



## Taller Modelación Matemática para la resolución de problemas de optimización en trabajo colaborativo

Natalia **Alvarado-Garcés**  
Centro Educacional San Carlos de Aragón  
Chile  
[n.alvarado.04@hotmail.com](mailto:n.alvarado.04@hotmail.com)  
Rodrigo **Rojas-Muñoz**  
Universidad Austral de Chile  
Chile  
[rodolfo Rojas@uach.cl](mailto:rodolfo Rojas@uach.cl)

### Resumen

El presente taller corresponde a la adaptación de un trabajo de investigación aplicado con estudiantes de educación media. En este taller buscamos mostrar esta innovación, observar las competencias de modelación matemática en docentes que se desempeñen haciendo clases de matemática en educación media o superior y evaluar la situación de aula. La actividad se centra en la resolución de un problema de optimización en una situación contextualizada. La metodología por utilizar el trabajo en equipo según el modelo ARPA y el uso de elementos tecnológicos como lo son el uso de Geogebra para el análisis de las soluciones. En aplicaciones previas los hallazgos han sido: es un problema desafiante que involucra diversas habilidades matemáticas, discursivas e interpersonales, que puede ser aplicado a estudiantes que cursen distintos niveles de enseñanza, debido a que puede ser resuelto mediante diversas estrategias.

*Palabras clave:* Modelación matemática; Resolución de problemas en el aula; optimización; uso de TIC; Pensamiento matemático sociocrítico; aprendizaje colaborativo.

### Introducción

El presente taller, surge de una adaptación de una situación de aula creada y aplicada en el trabajo de tesis de grado de Alvarado (2021), en la que se buscaba modelar la función cuadrática

con estudiantes de segundo año medio (15 – 16 años). Dicha situación de aula fue mejorada acorde a los obstáculos detectados en la transición de los estudiantes por las fases de modelación propuesta por Blomhøj y Højgaard (2003), para ello se tomó como muestra estudiantes de educación media de la región de Aysén, sur de Chile, donde se agrega la intencionalidad del uso de herramientas tecnológicas en el aula, además de modificar elementos como el tiempo y los momentos para el ciclo de modelización, los cuales generaron dificultades a los estudiantes para la transición en todos los momentos de la modelización matemática propuesta.

La situación de aula busca dar cuenta a lo que plantean las Bases Curriculares, que los estudiantes comprendan el concepto de función cuadrática y sus respectivos elementos, entre ellos los máximos y mínimos a través del vértice de la función, en donde estos además deben ser aprendidos a través de la resolución de problemas y procesos de modelamiento matemático.

Es por esto que el presente taller pretende a su vez ser parte de tal extensión con docentes que se desempeñen haciendo clases de matemática en educación media o superior, a modo de complementar lo observado con esta implementación.

### Indagación bibliográfica

En Chile, en la actualidad podemos evidenciar dificultades en el aprendizaje, dentro de esta área el trabajo con las funciones, ya que es enseñado desde un punto de vista principalmente formal, generando una serie de obstáculos y dificultades en la comprensión de los conceptos y procesos matemáticos (Aravena y Caamaño, 2007).

En un estudio realizado a estudiantes entre 12 – 13 años se destaca que “al analizar dichos resultados podemos afirmar que son muy pocos los estudiantes que logran modelar fenómenos de la realidad mediante funciones. De acuerdo con lo observado, podemos inferir que la gran mayoría de los estudiantes tienen dificultades, para representar fenómenos de la realidad por medio de expresiones analíticas o gráficas” (Huapaya, 2012, p. 18).

Por consiguiente, es de creencia común que todo problema de optimización debe ser resuelto a través de derivadas (Morales et al., 2022), es posible trabajar algunos de estos problemas en estudiantes de nivel secundario que no manejan todavía esta herramienta matemática (Morales et al., 2022; Portillo et al., 2019; Moreno et al., 2021; Acosta, et al., 2020; Alvarado, 2022), o incluso un problema de optimización puede ayudar a construir la herramienta derivada (Montejo-Gámez, et al., 2018).

Una de las formas en que se busca contribuir a resolver un problema de optimización es a través del uso de la geometría dinámica (Morales et al., 2022, Portillo et al., 2019; Acosta et al., 2020; Balcaza, 2018; Sánchez et al., 2020), dado que mejora la interpretación y visualización del problema y brindan seguridad al estudiante (Portillo et al., 2019; Morales et al., 2022). También, el uso del software de geometría dinámica ayuda al docente a rediseñar los problemas de optimización para su adecuación a un nivel de precálculo (Portillo et al., 2019).

Sin embargo, la acción más importante para un buen proceso de enseñanza-aprendizaje de los problemas de modelización y optimización es que los docentes tengan la experiencia de

enfrentarse a la resolución de este tipo de problemas en su formación (Montejo-Gómez *et al.*, 2018; Moreno *et al.*, 2021; Felmer, *et al.*, 2019).

### Marco teórico

Dentro de lo que conocemos como modelación matemática es importante destacar que en el caso de Barbosa y Da Silva (2011) argumentan que la expresión "sociocrítica", implica una forma de ver la modelización en la Educación Matemática como un reconocimiento a aquellas prácticas pedagógicas que entienden este ambiente como una oportunidad para que los estudiantes discutan la naturaleza y el papel de los modelos matemáticos en la sociedad.

Según como se entiende "la modelización como un entorno de aprendizaje en el que, los alumnos, a través de las matemáticas, son invitados a indagar e investigar situaciones originadas en otros ámbitos de la realidad. Siguiendo este entendimiento, este ambiente de aprendizaje se constituye de relaciones interpersonales, posibilitando a los participantes la producción de varios tipos de acciones, como: esquematizar, desarrollar operaciones aritméticas, generar ecuaciones, hacer dibujos, trazar gráficos y, principalmente, producir discursos" (Barbosa y Da Silva, 2011, p 199).

A pesar de que se reconoce que las situaciones originadas para el proceso de modelación provienen de contextos distintos a los de la matemática, como plantea Blum y Niss (1991), este proceso invita a los alumnos a utilizar ideas, conceptos y algoritmos de las matemáticas para ser abordadas, para ello en este caso se plantea un ciclo de modelación basado en Blum y Niss (1991).

### Marco metodológico

Felmer *et al.* (2019), dan a conocer cómo se construyó la Iniciativa ARPA de acción y reflexión. Esta Iniciativa considera a la resolución de problemas como el eje articulador del proceso de enseñanza-aprendizaje y destacan las oportunidades que ofrece al estudiante para el desarrollo matemático, como la conexión de elementos matemáticos, la promoción de las habilidades de representación y aplicación, y el uso de pensamiento matemático. Ellos señalan que la Iniciativa ARPA nace con el objetivo de dar a los profesores oportunidades para experimentar en resolución de problemas, dado que un profesor sólo podrá enseñar a resolver problemas si antes ha experimentado la ansiedad y la satisfacción en la resolución de problemas por su parte.

Así es como los investigadores, diseñaron talleres de desarrollo profesional, llamados Iniciativa ARPA, basados en los principios básicos de hacer y reflexionar. "Estos talleres tienen a la resolución de problemas como eje articulador y están destinados a profesores que enseñan matemáticas, con el propósito de instalar la resolución de problemas y prácticas escolares efectivas para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de la matemática escolar" (Felmer *et al.*, 2019, p. 314). En el bloque de resolución de problemas, los participantes resuelven problemas con sus pares en grupos, con apoyo de un monitor que sólo interactúa con ellos mediante preguntas. Se considera que un grupo ha resuelto un problema cuando todos los miembros pueden explicar la solución y las estrategias usadas. Cuando un grupo resuelve el problema, el

monitor puede proporcionar un problema de extensión, hacer una nueva pregunta o dar un nuevo problema. De esta forma, cada grupo trabaja a su ritmo y la dificultad del problema es graduada por el monitor, según las habilidades de los participantes, así el problema es un desafío constante y efectivo.

El bloque de reflexión se trabaja en plenario, donde los profesores/actores reflexionan sobre su habilidad para resolver problemas, su conocimiento matemático y su aprendizaje, las estrategias usadas para resolver los problemas y las emociones que han sentido en esta tarea. También sobre cómo el monitor interactúa con ellos, cómo esta estrategia puede ser un modelo para el trabajo en aula, y cómo ellos pueden llegar a implementarlo.

Nosotros proponemos así desarrollar este taller siguiendo la estrategia ARPA para que los profesores experimenten la resolución de este problema de modelación y para que reflexionen sobre el nivel de enseñanza, las adecuaciones a su entorno escolar y la relación profesor-estudiante y estudiante-estudiante en un trabajo desarrollado en equipos.

### **Diseño taller**

El taller tiene como principal objetivo desarrollar competencias de resolución de problemas mediante un trabajo de modelación matemática y haciendo uso de herramientas tecnológicas y en equipos, con profesores que se desempeñen realizando clases de matemáticas.

Para la creación y la aplicación del taller, esta se basó en la Teoría Socio-Crítica de Barbosa Jonei, complementada con la metodología ARPA de acción y reflexión de Felmer *et al.* (2019).

La estrategia metodológica está comprendida por la resolución y discusión de forma grupal y generalización en plenario. Al comienzo de la actividad se formarán equipos de tres personas mediante una dinámica de conformación de grupos. Cada equipo resolverá el problema de optimización haciendo uso de guía y Geogebra, posteriormente un integrante de cada equipo expone sus soluciones y la metodología utilizada, finalmente los participantes del taller discuten la generalización de la solución del problema. Además, se realiza un breve análisis pedagógico y didáctico de la clase, la situación y las metodologías utilizadas.

Los tiempos en cada uno de los momentos del taller se encuentran descritos en la siguiente tabla:

**Tabla 1**

Agenda taller de Modelación Matemática para la resolución de problemas de optimización en trabajo colaborativo

| <b>Duración</b> | 110 minutos            |  |
|-----------------|------------------------|--|
| <b>Tiempo</b>   | <b>Actividad</b>       | <b>Descripción</b>   |
| 10 minutos      | Organización de grupos | Actividad introductoria al taller en el cual los participantes se agrupan de 3 personas a través de una dinámica para la conformación de equipos. En esta actividad los participantes deben identificar el lugar de trabajo mediante un acertijo matemático. |
| 30 minutos      | Resolución problema    | Los equipos resuelven problema de optimización haciendo uso de guía y GeoGebra para su presentación en plenario y la explicación de procedimientos utilizados.   |
| 30 minutos      | Plenario               | Un integrante de cada equipo expone sus soluciones y la metodología utilizada a través de GeoGebra prediseñado   |
| 20 minutos      | Generalización         | Los participantes del taller en pleno discuten la generalización de la solución del problema, de acuerdo con las soluciones presentadas anteriormente.   |
| 20 minutos      | Reflexión final        | Los participantes en pleno analizan la clase, la situación y las metodologías utilizadas.  |

Fuente: elaboración propia. 2022.

### Situación de aula

El espacio triangular de la fotografía corresponde a un triángulo rectángulo, donde los catetos miden 50 metros y 84 metros, respectivamente. Este es un espacio no edificado, el cual la junta de vecinos desea utilizar, para lo que han solicitado a diferentes constructoras que presenten proyectos que sean favorables para el sector y a su vez se utilice de la mejor manera posible el espacio. Para lo que se propone como condiciones que debe ser una construcción de base rectangular que utilice la esquina de  $90^\circ$  como vértice y otro vértice se ubique en la hipotenusa.

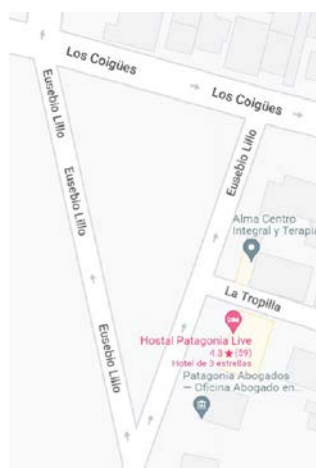


Figura 1. Imagen de mapa de un sector de la ciudad de Coyhaique extraída de Google Maps.

¿Cuáles son las dimensiones basales del edificio de base rectangular que mejor aprovecha el área disponible?

### Conclusiones y proyecciones

Considerando los resultados obtenidos de la aplicación de esta situación de aula en el trabajo de tesis de Alvarado (2021), en donde los estudiantes no son capaces de transitar por los diferentes subprocesos de modelación, debido a las principales dificultades presentadas como lo fueron el tiempo de desarrollo de la actividad, la envergadura de la actividad y de objetivos planteados en correlación con la estrechez de los tiempos definidos para el desarrollo total, además de no contar con las herramientas necesarias y previamente trabajadas que les permitirá cumplir con el objetivo de transitar por el ciclo de modelación propuesto por Blomhøj (2004). Es importante abordar esta adecuación de situación de aula, con docentes que se encuentren en formación inicial y con docentes en ejercicio de matemática, ya sea de educación media o superior, dada la estrecha conexión entre lo aprendido por los estudiantes y las habilidades desarrolladas por los docentes en su formación. Por ello la importancia de analizar dichos datos, sin el sesgo producido por el poco tiempo en marcha de las bases curriculares en Chile, ya que pudiese ser una situación particular en la formación inicial docente y una desactualización en el área de la didáctica de las matemáticas por parte de los docentes en ejercicio del país.

### Referencias y bibliografía

- Acosta G., R.P., Almeida C., O. y Acosta V., J. (2020). Enfoque integral para modelar y resolver problemas de optimización. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 33(1), 186-196.
- Alvarado, N. (2021). *Estudio de clases de modelación matemática de la función cuadrática con estudiantes de segundo año medio según el modelo de Blomhøj y Højgaard*. Tesis de Magister, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.
- Aravena, M. & Caamaño, C. (2007). *Modelización Matemática con estudiantes de secundaria de la comuna de Talca, Chile*. *Estudios Pedagógicos XXXIII*, 2, 7-25.
- Barbosa, J. C. (2008). *As discussões paralelas no ambiente de aprendizagem modelagem matemática*. *Acta Scientiae*, 10, págs. 47-58. Canoas.
- Barbosa, J. C. y Da Silva, J. (2011). Modelagem Matemática: as discussões técnicas e as experiências prévias de um grupo de alunos. *Boletim de Educação Matemática*, vol. 24, núm. 38, abril, 2011, pp. 197-218 Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho Rio Claro, Brasil
- Balcaza B., T. (2018). Investigación acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la optimización en Bachillerato, desde la perspectiva del Enfoque Ontosemiótico y de la Teoría de los Registros de Representación Semiótica (Tesis doctoral). Universidad de Jaén, España.
- Blomhøj, M. y Højgaard, T. (2003). Developing mathematical modelling competence: conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and its Applications*, 22(3), 123-139.
- Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects—State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational studies in mathematics*, 22(1), 37-68.

- Felmer, P., Perdomo-Díaz J. y Reyes, C. (2019). The ARPA Experience in Chile: Problem Solving for Teachers' Professional Development. En Liljedahl, P., Santos-Trigo, M. (Eds.), *Mathematical Problem Solving*, ICME-13 Monographs. Springer, Cham.
- Huapaya, E. (2012). *Modelación usando función cuadrática: experimentos de enseñanza con estudiantes de 5to de secundaria*. Tesis de Magister, Pontificia Universidad Católica del Perú.
- Ministerio de Educación (7 de septiembre de 2021). *Curriculum Nacional: Matemática*. Gobierno de Chile.
- Montejo-Gámez, J., Fernández-Ahumada, E. y Adamuz-Povedano, N. (2018). Modelización matemática en el proceso de resolución de problemas contextualizados. ¿Cómo surge un modelo? En Rodríguez-Muñiz, L.J., Muñiz-Rodríguez, L., Aguilar-González, A., Alonso, P., García García, F.J. y Bruno, A. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII*, 368-377, SEIEM, Gijón.
- Morales C., A., Damián M., A., Locía, E. y Contreras, M.G. (2022). Uso de Geogebra para mejorar la comprensión de la resolución de problemas de optimización en el bachillerato. *Números*, 111, 71-89.
- Moreno, A., Marín, M. y Ramírez-Uclés, R. (2021). Errores de profesores de matemáticas en formación inicial al resolver una tarea de modelización. *PNA*, 15(2), 109-136.
- Portillo-Lara, H.J., Ávila-Sandoval, M.S., Cruz-Quiñones, M.A. y López-Ruvalcaba, C. (2019). Geogebra y problemas de optimización. *Cultura Científica y Tecnológica*, 16(1), 5-11.
- Sánchez P., J.A., De la Fuente B., D. y Zamora S., A. (2020). Optimización en Bachillerato: el problema de Herón. *Números*, 104, 75-82.