XIII CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
CIAEM 2011
26 - 30 Junio, 2011
Recife, Brasil
50 años del Comité Interamericano de Educación Matemática

La semiótica y lo digital: dominios coextensivos

Luis **Moreno**-Armella
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN
México
lmorenoarmella@gmail.com

Resumen

La vida del ser humano transcurre como un proceso de inmersión creciente en el mundo sociocultural y se va transformando, a lo largo de su desarrollo, debido a la internalización de los artefactos culturales de mediación proporcionados por el entorno sociocultural, apropiándose de la lengua materna y de otros sistemas semióticos. Por ello hemos sido definidos como la especie *simbólica*. El símbolo digital vive una vida distinta a la vivida sobre el papel. Para la educación matemática esto no ha pasado inadvertido y obliga a esta disciplina a calibrar la tensión entre el papel y la pantalla, asumiendo los riesgos de la ruptura y la continuidad. Abordando el riesgo, introducimos la noción *objeto borde*. Los ejemplares, tomados del trabajo experimental con profesores-estudiantes, ilustran cómo las representaciones digitales extienden la dimensión conceptual de los objetos borde e invitan a la exploración de un terreno (casi) inédito de las matemáticas escolares.

Palabras clave: semiótica, símbolo, digital, representación, objeto borde.

1. Pensamiento simbólico y medios digitales

Cuando realizamos la multiplicación de dos números, nuestra actividad cognitiva está mediada por el sistema posicional de notación. Nos termina pareciendo de lo más natural realizar los cálculos como si el sistema de notación fuese invisible. Y en realidad, se torna invisible. Este hecho ejemplifica cómo un instrumento suministrado por la cultura, se torna, eventualmente, un instrumento cognitivo, es decir, *entra a formar parte de nuestra forma de pensar*. Pensamos la aritmética a través del sistema decimal.

Diremos que pensamos *con* un sistema semiótico cuando lo usamos como un instrumento cultural. Por ejemplo, cuando trabajamos con los números en base 2. En cambio, pensamos *a través* de un sistema semiótico cuando este sistema ha sido incorporado a nuestra cognición, como es el caso del alfabeto. Al escribir, el sistema es invisible y nuestro pensamiento fluye sin sentir la presencia de las letras. Desde luego, cuando aprendimos a escribir en nuestra infancia, el sistema alfabético no era invisible, estaba presente mientras tratábamos de escribir una palabra.

Escribíamos *con* el alfabeto. Después de haber trabajado un tiempo largo con un sistema semiótico de notación matemática, los objetos matemáticos adquieren un nivel de objetividad que con frecuencia confundimos con una existencia pre-semiótica, una existencia que precede a los sistemas de representación a nuestra disposición para hablar de dichos objetos. Es como si existieran en el sentido platónico. Podemos ilustrar ese efecto tan peculiar que se genera cuando hemos trabajado un tiempo considerable con los objetos matemáticos (siempre a través de los sistemas semióticos de representación). Para ello, recordemos el sentimiento de objetividad que sintió H. Hertz (Kline, 1980, p. 338) cuando al referirse a las ecuaciones del electromagnetismo de Maxwell exclamó:

Uno no puede escapar al sentimiento que estas ecuaciones tienen una existencia independiente y una inteligencia propia...que obtenemos de ellas mucho más que lo que originalmente pusimos...

Las tecnologías digitales transforman la naturaleza semiótica de las representaciones matemáticas. Hacen posible *otras* estrategias de apropiación del conocimiento encarnado en dichos sistemas semióticos pues al ser ejecutables, amplían la capacidad expresiva de los estudiantes.

Ernest Mach expresó ideas similares a Hertz (Kline, 1962, p.542) cuando pronunció estas palabras:

Algunas veces debe parecerle al matemático que no es en él sino en el lápiz y el papel donde realmente reside la inteligencia

El lápiz para Mach, no es ese objeto de madera de nuestra infancia sino *el acto mediado* de la escritura. Hoy en día, Mach diría que que la inteligencia reside en las representaciones digitales. Ese sentimiento de realismo inducido por el sistema semiótico aumenta cuando la representación es ejecutable. Por ejemplo, se le preguntó a un grupo de estudiantes de escuela secundaria por las relaciones posibles entre el ángulo subtendido por un arco de circunferencia y el correspondiente ángulo central. Dos comportamientos se hicieron ostensibles durante la sesión: un grupo quedó *inmovilizado* por la pregunta, aquellos que abordaron el problema con lápiz y papel. Estimamos que dicho comportamiento se debió a la imposibilidad de movilizar sus recursos expresivos. Quienes abordaron el problema en un contexto digital, pudieron medir el ángulo subtendido y observar que no varía cuando desplazamos en vértice sobre el arco complementario al que define el ángulo. Ese recurso no solamente la posibilidad de medir el ángulo sino de introducirlo en un contexto de variación modifica la percepción del estudiante y le induce a pensar que está tratando con un problema cuyo nivel de concreción es ostensible. Gradualmente, los estudiantes van incorporando el medio digital a sus estrategias de resolución de problemas y ya no solamente piensan *con* sino *a través* de dichos medios. Entonces, la preocupación de R. Thom (no es el rigor sino el significado y las formas de existencia lo que es crucial en el aprendizaje) recibe una respuesta razonable. Pero ahora, las formas de existencia, la ontología de los objetos matemáticos aparece vinculada a los sistema sde representación digitales.

Vygotsky consideraba este la transformación de las herramientas culturales en herramientas cognitivas era central para su marco conceptual y discurrió muchas veces sobre el tema. Afirmó, por ejemplo (Wertsch, 1985, p.62) que las funciones cognitivas superiores se constituyeron como tales después de un proceso de internalización desde los entornos socioculturales.

Podemos ilustrar aún más esta idea nodal con un ejemplo tomado de nuestras culturas tempranas. Los soportes externos de la memoria que poseemos hoy en día tuvieron su origen (o uno de sus orígenes) hace 30 mil años. Huesos con incisiones como los hallados en Moravia (Moreno, Hegedus & Kaput, 2008), constituyen ya un soporte externo de la memoria. Podemos interpretar este hallazgo como un ejemplo del uso de la correspondencia 1-1 entre una colección de objetos concretos (posiblemente presas de un cazador) y el conjunto de incisiones en el hueso. Dichas incisiones tienen un valor simbólico (es decir, representan algo distinto a las incisiones mismas) y reflejan un acto intencional que consiste en modificar el hueso para manipular y transportar información. Las incisiones toman el lugar de los animales cazados (o los días del ciclo lunar, por ejemplo), y con ello añaden algo crucial a las vivencias del cazador, refractándolas a través del sistema simbólico de incisiones hacia el territorio de los símbolos. El hueso con incisiones permite trascender la memoria biológica y transformarla en una memoria compartida y distribuida y se torna parte de la cotidianidad del cazador quein termina viéndola como algo *coextensivo* con su actividad.

El estudio de la historia de las matemáticas también revela la importancia de los sistemas semióticos de notación. Por ejemplo, podemos aprender cómo mediante un determinado sistema de representación se da cuenta de un tipo particular de cómputo o de una estrategia demostrativa. Al realizar esas acciones mediante un sistema digital de representación "descubrimos" que el problema original parece trivial. Pero, ¿es trivial? NO, es la respuesta. Los problemas de las matemáticas egipcias, por ejemplo, que se traducen en una simple ecuación de primer grado, hoy nos parecen triviales. Pero distaban mucho de serlo con las posibilidades semióticas de ese entonces, puesto que aquellas no suministraban un sistema de notación-acción que sí lo suministra el álgebra de hoy en día.

Los sistemas de representación van acumulando conocimiento, van refinando sus posibilidades operatorias y, su apropiación, potencia la cognición de la persona que logra hacerse de ellos. A medida que una persona acrecienta su *fluidez representacional* su conocimiento gana en objetividad y las ideas se cristalizan induciendo un sentimiento de realismo que ya hemos comentado anteriormente. Añadamos ahora que esta forma de realismo depende de los recursos interpretativos que proporciona el medio sociocultural en donde uno se desenvuelve. Esto último no puede soslayarse pues está en la base de cómo una comunidad adopta y adapta una forma específica de tecnología.

En resumen, podemos enunciar esta tesis:

Los símbolos matemáticos co-evolucionan con sus referentes matemáticos y la objetividad semiótica inducida hace viable que se les comparta en una comunidad de práctica.

2. Herramientas y artefactos

Una herramienta no es simplemente un objeto material. Mas bien, el objeto físico es la encarnación de un propósito y de un diseño. Es como *un fenotipo*, como la oextensivoexpresión material de una idea. Una herramienta es co-extensiva con una actividad. Así como el organismo y el medio se definen mutuamente, una herramienta y la actividad a que da lugar se definen mutuamente. Si la actividad cambia, la herramienta es otra. Un bisturí de cirujano puede tornarse un artefacto letal mediante un cambio de propósito.

Lo que originalmente eran prótesis para aumentar las capacidades del cuerpo (cortar, quebrar) fueron transformando el entorno y preparando el terreno para futuras interacciones entre organismos y entornos modificados. Detrás del escenario aparente, estas actividades de nuestros ancestros gradualmente transformaron su visión del mundo, que empezó a ser visto como el espacio de las intervenciones *mediadas*. Desde entonces, la actividad humana ha estado saturando el medio físico que refleja cada vez más, la imagen de la actividad humana. Esas actividades *cristalizadas en el medio* pueden ser el punto de partida de una segunda actividad dando lugar a una danza dialéctica entre el agente y la herramienta.

Herramientas incrustadas en el entorno, por ejemplo la agricultura, reflejan claramente la humanización del entorno. Hoy en día, cuando viajamos en un avión, podemos ver ciudades, campos arados, carreteras, puentes etc., vemos un mundo saturado por la actividad humana, un espejo de nosotros mismos. De modo que además de producir herramientas podemos encontrarlas en el entorno sociocultural como resultado de actividades previas. Esta observación sugiere que intentemos una clasificación debido a la amplia gama de efectos sobre el entorno humano y sobre nosotros mismos. Anteriormente hablamos de la herramienta física como un fenotipo de la herramienta previamente imaginada que existía como un modelo ideal. Esta versión inmaterial de la herramienta que corresponde a la idea vive en el territorio de la herramienta como un campo de fuerzas que da estructura y propósito para alcanzar las metas propuestas *mediante* esa herramienta. Desde luego, las metas se forman de acuerdo a valores culturales. Es de la cultura de donde toman su significado. Lo que un objeto representa para una persona no es algo intrínseco al objeto sino que es algo que se forma a partir del papel que ese objeto tiene en una red cultural, para esa persona en particular.

Pensemos en herramientas que pueden modificar nuestra cognición y nuestra visión del mundo, por ejemplo el alfabeto, el sistema decimal, las obras de arte, las teorías científicas. Hemos viajado un largo trecho desde las primeras herramientas de piedra hasta las obras de arte que transforman la visión del mundo de una comunidad. Siguiendo la clasificación de Wartofsky (1979) hablamos de *artefactos primarios* para referirnos a las herramientas materiales (a los fenotipos); llamamos *artefactos secundarios* a los *genotipos* de los artefactos primarios y finalmente *artefactos terciarios*, a aquellos como las teorías científicas, como una novela, que ayudan a crear nuevas visiones del mundo.

3. En el salón de clases

Podemos transformar un objeto euclidiano en un objeto de la geometría analítica. El resultado no es el *mismo* objeto con distinto ropaje sino un objeto genuinamente diferente...pero también es el mismo objeto — en construcción. Cada representación semiótica añade una nueva cara al poliedro-sin-fin que constituye el objeto en evolución. A medida que añadimos un sistema de representación al tiempo que el objeto evoluciona, se hace más estable, gana en cristalización, lo vemos emerger “más hecho”.

Vamos a estudiar ahora los que denominamos *objetos borde*. Ellos son encarnaciones dinámico-digitales de objetos matemáticos que se definen inicialmente dentro de un medio estático de papel y lápiz y que pueden ser explorados de modos significativos en sus refracciones digitales. Este tipo de encarnación va mucho más allá de un cambio de sistema de representación dentro del medio estático. Como hemos dicho anteriormente, una representación digital posee una cualidad ausente en el medio estático, a saber, *la ejecutabilidad*, de la representación. Esta es responsable de la clase de interacciones que el estudiante puede tener cuando las matemáticas quedan “incrustadas” en el medio digital. Por ejemplo, cuando el estudiante encuentra un objeto familiar un triángulo digamos, y arrastra un vértice el medio re-acciona produciendo un nuevo triángulo —revelando la *plasticidad* del objeto que no pierde su identidad de triángulo. Al observar este resultado, el estudiante no permanece en un estado cognitivo pasivo, sino que es estimulado a desencadenar una nueva acción generando así un proceso iterativo. En el medio digital la acción no le pertenece exclusivamente al actor/estudiante, sino que es compartida entre el actor y el medio. La exploración matemática en un medio digital está mediada por sistemas de representación activos y el conocimiento que emerge es distinto al que emerge de un medio estático. *Los objetos borde son como sondas dirigidas a un nuevo territorio matemático todavía mayormente inexplorado*.

Ofreceremos ahora algunos modelos de actividades matemáticas en medios digitales para sustanciar las ideas que hemos venido desarrollando. Se trata de situaciones ejemplares exploradas dentro de un proyecto de formación de profesores.

Ejemplar 1. Dado un triángulo ABC, ¿cómo podemos construir un triángulo DEF cuyo perímetro sea mínimo?

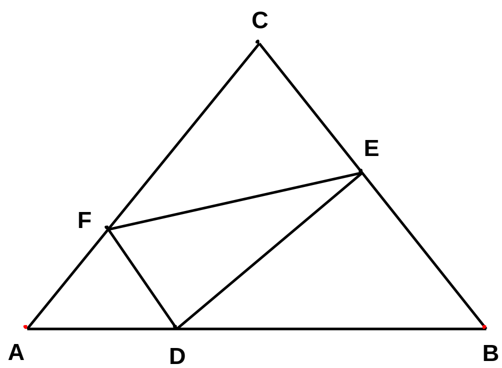

Figura 1: perímetro mínimo

Hay algunas acciones matemáticas que forman parte del entorno como es la transformación de reflexión. Reflejemos los lados DF y DE sobre los lados correspondientes AC y BC del triángulo original. Obtenemos la figura 2.

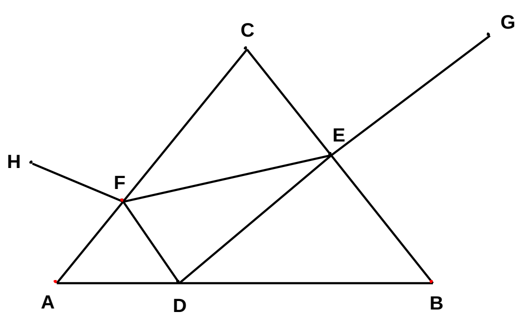

Figura 2: reflexiones

La linea quebrada HFEG ofrece una cuantificación del perímetro del triángulo inscrito DEF porque las reflexiones son isometrías. Una discusión a lo largo de estas lineas, sobre el significado de la linea quebrada, ha inducido a esclarecer que el triángulo solución (triángulo órtico) es aquel que produzca una linea quebrada...que sea un segmento de recta.

La figura 3 muestra que esto puede ocurrir. De hecho ocurre cuando D, E, y F son los pies de las alturas tomadas desde los lados AB, BC, and AC del triángulo original.

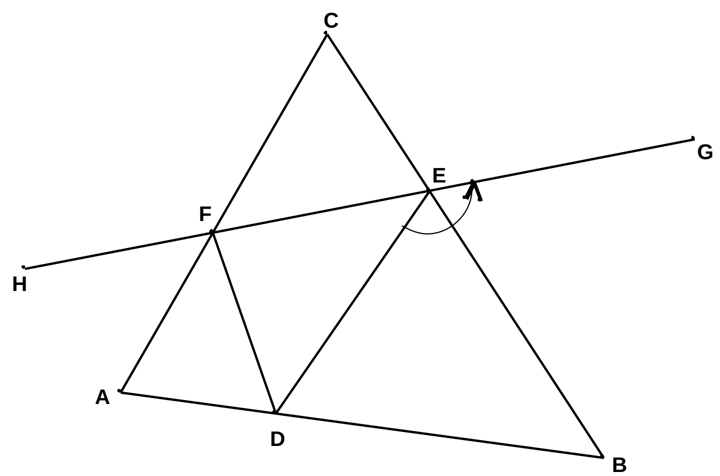

Figura 3: la solución

Si arrastramos los vértices A, B, C la respuesta del medio digital enseña que la construcción es infraestructural. Ofrecemos a continuación otra situación ejemplar, que hemos empleado a menudo y que exhibe características de la exploración que le pertenecen al entorno ejecutable.

Ejemplar 2. Dado un rectángulo y sus dos diagonales como se muestra en la figura siguiente. Se elige un punto P arbitrario. Se trata de demostrar que la suma de distancias de P a las dos diagonales es una constante.

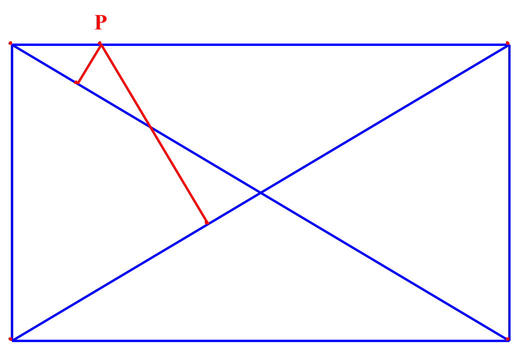

Figura 4

La versión estática del problema requiere un uso ingenioso de triángulos congruentes. Pero eso sería lo de menos. Lo de más es tratar de ver cuál es esa constante. El punto P puede arrastrarse sobre el rectángulo trazado en el medio dinámico (soporte de la ejecutabilidad de las representaciones) y al desplazarlo hasta un vértice se obtiene:

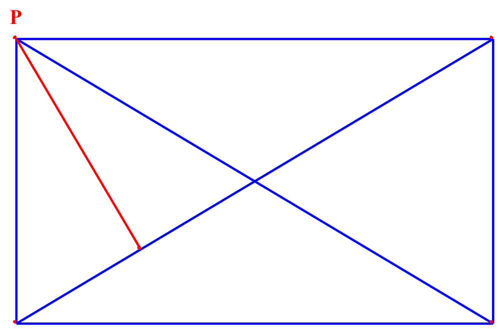

Figura 5

A partir del mundo de evidencias que abre esta co-acción, el problema toma otra ruta, muy distinta a la ruta estática.

El efecto neto de estas exploraciones se traduce en un impacto pedagógico que conduce a una consideración muy seria sobre la naturaleza de las actividades, la producción de preguntas que guíen y estimulen el descubrimiento. Estas situaciones ejemplares construídas a partir de objetos borde, están en la zona de desarrollo potencial de la geometría estática. La infraestructura representacional ofrece un andamiaje seguro que se apoya a su vez, en la estructura matemática preservada eficientemente cuando se ejecuta la representación.

Ejemplar 3. Se considera un triángulo ABC y un punto P sobre el lado AB.

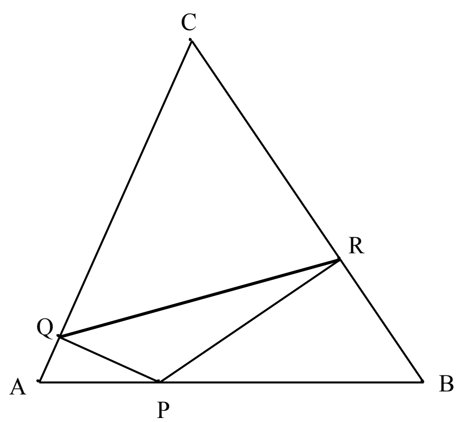

Figura 6

Desde P se trazan perpendiculares PQ y PR como se muestra en el dibujo. El problema consiste en determinar la posición de P de manera tal que el segmento QR tenga longitud mínima.

Los estudiantes-profesores a los cuales se les propuso el problema estuvieron en condiciones de desplazar (*dragging*) en punto P sobre el segmento AB para comprobar de este modo que la longitud de QR varía. Es una situación genérica de variación y optimización. Pero ahora, a diferencia de los ejemplares anteriores, introducimos una perspectiva novedosa que consiste en *medir* perceptivamente la variación mediante un sistema de coordenadas móvil que anclamos al punto P. Esto recuerda las ideas de Oresme sobre las *intensidades* de la variación. La figura siguiente insinúa el tipo de exploración a que da lugar esta nueva perspectiva:

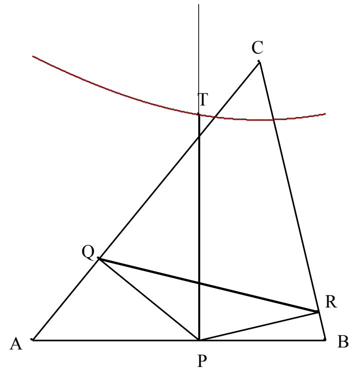

Figura 7

Se observa la trayectoria del punto T (PT tiene una longitud igual a la del segmento QR para esa posición de P). La discusión colectiva que se genera desemboca en que posición de P que resuelve el problema se obtiene cuando la linea PT coincide con la altura PC del triángulo. La *plasticidad* del medio digital hace posible variar el triángulo original y obtener instantáneamente la trayectoria de T correspondiente al nuevo triángulo. Qué ocurre si el triángulo ABC es rectángulo? Etc son preguntas que el colectivo de profesores-estudiantes se pueden plantear (y que se han planteado).

4. Reflexiones finales

Los seres humanos hemos estado saturando el entorno a través de *actividades mediadas* por artefactos. Pero los humanos no somos ni fuimos inmunes, cognitivamente hablando a este proceso: hemos estado sujetos a profundos procesos de *enculturación* (Donald, 2001) a lo largo del tiempo.

El conocimiento depende, en todos los casos, de la mediación de los sistemas semióticos de representación. Los ejemplos más tempranos de huesos con incisiones ilustran este aserto. En el caso de las matemáticas, nos permite llegar a la conclusión de que no existen representaciones intrínsecas de los mismos, no hay pues objetos matemáticos al margen de una actividad semiótica. Aquí es importante distinguir entre el problema epistemológico y el didáctico. En el primer caso, el objeto matemático “aparece” cuando producimos una representación que nos permite hablar de una experiencia en trance de ser matematizada. Por ejemplo, cundo los astrónomos antiguos produjeron tablas con los datos relativos a las posiciones de un planeta estuvieron en posibilidad de discutir la matemática numérica de las órbitas. Más adelante, cuando aparece una segunda forma de representación (la órbita geométrica, por ejemplo) la primera representación se asimila a la segunda, se *refracta* en la segunda, dando lugar a un nuevo objeto. De este modo evoluciona el objeto sometido a un proceso iterativo de representaciones. *El objeto siempre está en construcción* y su futuro depende de las actividades que vayamos realizando en su zona de desarrollo potencial. Otro ejemplo notable lo constituye la geometría analítica. El plano cartesiano sintetiza de una manera que es más rica que las componentes sumadas, las perspectivas algebraica y geométrica. Las realizaciones son resultado de un proceso de cristalización transitorio pero estable.

Ahora bien, desde la perspectiva didáctica, quien aprende está sometido a la presión de un objeto frente a él y su problema consiste en integrar las distintas perspectivas que ofrecen los sistemas de representación en juego. El sentimiento de que algo está allí, debajo de las representaciones, conduce a una *ilusión de realismo* como si las representaciones tan solo describieran una realidad que las pre-existe, como si sólo fueran retratos. Tal vez eso ayude a explicar el platonismo matemático. Esa es la ilusión que sintió Hertz ante las ecuaciones de Maxwell. Identificamos la objetividad con los productos cristalizados de una actividad semiótica intencional, compartida socialmente. La objetividad proviene de la actividad semiótica. La objetividad no es intrínseca a un objeto que no podría existir antes de dicha actividad, antes de una representación.

Concluyamos ubicando mediante una pregunta nuestro interés hacia el futuro:

¿Qué ocurre cuando introducimos sistemas digitales de representación?

Como ya hemos mostrado con las situaciones ejemplares, ocurre una refracción del objeto matemático en el medio digital con las características que le otorga la *ejecutabilidad* del sistema de representación. La ejecutabilidad es el motor de la co-acción entre el aprendiz y el medio que responde a sus acciones respetando el universo interno, grabado en el procesador. La co-acción es más que la iteración de las interacciones entre el usuario y el entorno; la co-acción es un genuino proceso dialéctico puesto en marcha gracias a la ejecutabilidad y que abre una zona nueva de realización del objeto matemático actual, transformándolo en otro.

Estas consideraciones tienen implicaciones epistemológicas y en consecuencia, tienen implicaciones educativas pues *la matemática educativa es una epistemología aplicada*. Al refractar el objeto matemático en el medio digital, aparecen posibilidades nuevas para la justificación y la prueba. De ninguna forma insinuamos una sustitución abrupta de la epistemología tradicional, sino, mas bien, subrayamos que estamos entrando a una nueva fase de exploración en la cual los objetos borde están colocados en una zona de desarrollo que el efecto cultural proyectará realizaciones tal vez inesperadas.

Tenemos la profunda convicción de que la educación matemática no podrá eludir estas circunstancias.

Referencias

Deacon, T. (1997). The symbolic species. New York: Norton.

Donald, M. (1993). Origins of the Modern Mind. Cambridge, Harvard U.Press

Donald, M. (2001). A Mind So Rare. New York, Norton and company.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. Educational Studies in mathematics, 61, 1-2.

Flegg, G. (1983). Numbers: Their history and meaning. New York: Dover Publications

Kline, M. (1962). Mathematics; a Cultural approach. Addison-Wesley

Kline, M. (1980). Mathematics, the loss of certainty. New York, Oxford U.Press.

Valsiner & van der Veer (2005). On the social nature of human cognition. In H. Daniels (ed). 2nd Edn. An Introduction to Vygotsky. London, Routledge.

Vygotsky, L. (1997). The History of the Development of Higher Mental Functions. In R. Rieber (ed.), Collected Works. Plenum Press: New York, vol. 4.

Wartofsky, M. (1979). Models, Representation and the scientific understanding. Dordrecht, Reidel.

Wertsch, J. (1985). Vygotsky and the social formation of mind. Cambridge, MA: Harvard U. Press