# Resolución de problemas verbales en un ambiente dinámico y formación de profesores de matemáticas

Adrián **Gómez-Árciga**
Facultad de Pedagogía e Innovación Educativa, Universidad Autónoma de Baja California
México
adrian.arciga@uabc.edu.mx
Gricelda **Mendivil** Rosas
Facultad de Pedagogía e Innovación Educativa, Universidad Autónoma de Baja California
México
gmendivil@uabc.edu.mx

**Resumen**

En este estudio se analizan y documentan los recursos, estrategias y formas de razonamiento matemático que exhiben profesores de nivel bachillerato cuando utilizan un Sistema de Geometría Dinámica (SGD) durante el proceso de resolución de problemas verbales. Los resultados mostraron que el uso de un SGD (GeoGebra) favorece diferentes formas de representar, explorar y resolver los problemas, promoviendo la discusión y significado de los conceptos involucrados en los enunciados.

*Palabras clave*: Resolución de problemas; Formación de profesores; Álgebra; Tecnología digital.

## Introducción

La agenda de investigación sobre el estudio y aprendizaje del álgebra destaca la importancia de que los estudiantes construyan y analicen el significado y sentido de los objetos y procesos algebraicos de tal manera que se favorezca la comprensión conceptual y la resolución de problemas (Kieran, 2020). En este sentido, la presencia de la tecnología digital en el ámbito escolar puede favorecer este tipo de prácticas, sin embargo, exige la participación de los distintos actores educativos en la reestructuración de los ambientes de aprendizaje (Santos-Trigo, 2018). En la enseñanza del Álgebra, se ha indagado sobre qué ofrecen o qué pueden ofrecer las diferentes tecnologías digitales para alcanzar los objetivos específicos de aprendizaje en este campo y cómo aprovecharlas de manera eficiente. De hecho, en varios países han ido disminuyendo gradualmente los ejercicios que requieren simplificación algebraica en las evaluaciones finales de los estudiantes y, además, les permiten el uso de un Sistema Algebraico Computacional (CAS, por sus siglas en inglés), como herramientas para simplificar y resolver ecuaciones (Arcavi et al., 2017).

Este reporte atiende a la pregunta de investigación ¿cómo se caracterizan las formas de razonamiento que exhiben profesores de bachillerato cuando resuelven problemas verbales con el uso de un SGD (GeoGebra) en un ambiente que promueve la perspectiva de resolución de problemas? El objetivo es abonar información a la discusión del uso eficiente de la tecnología digital en los procesos de enseñanza del Álgebra, en donde se reconoce que uno de los temas principales en la asignatura de álgebra de nivel bachillerato es el de los problemas verbales (problemas que pueden ser resueltos mediante el uso de sistemas de ecuaciones lineales o de segundo grado) (Verschffel et al., 2020).

## Marco conceptual

Una manera de evaluar y explicar el proceso que un individuo sigue cuando resuelve problemas se basa en identificar: (1) los recursos o dominio de conocimiento conceptual y procedimental, (2) los métodos heurísticos o estrategias de búsqueda para analizar problemas, (3) las estrategias metacognitivas o de monitoreo y control y, (4) las creencias o actitudes que toma antes, durante y después del proceso de solución (Schoenfeld, 1985). Estas cuatro fases son importantes para analizar y comprender los acercamientos a la solución de los problemas que muestran los profesores que participaron en este estudio.

Por otro lado, como mencionan Santos-Trigo y Aguilar-Magallón (2018), en la actualidad "un ambiente de enseñanza basado en la resolución de problemas debe incorporar ya como un elemento esencial el uso de las tecnologías digitales en las formas de representar y de explorar las tareas o problemas matemáticos" (p. 164). Por eso, resulta importante integrar un marco que considere no solo las fases de la resolución de problemas, sino también el uso de las tecnologías digitales durante el proceso de resolución.

En este sentido, Santos-Trigo y Camacho-Machín (2013) propusieron cuatro episodios que se caracterizan por incentivar el uso de la tecnología digital y la formulación de preguntas, que dirigen las acciones del individuo durante el proceso de la resolución de problemas. Los episodios son: **Comprensión**: ¿cómo representar la información descrita en la situación problemática con el medio tecnológico implementado? Buscar formas de representar un problema en un ambiente distinto a lápiz y papel implica identificar los conceptos involucrados y vincularlos a las herramientas del medio. **Exploración**: ¿cómo se resuelve el problema utilizando el medio tecnológico? ¿De qué manera se relacionan los elementos puestos en juego? Explorar e identificar posibles relaciones entre los datos proporcionados. Así como plantear conjeturas que puedan ser discutidas y exploradas también.**Búsqueda de distintos acercamientos a la solución**: ¿cómo proponer al menos un acercamiento a la solución del problema con base en el medio utilizado? Argumentar los resultados obtenidos y, de ser posible, presentar una solución formal. **Integración y reflexiones**: ¿cuáles fueron las ideas principales en el proceso? Discutir sobre el significado o la interpretación que se les dio en el medio tecnológico a los conceptos involucrados en el enunciado del problema.

Los problemas que se utilizaron para este estudio fueron desarrollados y resueltos con el uso de un SGD (GeoGebra) a través de los episodios planteados por Santos-Trigo y Camacho-Machín, para promover y facilitar el estudio de las relaciones entre las cantidades como se desea en el álgebra escolar (NCTM, 2010).

## Metodología

La naturaleza del estudio es cualitativa, busca caracterizar en qué medida profesores de bachillerato se apropian de las herramientas que ofrece un SGD (GeoGebra) para representar y explorar dinámicamente los conceptos involucrados en los problemas verbales y proponer posibles rutas o caminos para solucionarlos. Mediante la observación e interacción controlada se busca comprender cómo los profesores interpretan las situaciones problemáticas que se les plantean cuando utilizan GeoGebra, y qué significado y sentido geométrico les dan a los conceptos involucrados en los problemas.

Se llevó a cabo con diez profesores de matemáticas de Bachillerato. Cinco de los profesores contaban con una formación inicial normalista, cuatro con formación en matemáticas y uno en ingeniería. Los años de experiencias frente a grupo oscilaban desde uno hasta diez años. Respecto al manejo de GeoGebra, su experiencia se limitaba a graficar funciones.

Las actividades formaron parte de un diplomado sobre la incorporación de las herramientas digitales en la enseñanza de funciones en el nivel medio superior. El diplomado tuvo una duración de 120 horas, de las cuales 80 fueron presenciales impartidas en 16 sesiones de cinco horas cada una. Las sesiones de trabajo se desarrollaron en un aula que contaba con una computadora que estaba conectada a un proyector, la cual fue utilizada para mostrar las actividades y exponer los acercamientos en GeoGebra elaborados por los profesores durante el desarrollo de las sesiones. Cada profesor contaba con su computadora en la que previamente habían instalado GeoGebra.

Dentro de las actividades que se abordaron en el diplomado, se consideraron tres problemas verbales que involucraban el concepto de velocidad. Estos problemas los trabajaban de manera individual los profesores y, posteriormente, se hacia una discusión entre todo el grupo (profesores e investigador) sobre las ideas o acercamientos explorados. Los acercamientos que se muestran en la siguiente sección fueron el resultado de una discusión grupal. Los problemas seleccionados fueron:

**Problema 1**. Un barco navega a la velocidad de 45 km/h, ¿en cuánto tiempo recorrerá 180 km?

**Problema 2**. Un grupo de deportistas efectúan un recorrido de 380 km en siete horas durante una expedición de caza. Durante cuatro horas viajan a lo largo de una carretera pavimentada y el resto del tiempo por un camino de herradura. Si la velocidad media en el camino de herradura es de 25 km/h menor que la velocidad media en la carretera, encuéntrese la velocidad media y la distancia recorrida en cada uno de aquellos tramos de camino.

**Problema 3**. Charles Curtis decide dar un paseo relajante en su lancha de motor por el río Potomac. Inicia su recorrido en Bethesda, Maryland. Después de recorrer 12 millas a favor de la corriente, decide regresar. Su paseo tuvo una duración de 5 horas y la corriente del río se movía a una velocidad de 2 millas por hora. Si todo el trayecto lo hizo a la misma velocidad, determine la velocidad de la lancha en aguas tranquilas.

El Problema 1, involucra una situación cuyo objetivo fue introducir a los participantes en el uso de la herramienta como un medio para representar geométricamente o modelar la situación planteada (Gómez-Arciga & Reyes-Martínez, 2019). El Problema 2 que, a diferencia del Problema 1, es de tratamiento algebraico, se planteó con el objetivo de introducir estrategias con GeoGebra que ayudaran a los profesores a representar condiciones generales, es decir, condiciones que ya no son datos específicos como en el Problema 1 (Gómez-Arciga, Olvera-Martínez, Aguilar-Magallón & Poveda, 2018).

En este reporte se analiza el trabajo que los profesores desarrollaron en la resolución del Problema 3 con el uso de GeoGebra, porque interesa caracterizar los procesos de solución e identificar los recursos y estrategias que utilizaron después de enfrentarse a los dos primeros problemas. Los datos se recolectaron a través de videograbaciones de las sesiones, archivos de GeoGebra con las construcciones dinámicas que elaboraron los profesores y las notas de campo de los investigadores.

## Resultados

En esta sección se hace un análisis sobre los recursos, estrategias y formas de razonamiento que exhibieron los profesores durante una discusión grupal en el proceso de resolución del Problema 3. Se discuten dos acercamientos que propusieron para llegar a la solución. El primero, es una solución algebraica del problema; el segundo es un acercamiento basado en la construcción de un modelo dinámico con GeoGebra.

### Acercamiento algebraico

Este acercamiento es el que se estudia y enfatiza en los libros de texto cuando se resuelve este tipo de problemas. En él se pueden identificar cinco fases. 1) identificar los datos del problema; 2) determinar la incógnita; 3) escribir los datos en términos de la incógnita; 4) plantear la ecuación y; 5) resolver la ecuación y dar la solución al problema. El procedimiento que mostraron fue el siguiente:

$\boldsymbol{r}$ =velocidad de la lancha en aguas tranquilas.

| Dirección | Distancia | Velocidad | Tiempo |
|---|---|---|---|
| Trayecto de ida<br>(a favor de la corriente) | 12 | $r+2$ | $\frac{12}{r+2}$ |
| Trayecto de vuelta<br>(en contra de la corriente) | 12 | $r-2$ | $\frac{12}{r-2}$ |

Luego, **trayecto de ida + trayecto de vuelta = tiempo total;** $\frac{12}{r+2}+\frac{12}{r-2}=\mathbf{5}$

$$(\boldsymbol{r}+\mathbf{2})(\boldsymbol{r}-\mathbf{2})\left(\frac{12}{r+2}+\frac{12}{r-2}\right)=(\boldsymbol{r}+\mathbf{2})(\boldsymbol{r}-\mathbf{2})(\mathbf{5})$$

$$\begin{gathered}(\boldsymbol{r}+\mathbf{2})(\boldsymbol{r}-\mathbf{2})\left(\frac{\mathbf{12}}{\boldsymbol{r}+\mathbf{2}}\right)+(\boldsymbol{r}+\mathbf{2})(\boldsymbol{r}-\mathbf{2})\left(\frac{\mathbf{12}}{\boldsymbol{r}-\mathbf{2}}\right)=(\boldsymbol{r}+\mathbf{2})(\boldsymbol{r}-\mathbf{2})(\mathbf{5})\\ \mathbf{12}(\boldsymbol{r}-\mathbf{2})+\mathbf{12}(\boldsymbol{r}+\mathbf{2})=\mathbf{5}(\boldsymbol{r}^{\mathbf{2}}-\mathbf{4})\\ \mathbf{12}\boldsymbol{r}-\mathbf{24}+\mathbf{12}\boldsymbol{r}+\mathbf{24}=\mathbf{5}\boldsymbol{r}^{\mathbf{2}}-\mathbf{20}\\ \mathbf{24}\boldsymbol{r}=\mathbf{5}\boldsymbol{r}^{\mathbf{2}}-\mathbf{20}\end{gathered}$$

Los participantes, en general, usaron la formula cuadrática y obtuvieron las raíces 5.5 y -0.7. Así que la velocidad de la lancha en aguas tranquilas es de alrededor de 5.5 millas por hora.

**Acercamiento geométrico con GeoGebra**

**Episodio de comprensión**: En la Figura 1a se muestra el modelo dinámico con el que se representó la información descrita en la situación problemática, donde las unidades del *eje x* representan el tiempo medido en horas y las unidades del *eje y* la distancia medida en millas. Los segmentos $j$ y $k$ representan los tiempos transcurridos por la lancha de ida y vuelta, respectivamente; el punto $C$ señala la distancia recorrida de ida y el punto $A'$ la distancia total recorrida; las pendientes $m$ y $m_1$ reproducen las velocidades de ida y vuelta según la posición del punto $E$ (punto que controla el modelo).

La condición que se fijó del problema en el modelo geométrico fue la duración del paseo. En términos del modelo, la suma de las longitudes de los segmentos $j$ y $k$ era 5 ($j + k = 5$).

**Episodio de exploración**: Los profesores observaron la variación de las velocidades en función de la posición del punto $E$. Definieron la variable *diferencia* $= m - m_1$ y hallaron la posición de $E$ donde la *diferencia* $= 4$ (Figura 1b). En el contexto del problema se interpreta como hallar la velocidad tanto de ida como de vuelta cuando éstas tienen una diferencia de 4 millas por hora.

Esta aproximación del modelo a las condiciones del problema permitió la estimación de la velocidad de la lancha en aguas tranquilas, ya que solo fue necesario aplicar una operación mental que implicó disminuir dos unidades a $m$ o aumentárselas a $m_1$. De esta manera, los profesores consideraron correcta la construcción del modelo porque el valor estimado era aproximado a la solución algebraica.

Teniendo en cuenta esto último, los profesores hicieron dos tipos de exploraciones. La primera fue explorar los valores que tomaba la variable definida como *diferencia* con relación a la posición del punto $E$ (Figura 1c), a través del lugar geométrico descrito por el punto $P = (j,$ *diferencia*); la segunda fue explorar la relación entre $m - 2$ (velocidad de la lancha) y la *diferencia* (Figura 1d), a través del lugar geométrico descrito por el punto $J = (m - 2,$ *diferencia*).

Al comparar las exploraciones, se observa que los profesores analizan la diferencia de las velocidades. Solo que en la primera lo hacen en términos del tiempo recorrido en el tramo de ida mientras que en la segunda lo hacen en términos de la velocidad de la lancha.

Este episodio concluyó con una discusión que se dio en torno a las preguntas ¿cómo se interpreta la intersección del lugar geométrico con el *eje x*?, ¿qué información se obtiene de la parte negativa del lugar geométrico?, ¿en qué intervalo del *eje x* tiene sentido mover el punto $E$

para explorar relaciones entre los elementos contenidos en el modelo?, es decir, ¿cuál es su dominio?

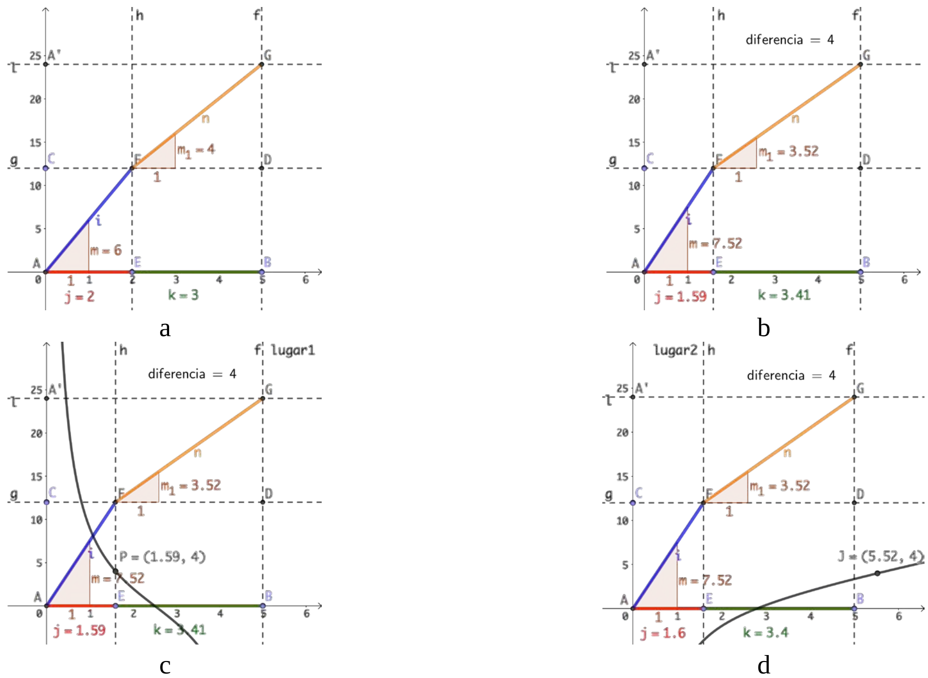



*Figura 1. Representación dinámica de los conceptos involucrados en el problema y exploraciones.*

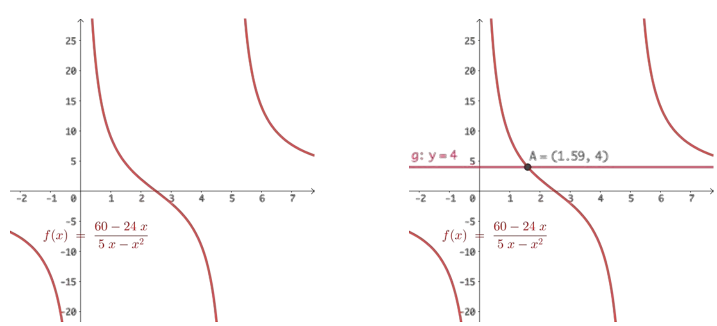
Es importante mencionar que las unidades de los ejes cambian cuando se están analizando los lugares geométricos. Para el primero se toman como tiempo versus velocidad y para el segundo como velocidad versus velocidad.

**Episodio de búsqueda de distintos acercamientos a la solución**: El objetivo de los profesores en este episodio fue trazar los lugares geométricos de forma robusta (parametrizarlos) para hallar la solución exacta en cada caso con el SGD. En la Figura 2a se muestra la parametrización y gráfica del lugar geométrico descrito por el punto *P* (Figura 1c), y en la Figura 2b se intersecta con la recta $y = 4$, que se interpreta como el momento en que se cumple la condición de que la diferencia de las velocidades de ida y vuelta es cuatro millas por hora, obteniendo el tiempo en que la lancha recorre el tramo de ida en la coordenada *x* del punto *A*. Por lo tanto, la solución al Problema 3 es $12/1.59 - 2 \approx 5.5$.

$$y = diferenncia$$
$$y = m - m_1$$
$$y = \frac{12}{j} - \frac{12}{5-j}$$
$$y = \frac{60-24j}{5j-j^2}$$

Se renombra *j* como *x*

$$y = \frac{60-24x}{5x-x^2}$$




a b

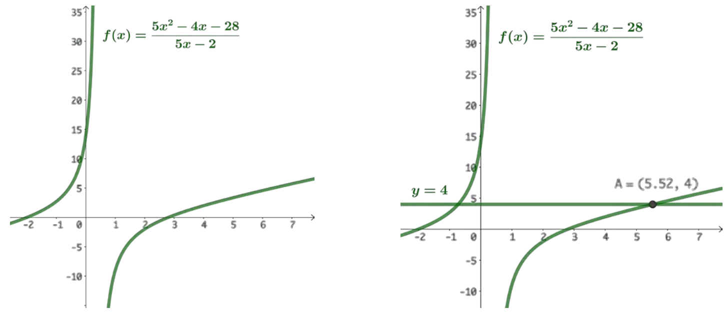
*Figura 2. Graficación del lugar geométrico descrito por P e intersección con la recta y = 4.*

De la misma manera, en la Figura 3a se muestra la parametrización y gráfica de lugar geométrico descrito por el punto $J$ (Figura 1d) y en la Figura 3b se intersecta también con la recta $y = 4$, obteniendo la solución (la velocidad de la lancha en aguas tranquilas) en la coordenada $x$ del punto $A$.

$$(m-2, m-m_1)$$
$$\left(m-2, m-\frac{12m}{5m-12}\right)$$
$$\left(m-2, \frac{5m^2-24m}{5m-12}\right)$$

Se renombra *m - 2* como *x* y se escribe como función

$$y=\frac{5x^2-4x-28}{5x-2}$$




a b

*Figura 3. Graficación del lugar geométrico descrito por J y solución gráfica del Problema 3.*

**Episodio de integración y reflexiones**: Los profesores discutieron sobre el significado geométrico de los conceptos involucrados en el enunciado del problema. Analizaron e interpretaron los lugares geométricos en términos de la construcción dinámica y del contexto del problema. En el desarrollo del episodio se reflexionó sobre ¿cómo se compara el tiempo de ida y vuelta de la lancha en aguas tranquilas con el tiempo de ida y vuelta cuando hay corriente?, ¿cómo varía la solución si se modifica la velocidad de la corriente?, ¿cambia el dominio del problema según la relación que se analice?, ¿cuáles son las características de las funciones asociadas a los lugares geométricos y cómo se interpretan las asíntotas en el contexto del problema? La meta es que los profesores conecten e integren sus recursos algebraicos con el medio geométrico y tengan la oportunidad de explorar los conceptos que aparecen en los problemas verbales desde otra perspectiva diferente a la algebraica. Por ejemplo, un concepto clave en la construcción y análisis del modelo fue el de razón que se asocia tanto a la velocidad como a la pendiente.

## Discusión de los resultados y conclusiones

Al contrastar el acercamiento algebraico y el modelo dinámico o geométrico del problema, se observa que la construcción del modelo geométrico requirió que los profesores enfocaran la atención hacia el significado geométrico de la velocidad y la representación como pendiente de una recta. Esto implicó que activaran diferentes recursos, estrategias y se cuestionaran constantemente sobre el proceso que llevaron a cabo para resolver el problema.

Con ayuda de las herramientas implementaron las estrategias de punto con movimiento ordenado (punto $E$ de la Figura 1 y punto $C$ de la Figura 4), definición de una relación funcional (punto $P$ en figuras 1c y 4c) y trazo de lugar geométrico, que permitieron la exploración, análisis y formulación y validación de conjeturas, de las relaciones inmersas en el modelo. Propusieron una solución robusta (que llega a la solución exacta dentro del SGD) posterior a los acercamientos discutidos en el modelo y, finalmente, reflexionaron sobre la importancia de plantear preguntas para extender el problema una vez que se contaba con el modelo dinámico.

Además, se obtuvieron modelos algebraicos a partir del modelo geométrico mediante la parametrización.

A pesar de que un modelo algebraico se asocia con el método formal de solución, no significa que un profesor deba estar limitado a enseñar este enfoque exclusivamente o darle prioridad en sus cursos impartidos. Pues, mientras el enfoque algebraico se sustenta fuertemente en recursos como la manipulación simbólica y dominio aritmético, el enfoque geométrico basado en un SGD (GeoGebra) da la posibilidad de construir y utilizar recursos y estrategias, y poner en práctica los hábitos del razonamiento matemático.

El hecho de que los profesores enfoquen la atención hacia el significado geométrico del problema y utilicen la herramienta para representar, explorar y resolver los problemas tiende a ampliar sus formas de razonamiento y así contrastar y potenciar las estrategias que se utilizan en la construcción de los modelos algebraicos. Además, dado que los episodios demandan una actitud inquisitiva porque requiere cuestionarse sobre ¿cómo representar el problema en GeoGebra?, ¿qué explorar?, ¿qué caminos pueden llevar a la solución?, ¿cuáles son las ideas principales detrás de este proceso?; los profesores pueden mejorar el tipo de preguntas que formulan no solo para resolver y extender el problema al que se enfrentan, sino también para dirigir la actividad de los estudiantes cuando resuelven problemas.

El uso de GeoGebra (SGD) en la resolución de problemas verbales ofrece la posibilidad de que los profesores busquen nuevas rutas para resolverlos, transformarlos o extenderlos, coadyuvando en su labor profesional.

## Referencias

Arcavi, A., Drijvers, P., & Stacey, K. (2017). The Learning and Teaching of Algebra: Ideas, Insights and Activities. Routledge.

Gómez-Arciga, A., Olvera-Martínez, C., Aguilar-Magallón, D., & Poveda, W. E. (2018). Digital Reasoning: Representing, exploring and solving word problems through the use of GeoGebra. En T. E. Hodges, G. J. Roy, & A. M. Tyminski (Eds), *Proceedings of the 40th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Pyschology of Mathematics Education* (pp. 1171-1186). Greenville, SC: University of South Carolina & Clemson University.

Gómez-Arciga, A., & Reyes-Martínez, I. (2019). Acercamientos Geométricos a Problemas Verbales en un Ambiente de Resolución de Problemas con GeoGebra. En S. Otten, A. G. Candela, Z. de Araujo, C. Haines, & C. Munter (Eds), *Proceedings of the forty-first annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 820-828). St Louis, MO: University of Missouri.

Kieran, C. (2020). Algebra Teaching and Learning. En *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 27-32). Springer Netherlands.

National Council of Teacher of Mathematics (2010). *Focus in High School Mathematics: Reasoning and Sense Making in Algebra.* Reston, VA: National Council of Teacher of Mathematics.

Santos-Trigo, M. (11 de enero de 2018). Irrupción digital y escenarios de aprendizaje disciplinario. *Ciencia y Cultura*. Recuperado de: https://www.revistac2.com/irrupcion-digital-aprendizaje/

Santos-Trigo, M., & Aguilar-Magallón, D. (2018). Resolución de problemas matemáticos: del trabajo de Pólya al razonamiento digital. En *Rutas de la Educación Matemática* (pp. 148-167). Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática A. C. México.

Santos-Trigo, M., & Camacho-Machín, M. (2013). Framing the use of computational technology in problem solving approaches. *The Mathematics Enthusiast*, 10(1), 279-302.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. New York: Academic Press.

Verschffel, L., Depaepe, F., & Van Dooren, W. (2020). Word problems in mathematics education. En S. Lerman (Ed.), Encyclopedia of Mathematics Education (2da ed., pp. 908-911). Springer.