demostrar por inducción matemática es un campo poco explorado; “los estudiantes lo aplican correctamente en muchos casos y adquieren manejo con su algoritmia, pero lo hacen de manera mecánica y no comprenden su esencia” (Crespo, 2016, p. 244).

De las investigaciones como Crespo (2016); Dubinsky (1990); García y Parraguez (2017); Mariotti (2006); Pedemonte (2008); Ron y Dreyfus (2004); Stylianides, Sandefur y Watson (2016), se toma en cuenta las siguientes dificultades reportadas durante la demostración por inducción matemática a las que se enfrentan los estudiantes:

- Errores numéricos y algebraicos ($\mathbf{J_1}$)
- Dificultad para comprender la importancia del paso base. ($\mathbf{J_2}$)
- Dificultad para comprender la esencia del paso inductivo. ($\mathbf{J_3}$)
- Dificultad para comprender cuando es aplicable la inducción matemática. ($\mathbf{J_4}$)
- Dificultad para identificar la proposición a demostrar. ($\mathbf{J_5}$)
- Dificultad para comprender la relación entre el paso base y el paso inductivo. ($\mathbf{J_6}$)

Estas dificultades se convierten en la razón que da origen a los propósitos de este trabajo, que pretende dar respuesta a la siguiente pregunta de investigación, ¿Cómo favorecer el proceso de argumentación en la construcción de la demostración por inducción matemática a partir de la ruptura cognitiva?

Elementos Teóricos

Este estudio considera la *demostración* como un caso particular de argumentación que comprende “*todos los argumentos planteados por los estudiantes para explicar, verificar, justificar o validar con miras a convencerse a sí mismo, a otros estudiantes y al profesor de la veracidad de una afirmación matemática* (Fiallo, 2011, pág. 85).

El proceso de argumentación

Teniendo en cuenta las características funcionales de la argumentación, Pedemonte (2002), plantea que la argumentación en matemáticas es una justificación racional; se desarrolla cuando alguien quiere convencer (a uno mismo o a otros) acerca de la verdad de una afirmación; se dirige a una audiencia universal; y pertenece a un “campo”, el campo de una argumentación en matemáticas delimita los criterios de validez. Por ejemplo, los axiomas de validación de una argumentación en geometría son diferentes de los axiomas que se utilizan en una argumentación de álgebra.

Desde el punto de vista estructural, Pedemonte (2002) caracteriza la argumentación deductiva, inductiva y abductiva; pero teniendo en cuenta el tipo de problema y la metodología de enseñanza de este trabajo solo presentamos las dos primeras.

En la a*rgumentación deductiva* es una inferencia que conduce a la construcción de nuevos conocimientos por medio de una regla o teorema a partir de la declaración de una conclusión que se deduce de hipótesis determinadas de antemano, puede que se utilice el lenguaje natural como sistema de representación en la construcción de un enunciado y no estar apoyada por una teoría matemática. Esta es la razón por la que una deducción en la argumentación puede ser semánticamente falsa.

La *argumentación inductiva* o empírica es una inferencia que conduce a la construcción de nuevos conocimientos a partir de la observación de casos particulares o hechos observados que se generalizan en un conjunto más extensos de casos o reglas. La argumentación inductiva puede ser:

- Argumentación inductiva por generalización, es una inferencia práctica que procede analizando casos particulares hasta que se determina una ley general o propiedad. La generalización permite la abstracción de una propiedad o inferencia entre propiedades, en varios casos. Este proceso puede llevar a dos generalizaciones diferentes: *generalización a partir de un caso particular y generalización sobre el proceso realizado.* Estas generalizaciones se dan cuando el estudiante ve una regularidad a partir de una sucesión de procesos realizados, con casos o conclusiones particulares respectivamente.
- Argumentación inductiva por recurrencia, los cuales se basan en una generalización a n. A partir de una propiedad verdadera en un caso $P(1)$ y el descubrimiento de una relación recurrente entre dos casos sucesivos, enlazamos $P(n)$ y $P(n+1)$. La conclusión del razonamiento es que la regla $P(n)$ es verdadera.
- Argumentación inductiva pasando “al límite”, suele ser el caso considerado para verificar la propiedad ya derivada de otros casos. Puede considerarse como un caso extremo: si la propiedad es verdadera en este caso, nos lleva a pensar que también puede serlo en los casos anteriores y es considerado como el caso que está conectado con todos los casos precedentes y no sólo con el caso que lo precede (Pedemonte, 2002).

Mariotti (2006) resalta la dificultad sobre la esencia del paso inductivo, afirmando que tal dificultad se vuelve aún más evidentes si se describen en términos de Unidad Cognitiva.

Unidad cognitiva

Para superar la dicotomía entre argumentación y demostración, se han llevado a cabo estudios que plantean la noción de unidad cognitiva de un teorema (Boero y otros, 1996), la cual se dirige a vincular argumentos espontáneos y argumentos matemáticamente aceptables:

> durante la producción de la conjetura, el estudiante elabora progresivamente su enunciado por medio de una intensa actividad argumentativa que está entrelazada funcionalmente con la justificación de la plausibilidad de sus elecciones; y durante la etapa posterior de demostración del enunciado, el estudiante hace conexión con este proceso de manera coherente, organizando algunas de las justificaciones (“argumentos”) producidas durante la construcción del enunciado de acuerdo con una cadena lógica (Boero y otros, 1996, p.113).

La unidad cognitiva fue utilizada para expresar una posible continuidad entre los dos momentos ya mencionados, posteriormente fue redefinido y adoptado como una herramienta de investigación que analiza la congruencia entre la argumentación para plantear conjeturas y la subsiguiente producción de la demostración, asumiendo que la congruencia pueda o no ocurrir (Mariotti, 2006, p. 184):

> La principal fortaleza de la unidad cognitiva es que proporciona una forma de evitar la rígida dicotomía que coloca a la argumentación contra la demostración: La posible distancia entre argumentación y demostración no es negada pero tampoco es definitivamente asumida como un obstáculo; desde esta perspectiva, la distinción irreparable entre argumentación y demostración es substituida prestando atención a las analogías, sin olvidar las diferencias.

> De hecho, cuando una conjetura es generada por el resultado de la generalización de patrones, construir una demostración por inducción matemática requiere pasar de un tipo de argumento a otro, lo que significa que el estudiante tiene que controlar la brecha entre los dos tipos de argumentos”. (Mariotti 2006, p. 188)

Desde las ideas de Mariotti (2006), las dificultades para demostrar por inducción matemática se visibilizan con estos elementos teóricos; pero en este trabajo no se analizará a fondo la unidad o ruptura cognitiva ya que no es el objetivo de este trabajo. Se usarán estos elementos teóricos para identificar las dificultades de los estudiantes cuando resuelvan problemas de demostración por inducción matemática. El constructo de unidad cognitiva ayudará en este trabajo en el diseño de la secuencia de tareas que promuevan rupturas cognitivas en los problemas.

Pedemonte (2002) analiza y compara la argumentación que sustenta una conjetura y su demostración en la resolución de problemas abiertos en geometría, señala que pueden realizarse desde dos puntos de vista: el del sistema referencial y el de la estructura. El *sistema referencial* está compuesto por el sistema de representación (el lenguaje, la heurística, el dibujo) y el sistema de conocimientos (concepciones, teoremas) de argumentación y demostración, La *estructura* es la conexión cognitiva lógica entre declaraciones (puede ser abductiva, inductiva o deductiva) (Pedemonte, 2008).

Según Pedemonte, hay unidad referencial entre la argumentación y la demostración si algunas palabras, dibujos o teoremas usados en la demostración, han sido usados en la argumentación dando soporte a la conjetura. Además, hay una unidad estructural entre la argumentación y la demostración, si algunos pasos deductivos o inductivos usados en la argumentación también están presentes en la demostración; o de lo contrario, hay una ruptura estructural entre los dos, si la estructura de la argumentación es inductiva y la demostración es deductiva (Pedemonte, 2008).

Modelo de Pedemonte

Pedemonte y Balacheff, (2016) integra el modelo cK¢ (Balacheff y Margolinas, 2005) al modelo de Toulmin (Toulmin, 1958):

Modelo de Toulmin. Este modelo permite analizar la estructura de la argumentación del estudiante atendiendo al contenido empleado. Para ello tiene en cuenta seis elementos básicos: un Enunciado o conclusión *“C” (Claim)* que se refiere a la conclusión de cada argumento que se basa en un cierto número de *datos “D” (Data)*. Para pasar de los datos al enunciado-conclusión es necesario un *permiso de inferir “Pi” (Warrant)* que legitime ese paso (por ejemplo, una regla o un principio general). Vale decir que “*Pi”* establece la conexión lógica entre *D* y *C* al mostrar que el paso de *D* hacia *C* es adecuado y legítimo; el *indicador de fuerza “F” (Modal Qualifier)* que precisa la fuerza con la que la unión entre *D* y *Pi* permite alcanzar *C*; las *refutaciones potenciales “Rp” (Rebuttal)* establecen las restricciones que se aplican a *C*, es decir, las situaciones bajo las cuales *C* no sería válida; y un *soporte “S” (Backing)* que apoya el *Pi,* ya que éste puede ponerse en duda y va a ser necesario respaldarlo con algunos justificativos.

Modelo ck¢. Balacheff y Margolinas (2005) señala cuatro componentes indisociables, que se imponen cuando se requiere evidenciar una concepción C: a partir de un *problema matemático "P"* un estudiante puede representarlo con un conjunto de afirmaciones que expresa utilizando un *sistema de representación "L"*, a su vez que lo transforma aplicando una *regla "R"* (un operador); en dicho proceso aplica una *estructura de control "Σ"* para organizar las funciones de decisión, de elección, de juicio de validez y de adecuación de la acción, asegurando la no contradicción de la concepción. La cuádrupla (P, L, R, Σ) es suficiente para caracterizar una concepción.

El Modelo de Pedemonte (Figura 1) integra los dos modelos ya que al momento en enfrentarse a problemas de conjetura y demostración los estudiantes acuden a sus *concepciones*.

Las concepciones de los estudiantes que permiten construir una conjetura constituyen la base de la argumentación. Su movilización permite construir el proceso argumentativo. De hecho, es la concepción movilizada durante la construcción de un argumento la que permite responder a las preguntas: ¿Por qué el permiso de inferir es pertinente para quien argumenta? ¿Por qué es correcto? ¿Por qué es adecuado?

Estas permiten movilizar los procesos argumentativos y justificar la existencia del argumento, por lo que pueden remplazar el *soporte* en el modelo de Toulmin y los *operadores* de la concepción pueden reemplazar los *permisos de inferir*. Como el soporte de un argumento corresponde a la concepción movilizada, entonces el permiso de inferir es uno de los operadores que constituyen la concepción (Pedemonte, 2005, p. 327).

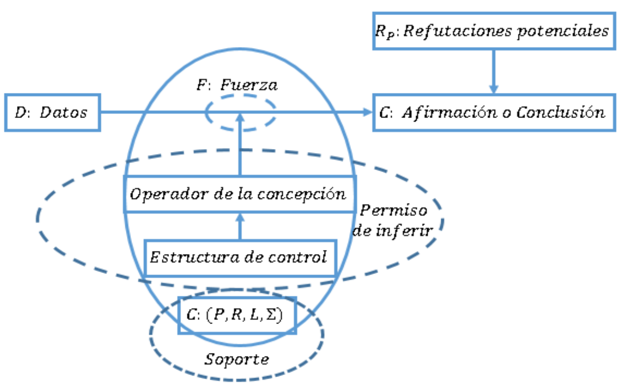

Figura 1. (Esquema del Modelo Pedemonte, diseñado por Pedemonte (2002), en Tesis de doctorado y publicado en Pedemonte y Balacheff (2016)).
Fuente: Adaptado de Pedemonte y Balacheff (2016)

Dificultades de la demostración por Inducción Matemática

Para identificar una posible evolución en la demostración por inducción matemática de los estudiantes, se las dificultades reportadas por la investigación (Crespo 2016; Dubinsky 1990; García y Parraguez 2017; Ron y Dreyfus 2004; Stylianides, Sandefur y Watson 2016), las cuales sirven como indicadores de si se provoca la ruptura cognitiva para favorecer el proceso de argumentación en la construcción de la demostración por inducción matemática: *dificultades de procedimiento numérico-algebraico* (J_1), *desconocimiento de la importancia del paso base* (J_2), *identificación de la esencia del paso inductivo (J_3), dificultad para comprender cuando es aplicable la inducción matemática (J_4), dificultad para identificar la proposición a demostrar (J_5) y dificultad para comprender la relación entre el paso base y el paso inductivo (J_6).*

Método

Esta investigación es de tipo cualitativa, se lleva a cabo con estudiantes de Matemáticas y Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander que cursan la asignatura Teoría de números, quienes participan en la implementación de la secuencia de enseñanza. En el segundo semestre de 2021 se realizó un pilotaje que permitió esclarecer la metodología del estudio exploratorio que llevará a responder la pregunta de investigación.

Para poder cumplir con el objetivo de investigación, se diseñó una unidad de enseñanza, teniendo en cuenta las dificultades de los estudiantes en la comprensión del PIM, entre ellos, la necesidad de promover la ruptura cognitiva entre el proceso del planteamiento de la conjetura y la construcción de la demostración, y los siguientes tipos de problemas: progresiones, recursividad, situaciones hipotéticas, divisibilidad, teoremas de teoría de números. Cada núcleo contiene 3 o 4 problemas diseñados en tres momentos, i) planteamiento de una conjetura, ii) discusión sobre las conjeturas planteadas, y iii) construcción de una demostración.

De aproximadamente 60 estudiantes de los dos grupos, se trabajó con 4 estudiantes, quienes fueron seleccionados de forma voluntaria, pero bajo el consenso de participación constante, compromiso por realizar lo que le pedía los problemas y asistir a todas las clases. Para el posterior análisis, los datos de los vídeos se sistematizaron para identificar momentos donde se presentó la conjetura y las dificultades para demostrar por inducción matemática, y se transcribieron para examinarlos a la luz de los elementos teóricos.

Análisis de un caso

A continuación, se presenta el análisis de uno de los problemas de demostración de progresiones, los cuales fueron abordados por el estudiante A de manera individual y conjunta para el planteamiento de la conjetura.

Problema: Considere en orden estrictamente creciente los siguientes enteros positivos

$$3, 7, 11, 15, \ldots$$

Explorando conjeturas

a) ¿Cuál es el décimo término de la progresión? ¿Cuál es el centésimo término de la progresión?
b) Qué patrón de recurrencia identifica entre cada término consecutivo.
c) ¿Cuál es el $n - ésimo$ término de la progresión? construya una conjetura sobre lo encontrado.
d) ¿El patrón de recurrencia del inciso cumple la expresión enunciada en el inciso anterior? **Justifique su respuesta.**

Episodio del Planteamiento de la conjetura

[1] Inv. ¿Qué hizo cada uno para hallar el décimo y centésimo término?

[2] A: Para encontrar el décimo término de la progresión me di cuenta de que los términos se separan por cuatro unidades, a partir de los que nos dan acá, ósea el 3, 7, 11, 15, … entonces fui agregando +4 para hallar el siguiente, 19, +4 para hallar el siguiente y así al décimo término que es 39. En el punto b, pues para hacer los cálculos de a uno por uno ya me resultaba más difícil,

entonces me di cuenta de que en el décimo término para avanzar al número 20 (a_{20}) de la progresión, avanzamos 40 unidades, ósea +40, para hallar el término treinta (a_{30}) de la progresión otra vez +40, y así lo hice hasta el término cien (a_{100}) de la progresión, y así lo hice, es decir, el centésimo término de la progresión me dio 499

[4] A: En el punto c, bueno ya después se separan por 4 unidades y también se da cuenta uno que al sumarse de a cuatro, podrían ser múltiplos de 4, pero no están así, digamos serían 4,8,12,16,20, … pero entonces siempre están restando de a uno. Entonces serían múltiplos de cuatro menos uno [Señala la expresión 4n-1].

[5] Inv. Ok y eso ¿qué vendría siendo?

[6] A: Eso sería el patrón de la progresión. Y ya en el punto d, es que si obtengo el n-ésimo término de la progresión, entonces reemplazando acá por cualquier "n".

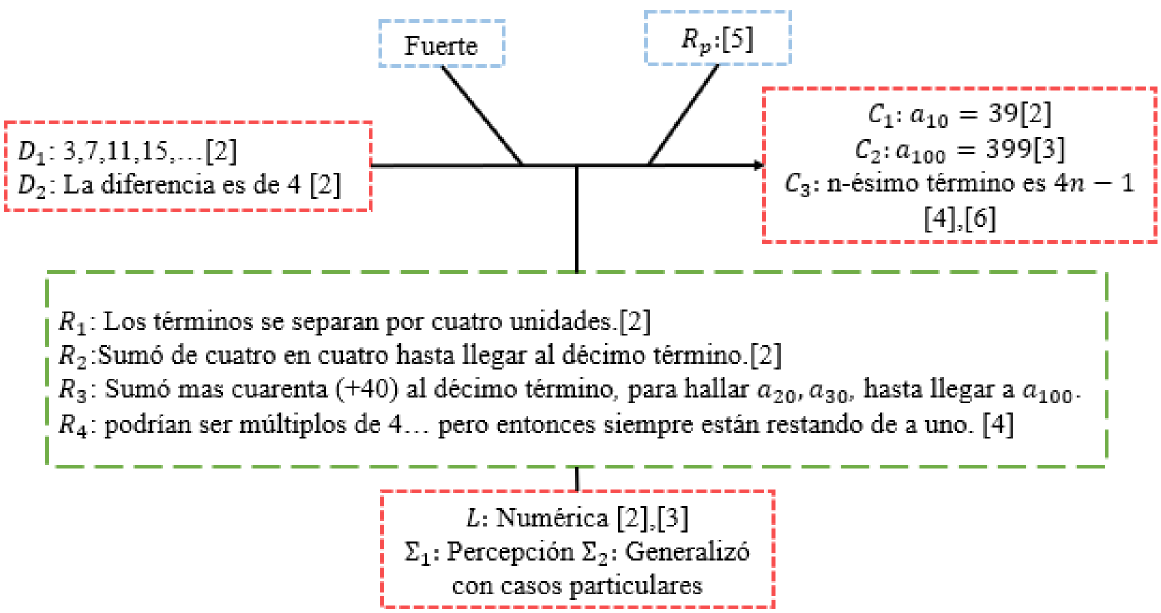

Figura 2. Esquema del Planteamiento de la conjetura empleando el Modelo Pedemonte
Fuente: Elaboración propia.

Demostrando

a) Una conjetura puede ser cierta en muchos casos particulares y sin embargo no ser verdadera en general. Es imposible analizar todos los casos particulares. ¿Cómo podemos saber, si la conjetura planteada es cierta para todo natural?

b) Construya una demostración para cada conjetura planteada en **1) d)**, teniendo en cuenta los resultados obtenidos anteriormente.

Episodio de la demostración

[7] A: Yo de igual manera **utilicé el método de inducción matemática** para probar de que se cumplía para todos.

[9] A: **primero se parte de la base inducción**, que es probar para el primero, pero como yo empecé en n=1, entonces pruebo para n=1, y la fórmula es 4n-1. **Entonces para n=1 vemos que está porque 4(1)-1=3 y ese término está en la progresión.** Entonces ahora **la hipótesis de**

inducción, supongo que para n=k también se cumple, eso ya lo doy por sentado, y **veamos que también se cumple para $\boldsymbol{n = k + 1}$** es decir, para el siguiente.

[10] A: listo. **Bueno entonces para $\boldsymbol{4k - 1}$, es decir, reemplazamos $\boldsymbol{n = k + 1, 4(k + 1) - 1}$ y ahí hacemos una propiedad distributiva, $\boldsymbol{4k + 4 - 1}$, eso también se puede mirar como $\boldsymbol{4k - 1 + 4}$**, $4k - 1$ está por hipótesis de inducción está en la progresión y si yo le sumo 4, voy a obtener el siguiente término de **<u>la relación de recurrencia es +4</u>**, es decir, **la diferencia entre un término y otro es de 4, entonces si sumo cuatro (4)**, ese término también va a estar en la progresión, entonces, el $k + 1$ término está en la progresión.

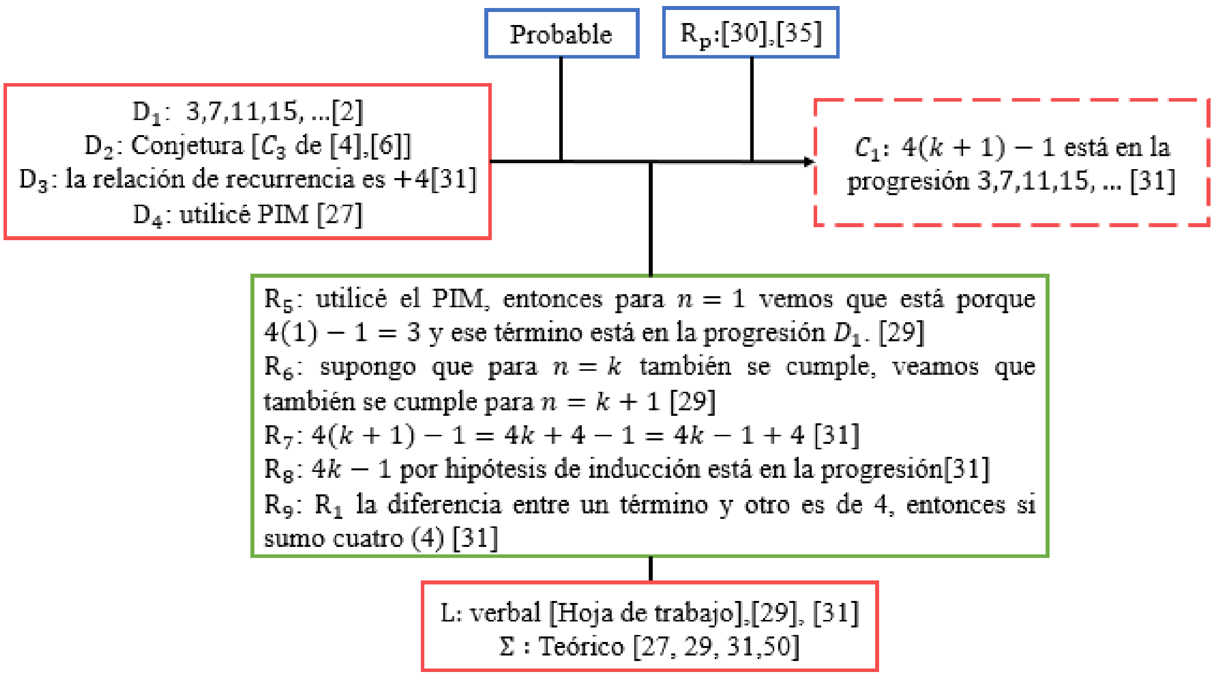

Figura 3. Esquema de la demostración empleando el Modelo Pedemonte
Fuente: Elaboración propia.

En la construcción de la demostración, A utilizó el principio de inducción matemática, declarado como dato (D_4) extraído del inciso 3a) planteado en el problema, utilizó D_4 como operador en R_5, R_6, R_7, validó su proceso mediante la demostración del paso base y paso inductivo del PIM, pero no usa el principio correctamente, ya que asume la conclusión del paso inductivo como conclusión de la demostración. Los operadores en la demostración no son los mismos del planteamiento de la conjetura.

Ruptura cognitiva

Tala 1

Comparación del sistema de referencia de A

PLANTEAMIENTO DE LA CONJETURA	**DEMOSTRACIÓN**
CONCLUSIÓN C_3: n-ésimo término es $4n - 1$	CONCLUSIÓN C_1: $4(k+1) - 1$ está en la progresión $3,7,11,15,\ldots$
OPERADORES R_1: los términos se separan por cuatro unidades. R_2: sumo de cuatro en cuatro hasta llegar al décimo término. R_3: sumo mas cuarenta (+40) al décimo término, para hallar a_{20}, a_{30}, hasta llegar a a_{100}. R_4: podrían ser múltiplos de 4… pero entonces siempre están restando de a uno.	OPERADORES R_5: utilicé el PIM, entonces para $n = 1$ vemos que está porque $4(1) - 1 = 3$ y ese término está en la progresión D_1. R_6: supongo que para $n = k$ también se cumple, veamos que también se cumple para $n = k + 1$ R_7: $4(k+1) - 1 = 4k + 4 - 1 = 4k - 1 + 4$ R_8: $4k - 1$ por hipótesis de inducción está en la progresión R_9: R_1 la diferencia entre un término y otro es de 4, entonces si sumo cuatro.
REPRESENTACIÓN L: Numérica	REPRESENTACIÓN L: verbal
ESTRUCTURA DE CONTROL Σ_1: Percepción Σ_2: Generalizó con casos particulares	ESTRUCTURA DE CONTROL Σ: Teórico
RUPTURA DEL SISTEMA DE REFERENCIA	

Tala 2

Comparación del sistema estructural de A

PLANTEAMIENTO DE CONJETURA	**DEMOSTRACIÓN**
FORMA DE ARGUMENTACIÓN Constructiva	FORMA DE ARGUMENTACIÓN Estructurante
ESTRUCTURA DE LA CONJETURA Inductiva por generalización sobre el proceso	ESTRUCTURA DE LA DEMOSTRACIÓN Demostración por inducción
RUPTURA ESTRUCTURAL	

Resultado

Se concluye que el proceso de argumentación del planteamiento de la conjetura del estudiante se produjo basado en la generalización de un patrón de casos particulares, ya que predomina lo perceptivo y la escogencia los datos necesarios para generalizar, pero sin criterios teóricos que le den fuerza al análisis realizado.

En este proceso de argumentación de conjetura y demostración se verifica una ruptura cognitiva dada la ruptura referencial y estructural ya que, los operadores usados en la demostración son distintos a los usados para plantear la conjetura.

Aunque se provocó la ruptura, se identificó la dificultad (J_5) ya que, en el proceso de la demostración usó el lenguaje natural en carencia de comprender lo que quería demostrar. Otras dificultades identificadas son (J_2) y (J_6); el estudiante asume la conclusión del paso inductivo como la conclusión de la demostración, lo cual muestra que (1) el estudiante no contempla que es demostrada la proposición cuando son demostrados el paso base y el paso inductivo y (2) asumen el paso base como un requisito desligado de la demostración.

Reflexiones finales

La ruptura cognitiva entre el planteamiento de conjeturas y su demostración se presenta cuando el estudiante no usa los argumentos del planteamiento de la conjetura en la demostración, sino que los transforma en argumentos que permiten validar la conjetura, en nuestro caso, las valida usando el principio de inducción matemática; este escrito buscó por medio de la unidad de enseñanza, provocar la ruptura mediante las serie de preguntas planteadas en la primera etapa del problema, las preguntas se diseñaron de tal manera que el estudiante plantee su propia conjetura inductivamente, el diseño de la unidad se basó en la hipótesis que indica: promover el desarrollo de generalización de patrones facilita posteriormente la construcción de la demostración por inducción matemática Mariotti (2006).

Por otra parte, para verificar si hubo o no una ruptura cognitiva se hizo uso del modelo Pedemonte (2002); Pedemonte y Balacheff, (2016) como herramienta de análisis ya que permite visibilizar los argumentos presentes en la movilización de los dos momentos del problema y obtener a detalle qué forma de argumentación utilizó el estudiante para abordar las preguntas planteadas.

Se presenta el primer problema como punto de partida para comprender el uso de la herramienta de análisis; los elementos teóricos del modelo desglosan el argumento y permite identificar qué forma de argumentos está presente, qué conjetura plantea el estudiante y qué elementos requirió para lograrlo. Estos datos a su vez indican que promover el planteamiento de conjeturas requirió mas tiempo que la misma demostración, esto muestra que poco se ha desarrollado este proceso en el estudiante y la necesidad de promover el planteamiento de estos problemas para enseñar la demostración por inducción matemática.

Referencias y bibliografía

Balacheff, N., Margolinas, C. (2005). cK¢ Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. En A. Mercier, C. Margolinas (Eds.), Balises pour la didactique des mathématiques (pp. 75-106). Francia: La Pensée Sauvage -Editions-.

Crespo, C. (2016). Argumentaciones en el aula de matemática. La estrategia de inducción completa. *Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (Clame), 28*, 243-252.

Fiallo, J. (2011). Estudio del proceso de Demostración en el aprendizaje de las Razones Trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica. [Tesis Doctoral, Universitat de València, España].

Fiallo, J. y Gutiérrez, A. (2017). Analysis of the cognitive unity or rupture between conjecture and proof when learning to prove on a grade 10 trigonometry course. *Educational Studies in Mathematics, 96*(2). 145-167.

García-Martínez, I., & Parraguez, M. (2017). The basis step in the construction of the principle of mathematical induction based on APOS theory. Journal of Mathematical Behavior, 46, 128–143.

Garuti, R., Boero, P., Lemut, E. (1998). Cognitive unity of theorems and difficulty of proof. Proceedings of the 22th PME International Conference, 345 - 352.

Pedemonte, B. (2005). Quelques outils pour l`analyse cognitive du rapport entre argumentation et démonstration. Recherches en didactique des mathematiques, 25(3), 313-348.

Pedemonte, B., y Balacheff, N. (2016). Establishing links between conceptions, argumentation and proof through the ck¢-enriched Toulmin model. *The Journal of Mathematical Behavior*, 41, 104–122.

Ron, G. y Dreyfus, T. (2004). The use of models in teaching proof by mathematical induction. En M. J. Hoines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the twenty-eighth conference of the international group for the Psychology of Mathematics education PME* (pp.113-120). Bergen, Norge: Bergen University College.

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J. & Philippou, G. N. (2007). Preservice teachers' knowledge of proof by mathematical induction. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *10*(3), 145-166.

Stylianides, G. J., Sandefur, J., & Watson, A. (2016). Conditions for proving by mathematical induction to be explanatory. The Journal of Mathematical Behavior, 43, 20–34.

Toulmin, S.E. (1958) The use of argument, Cambridge University Press.