XIII CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
CIAEM 2011
26 - 30 Junio, 2011
Recife, Brasil
50 años del Comité Interamericano de Educación Matemática

El Papel de la Resolución de Problemas en el Desarrollo del Conocimiento Matemático de los Profesores para la Enseñanza

Manuel **Santos**-Trigo
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Cinvestav-IPN, México
Mexico
msantos@cinvestav.mx

Resumen

¿Qué conocimiento matemático para la enseñanza se deben promover en los programas de formación y desarrollo profesional de profesores? En la discusión de esta pregunta se esbozan temas y líneas de reflexión que promueven actividades de resolución de problemas como aspectos cruciales en la educación de los profesores de matemáticas. Se destaca la importancia de que los profesores en su formación se apropien y valoren un método inquisitivo para interactuar con los conceptos, ideas y en la resolución de problemas matemáticos. En particular, el empleo de diversas herramientas computacionales se identifica como esencial en los programas de formación.

Palabras clave: Resolución de problemas, programas de formación de profesores, uso de herramientas computacionales.

Antecedentes

La educación o formación y desarrollo profesional de los profesores de matemáticas son aspectos fundamentales que inciden directamente en las formas en que los profesores conceptualizan, estructuran y promueven el aprendizaje de los estudiantes. Sin embargo existe una diversidad, en el ámbito internacional; sobre qué contenidos y formas de implementar los programas de formación y desarrollo profesional de los profesores. A pesar de esa variedad de enfoques y trayectorias de los programas, existe un pleno reconocimiento sobre la importancia y papel del profesor en la implementación de las reformas del currículum y en la creación de escenarios de enseñanza que promuevan la construcción del conocimiento matemático de los estudiantes. Tatto, Lerman & Novotna (2011) mencionan que se sabe poco acerca de las oportunidades para aprender matemáticas y pedagogía que se les ofrecen a los futuros profesores y a los profesores en ejercicio en el mundo y acerca de la efectividad de esas oportunidades. Afirman que "…la comparación de los efectos en la preparación de los profesores en el ámbito internacional es importante en este momento caracterizado por el clima de las reformas en la educación" (p. 314). ¿Cómo se construye un programa de formación de profesores de matemáticas? ¿Quién debe participar y cuál es la ruta para formarlos? ¿Qué contenidos matemáticas y didácticos se deben incluir en esos programas? ¿Qué nivel de profundidad del conocimiento matemático deben desarrollar en su formación? ¿Cómo y quién debe establecer e implementar programas de desarrollo profesional para los profesores en servicio? ¿Qué objetivos deben perseguir en esos programas? ¿Cómo evaluar el desempeño de los profesores? Estas son algunas preguntas que resultan de interés en el diseño de programas de formación y desarrollo profesional de los profesores de matemáticas. En la discusión conviene enfocar la atención hacia el conocimiento matemático de los profesores para la enseñanza que les permita tomar decisiones sustentadas alrededor de sus prácticas profesionales. Este conocimiento incluye un conocimiento sólido de los contenidos y procesos del pensamiento matemático. Además, un conocimiento didáctico que le permita identificar los conceptos fundamentales del currículum, establecer metas de aprendizaje, desarrollar diversas maneras de evaluarlas, seleccionar actividades pertinentes de enseñanza, y analizar el proceso que muestren los estudiantes en sus experiencias de aprendizaje.

Conocimiento para la enseñanza

El desarrollo notable de diversas disciplinas y los avances de la tecnología demandan examinar y discutir las formas o modelos de preparación de los profesores con la intención de proponer programas de formación que respondan a las necesidades de la sociedad en su conjunto. Tatto, (2010) identifica un conjunto de eventos asociados con el ciclo profesional de los profesores. Comienzan con el interés de ser profesor y buscan y se incorporan a los programas de formación. Los programas dependen de las características del sistema educacional del país. Ya en las aulas, se espera que el conocimiento que adquirió durante su formación sea transferido en un conocimiento para la enseñanza. Este ciclo no necesariamente produce una formación en los profesores que promueva y logre una construcción robusta del conocimiento matemático de los estudiantes. ¿Qué tipos de reformas se deben contemplar en la formación y desarrollo profesional de los profesores? Se reconoce, que los profesores de matemáticas, que son los que propician condiciones y proponen actividades de aprendizaje para los estudiantes, deben no solamente poseer una formación sólida en matemáticas; sino también deben poder interpretar y orientar el proceso de construcción y aprendizaje de los estudiantes. Además, los profesores mismos deben mostrar diversas maneras de razonamiento y capacidades de resolución de problemas matemáticos. Papick (2011) afirma que "los profesores de matemáticas deben comprender profundamente las ideas matemáticas (conceptos, procedimientos, habilidades de razonamiento) que son centrales en los cursos o grados que estarán enseñando y ser capaz de comunicar estas ideas en una manera apropiada al desarrollo [cognitivo] del alumno" (p. 389). ¿Qué significa que los profesores tengan un conocimiento sólido o robusto de las matemáticas? ¿Qué conocimiento o contenido matemático y a qué profundidad deben dominar los profesores de matemáticas del nivel básico o preuniversitario? ¿Cómo los profesores pueden construir un pensamiento sólido o profundo de la disciplina?

Es evidente que los profesores de matemáticas deben comprender y utilizar los conceptos fundamentales que pretenden enseñar; sin embargo, es necesario también identificar las rutas que puedan seguir para desarrollar un conocimiento robusto de la disciplina. En la resolución de problemas no rutinarios es necesario que los profesores discutan y valoren la importancia de examinar y explorar el enunciado del problema desde diversos ángulos con la intención de discutir su sentido y racionalidad. Esta discusión resulta crucial en la selección de recursos y conceptos o conjunto de resultados necesarios para resolverlos de manera eficiente (Polya, 1945). En este proceso es importante que el profesor realice una búsqueda de conexiones entre los métodos de solución y su aplicación en otros problemas, establezca posibles extensiones y contraste varias formas de resolución.

Un Ejemplo de actividad o problema

Para comenzar a esbozar aspectos relacionados con el pensamiento matemático, el razonamiento, el hábito de la disertación y la exploración de diversas alternativas de solución, todo ello importante en la formación del profesor, consideremos el siguiente problema:

Supongamos que hay 1024 jugadores de tenis en un torneo que se jugará con el sistema de eliminación simple (jugador que pierda se elimina del torneo). ¿Cuántos partidos se deben jugar para determinar el campeón del torneo?

Se sustenta que el profesor debe conceptualizar un problema o el entendimiento de un concepto matemático como una oportunidad involucrarse en un proceso inquisitivo que le permita pensar diversas maneras de cómo representar, explorar, resolver y extender el problema inicial. En este ejemplo, la reflexión puede iniciarse con la discusión sobre la importancia del número de jugadores y la regla de eliminación. En una lectura superficial pudiera parecer que no hay dificultad para comprender la regla de eliminación. Pero una pregunta que nos hará reflexionar sobre ella es ¿cuántos partidos jugará el triunfador?

Podemos imaginar diversas maneras de llevar a cabo el torneo, por ejemplo alguien puede pensar que una manera es hacer una primera ronda de 512 juegos, después una de 256, etcétera, hasta llegar a la ronda final que consistirá de un partido, de donde saldrá el triunfador. Una segunda forma de organizar el torneo consiste en numerar a los jugadores del 1 al 1024. La eliminación se llevará a cabo enfrentando a los dos primeros jugadores, el ganador de ambos se enfrenta al tercero, ahora el ganador se enfrenta al cuarto y así sucesivamente. Una tercera forma consiste en formar grupos de jugadores para obtener un ganador de cada grupo, por ejemplo podemos formar 32 grupos cada grupo con 32 jugadores. De cada uno de estos grupos se elige un ganador mediante cualquier proceso de eliminación simple. Con esto obtendremos 32 ganadores y a ellos se aplica un proceso de eliminación simple. El proceso de eliminación simple que se aplique al nuevo grupo de 32 jugadores puede ser el empleado para cada uno de los 32 grupos originales, pero también puede ser diferente, por ejemplo puede consistir en la formación de grupos más pequeños, para obtener finalmente un único grupo de dos jugadores que disputarán el partido final de donde surgirá el campeón.

Si aplicamos la primera forma de eliminación simple, podemos concluir que el número de partidos para determinar el ganador es:

$$512+256+128+64+32+16+8+4+2+1=1023$$

Para obtener el resultado de esta sumatoria, podemos acudir a una calculadora o bien aplicar, la fórmula para una suma geométrica:

$$1+r+r^2+\cdots+r^n=\frac{r^{n+1}-1}{r-1}$$

Esta fórmula puede dar lugar a una discusión sobre su origen, validez y a una justificación de que vale para todo natural n y todo real $r\neq 1$. En este caso $r=2$ y $n=9$, así que tenemos

$512+256+\cdots+2+1=2^9+2^8+\cdots+2+1=2^{10}-1=1023$.

Obsérvese que esta forma de organizar los partidos del torneo fue posible debido a que el número de participantes es una potencia de 2: $1024=2^{10}$.

Si aplicamos la segunda forma de organización de los partidos del torneo, se obtiene un ganador al enfrentar el jugador 1 con el 2. Este ganador en un segundo partido se disputa su permanencia con el jugador 3, en un tercer partido entra a jugar el 4, etc. De aquí podemos concluir que mediante este proceso de eliminación simple se juegan 1023 partidos, resultado que coincide con el antes obtenido. Una pregunta que nos podemos hacer ¿todos los procesos de eliminación simple conducen al mismo resultado? Una observación importante es que para esta segunda organización de los partidos no fue necesario que el número de participantes fuese una potencia de 2, la estrategia de conteo es aplicable a cualquier número de jugadores, ni siquiera se requiere que sea un número par. Así que estamos en posibilidades de generalizar el problema a partir de la estrategia de solución.

Otra estrategia para contar el número de partidos es razonando de la siguiente manera: de los 1024 jugadores inscritos en el torneo, solamente habrá al final un ganador, el campeón y por lo tanto quedarán en el camino 1023 perdedores. Cada perdedor se elimina después de perder exactamente un partido, algunos jugadores habrán ganado algunos partidos, pero estos ya están contabilizados al considerar a los perdedores correspondientes, por lo tanto deben jugar 1023 juegos para determinar al campeón. Como en el caso anterior, en este razonamiento es irrelevante el número de jugadores, podemos aplicarlo a cualquier número de jugadores. Esta estrategia de conteo es muy elegante y casi no requiere operaciones aritméticas, lo valioso de este proceso de solución es el razonamiento mismo, más que la herramienta matemática empleada. La forma de razonamiento que se ilustran en este acercamiento al problema son elementos fundamentales que se deben promover en la formación de los profesores. En particular, concebir un problema como una oportunidad de pensar la situación o enunciado desde diversas perspectivas que demanden la utilización de diversos recursos, conceptos y hábitos del pensamiento matemático.

La importancia del conocimiento didáctico

Desafortunadamente muchos estudiantes exhiben serias dificultades al intentar resolver problemas que requieren recursos ya estudiados previamente. Por ejemplo, Mason, Burton y Stacey (1982) reportan que estudiantes que habían terminado estudios de bachillerato no sabían qué oferta resulta más conveniente en una determinada compra: “si quitar el 20% de descuento de un producto y después agregarle el 15% del impuesto; o pagar primero el impuesto y después quitar el descuento”. En los programas de formación de los profesores el conocimiento de las dificultades de los estudiantes y las formas de superarlas son aspectos de la agenda académica que los profesores deben abordar en sus actividades de formación.

Todo matemático sabe que el empleo de los conocimientos matemáticos en la resolución de problemas demanda de un proceso de reflexión que va más allá de un cierto dominio teórico. Implica reconocer la estructura profunda de los conceptos y resulta muchas veces un proceso difícil para los estudiantes. Por ejemplo, estudiantes universitarios que habían cursado exitosamente un curso de cálculo, mostraron serias dificultades al resolver problemas no rutinarios (un ejemplo de esos problemas fue: ¿tiene $x^{21}+x^{19}-x^{-1}+2=0$ alguna raíz entre -1 y 0? ¿Por qué?) donde aparentemente sólo se empleaban los conceptos que ya habían estudiado previamente (Selden, Selden & Mason, 1994). La mayoría de los estudiantes no reconoció que los recursos estudiados en el curso de cálculo le ayudaban a responder esta pregunta. Es evidente que no es suficiente conocer la herramienta matemática que uno necesita para resolver un problema, sino que hay cuándo y cómo aplicarla, resolver problemas prototipo, además de desarrollar la capacidad de análisis y razonamiento.

En términos del conocimiento didáctico que los profesores deben dominar se incluye establecer dinámicas de interacción entre los estudiantes que fomenten su participación activa en los procesos de resolución de problemas. Aquí resulta importante que los estudiantes comuniquen o expresen sus ideas y exhiban sus formas de pensar en los procesos de solución. El profesor debe valorar y guiar a los estudiantes hacia la presentación de argumentos basados en el razonamiento matemático. Adler y Davis (2006) argumentan que los profesores deben orientar a los estudiantes en el desarrollo de recursos e ideas consistentes con la práctica matemática. Esto incluye señalar cuando los comentarios o respuestas a los problemas que exhiban los estudiantes incluyan errores o limitaciones matemáticas. Adler y Davis Ilustra algunas respuestas que los estudiantes escriben al resolver la ecuación $x^2 – 2x = -1$:

1. estudiante 1: x = 1 porque si $x^2 – 2x = -1$, entonces $x^2 = 2x -1$ y $x = \sqrt{2x-1}$
   x no puede ser 0 porque se tendría $0 = \sqrt{-1}$
   x no puede ser negativa porque se tendría la raíz cuadrada de un negativo
   x=1 funciona porque tenemos 1 = 1 y ningún otro número mayor que uno cumple.
2. estudiante 2: x = 1 porque si $x^2 - 2x = 1$, entonces $x(x-2) = -1$ y así x = -1 o x -2 = -1, lo que nos lleva a que x = 1 (porque x = -1 no es cierto)
3. x = 1 porque si $x^2 - 2x = 1$, entonces $x^2 - 2x - 1 = 0$ y esto se factoriza como $(x-1)(x-1) = 0$; y así x = 1, etc.

Así, el conocimiento didáctico de los profesores debe incluir recursos que les permita explicar a sus estudiantes caminos y formas apropiadas de utilizar conceptos y representaciones matemáticas. Este conocimiento es un vehículo que les puede ayudar a identificar limitaciones y reconocer las ventajas de examinar sus propias respuestas desde diversas perspectivas. De manera similar, Papick (2011) afirma que el conocimiento matemático para la enseñanza debe preparar a los profesores para que respondan de manera sustentada una serie de preguntas que los estudiantes enfrentan en sus experiencias de aprendizaje. Algunas de esas preguntas incluyen:

1. Mi profesor del curso del año pasado me dijo que lo que yo haga de un lado de una ecuación también lo debo hacer del otro lado para mantener la igualdad. No entiendo que hago mal al sumar 1 al numerador de ambas fracciones en la igualdad $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ y así obtener $\frac{2}{2} = \frac{3}{4}$.
2. ¿Por qué el libro dice que un polinomio $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$ si y sólo si cada $a_i = 0$, y después dice que $2x^2 + 5x + 3 = 0$?
3. En la tarea se nos pide encontrar el siguiente término en la lista de números 3, 5, 7, …? John dice que la respuesta es 9 (pensó en los números impares), yo digo que la respuesta es 11 (pensé en los primos), y María dice que la respuesta es 3 (pensó en el patrón

periódico). ¿Quién tiene la razón? etc.

Papick (2011) además establece que los profesores deben estar preparados para: evaluar el aprendizaje de los estudiantes a través de una variedad de métodos y tomar decisiones curriculares apropiadas (seleccionar e implementar un currículum), comprender el contenido matemático y comunicar las metas del aprendizaje de la disciplina a los padres, autoridades, etc. Es decir, se intenta que el profesor construya y estructure un marco que sustente sus prácticas de enseñanza que le permita explicar y responder diversas situaciones auténticas que emerjan durante el desarrollo de la enseñanza.

Sobre el papel de la resolución de problemas en la formación de los profesores

Los profesores de matemáticas necesitan desarrollar cierta sofisticación y dominio del contenido matemático que les permita seleccionar, organizar, estructurar e implementar actividades de enseñanza. Deben ser capaces de analizar, interpretar y evaluar las diversas maneras en que el estudiante construye el conocimiento matemático. ¿Cómo se adquiere esa sofisticación matemática? ¿Qué significa que un profesor o investigador en educación matemática domine ciertos contenidos matemáticos?

El conocimiento matemático que se necesita para la enseñanza (e investigación) no es una versión ligera de las matemáticas formales, la educación matemática es un área seria que demanda un arduo trabajo matemático (Davis y Smith, 2006).

Así, el conocimiento matemático para la enseñanza y la investigación en educación matemática debe entonces incluir:

1. Un claro dominio no solamente del contenido que se enseña; sino también el conocimiento de un contexto más amplio para establecer conexiones entre el material a enseñar y otros contenidos matemáticos
2. Una comprensión de la forma en que el aprendizaje de las matemáticas se desarrolla y la variación en los acercamientos sobre el desarrollo cognitivo del pensamiento matemático
3. Un dominio de las estrategias de enseñanza que ayuden al desarrollo del aprendizaje matemático de los estudiantes.

¿Por qué es importante caracterizar los rasgos del pensamiento matemático? ¿Cómo se relaciona el pensamiento matemático con las metas y objetivos de la educación matemática? La discusión de este tipo de preguntas genera y explica una visión de las matemáticas y lo que significa aprenderlas o ser competente en su estudio. Por ejemplo, durante el siglo XX se identifican varias reformas en la educación matemática en respuesta a los cambios en la sociedad y en la escuela. Así, durante la primera mitad del siglo XX el éxito en el estudio de las matemáticas hasta el nivel secundaria se asociaba con el empleo de procedimientos de cálculos aritméticos y el manejo fluido de las operaciones básicas. Después durante el período 1950-1960 la reforma de la matemática moderna caracterizaba el aprendizaje de las matemáticas en términos de la comprensión de las estructuras matemáticas e ideas unificadoras de la disciplina como son los conjuntos. Posteriormente hubo otros movimientos en la década de los 70s que enfatizaba otra vez el regreso al estudio de las operaciones básicas y el uso de algoritmos. Esta propuesta fue ampliamente cuestionada ya que los estudiantes memorizaban procedimientos sin comprender el significado de los resultados ni por qué utilizaban eso procedimientos. A partir de los 80s se genera un movimiento universal que asocia el estudio de las matemáticas con la resolución de problemas (Santos, 2007). En esta propuesta se relaciona el aprendizaje de la disciplina con la importancia de que los estudiantes desarrollen formas de pensar consistentes con el quehacer o la práctica del conocimiento matemático. Esta forma de pensar incluye no solamente el desarrollo de hábitos propios de la disciplina, sino también recursos y habilidades para comprender conceptos y resolver problemas matemáticos. De manera general, ser competente en el estudio de las matemáticas implica que el estudiante desarrolle:

1. Una comprensión conceptual del conocimiento matemático que se expresa en términos de conexiones entre las ideas, conceptos y operaciones entre relaciones (NCTM, 2000). Por ejemplo, un acercamiento conceptual en el estudio de la derivada implica que el estudiante establezca conexiones entre los diferentes significados asociados a este concepto, es decir, entre el significado geométrico, la definición formal, razón de cambio, velocidad instantánea y por supuesto el cálculo de derivadas.
2. Una fluidez operativa o procedimental donde el estudiante desarrolle estrategias y habilidades para desarrollar, calcular operaciones y, aplicar reglas de una manera flexible, apropiada y eficiente.
3. Un hábito inquisitivo que le permita formular, representar y hacer disertaciones al resolver problemas matemáticos. Es decir, el estudiante constantemente se debe plantear preguntas que lo lleven a la búsqueda de relaciones o conjeturas y formas de representarlas que permitan explorarlas de manera sistemática.
4. Capacidad de razonamiento donde el estudiante valore la importancia de sustentar o rechazar relaciones o conjeturas matemáticas a partir del empleo de diversos tipos de argumentos, incluyendo los formales y el uso de contraejemplos,
5. Una inclinación hacia el estudio de las matemáticas que le permita valorarla como una disciplina sensible, útil y necesaria en la toma de decisiones en esta sociedad.
6. Una serie de hábitos que deben ser parte de la cultura en el salón de clase (Cuoco, 1996). Entre otros, la búsqueda de patrones y relaciones, consideraciones de casos especiales, formulación de conjeturas, identificación de estructuras, evaluación de los procesos de solución, También debe establecer conexiones, justificar o validar soluciones, refinar argumentos, generalizar soluciones y comunicar resultados.

Los seis puntos mencionados no son entidades separadas sino constituyen un marco integrado que puede guiar la formación y el desarrollo profesional del profesor.

Sobre el uso de las herramientas digitales para el aprendizaje

Otra componente esencial en el desarrollo del pensamiento matemático se relaciona con el uso de diversas herramientas digitales en las actividades de aprendizaje y resolución de problemas. Hay diversas investigaciones sobre diferentes tipos de software relacionados con el aprendizaje de las matemáticas. Los diferentes tipos de software van desde programas de matemáticas para uso profesional y educativo como son Mathematica, Maple, Derive, software de geometría dinámica hasta sitios en línea (internet) de libre acceso como es www.wolframalpha.com.

Veamos un ejemplo con el uso de un software dinámico. Se traza la recta AB y un círculo con centro en A y radio r menor que la longitud el segmento $\overline{AB}$. Sobre el círculo se selecciona un punto P y se traza la recta PA. Sobre esta misma recta se selecciona un punto C y se traza la recta CB. Al mover el punto P alrededor de la circunferencia se obtiene una familia de triángulos. Es decir con la herramienta se construye una representación dinámica del triángulo (Figura 1).

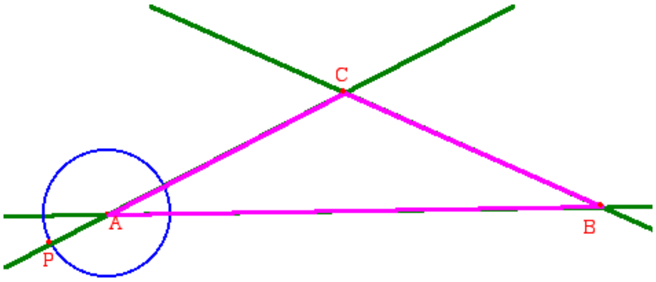

Figura 1. Representación dinámica de un triángulo

En este modelo dinámico ahora se traza la mediatriz del lado BC y se observa que esta corta a la recta AC en un punto Q. ¿Cuál es el lugar geométrico del punto Q cuando el punto P se mueve alrededor del círculo? Con la ayuda de la herramienta se obtiene lo siguiente:

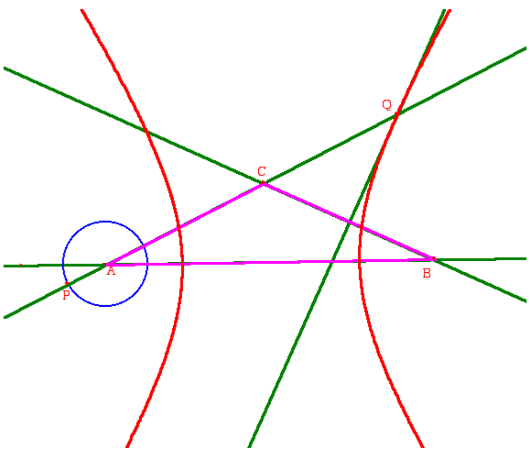

Figura 1 b. ¿Cuál es el lugar geométrico del punto Q cuando el punto P se mueve alrededor del círculo?

El lugar geométrico que se genera parece ser una hipérbola; sin embargo es importante sustentar esta conjetura que surge de la figura generada por el software. En el intento por demostrar que efectivamente se trata de una hipérbola, hemos de elegir dos puntos que serán los focos de la hipérbola. Los puntos naturales para ser candidatos a los focos son A y B. Ahora, con la misma herramienta situemos un punto R sobre el lugar geométrico. Tratemos de verificar si Q y R satisfacen la definición de hipérbola, considerando los puntos A y B como focos. Usando el mismo software se observa que para posiciones distintas de Q y R se cumple la relación algebraica que define una hipérbola (Figura 2).

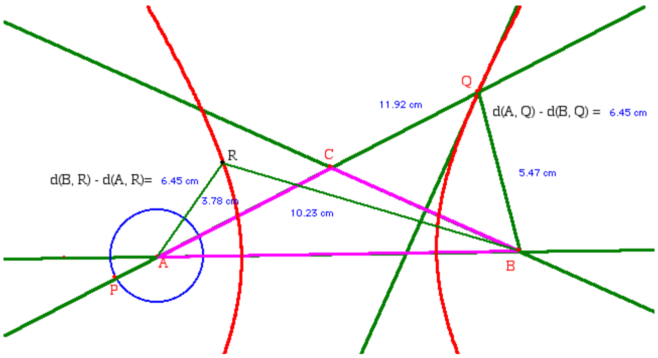

Figura 2. Se observa que al mover el punto P sobre el lugar geométrico, el punto cumple con la definición de hipérbola (asumiendo los puntos A y B son los focos).

Pero esto que observamos no podemos considerarlo una prueba de que efectivamente se trata de una hipérbola. Debemos de reconocer que el software trabaja con aproximaciones (truncamientos o redondeos) por lo que no podemos hacer la afirmación con certeza. La prueba requiere de consideraciones y razonamientos geométricos. Necesitamos un argumento contundente.

¿Qué ocurre ahora si el punto A se acera o se aleja del punto B? La Figura 3 muestra un caso en el que el lugar geométrico se asemeja a una elipse. Nuevamente hemos de sustentar la conjetura de que se trata de una cónica, en este caso una elipse..

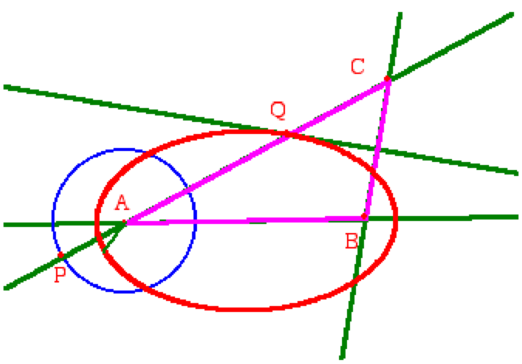

Figura 3. Al mover el punto A se observa que el lugar geométrico se convierte en una elipse.

El uso de las herramientas computacionales ofrece una oportunidad para representar y explorar objetos o configuraciones geométricas como un camino para establecer conexiones y generar o construir relaciones matemáticas. Pero estas relaciones habrán de sustentarse con razonamientos o argumentos matemáticos o geométricos. Así, los programas de formación y desarrollo profesional de los profesores deben incluir el uso sistemático de diversas herramientas digitales y caracterizar las formas de razonamiento que emergen en las experiencias de resolución de problemas.

Sobre la agenda académica de la formación y desarrollo profesional de los profesores desde la resolución de problemas.

Se esbozan temas y preguntas relevantes que un programa de formación y desarrollo profesional de profesores deben considerar en las actividades de resolución de problemas.

1. Sobre los aspectos relacionados con la resolución de problemas y la construcción del

pensamiento matemático del estudiante. Aquí algunas preguntas importantes incluyen:

a. ¿Qué actividades de resolución de problemas ayudan a los profesores a desarrollar y construir el conocimiento matemático para la enseñanza?
b. ¿Qué distingue o cómo se caracteriza el pensamiento matemático que deben exhibir los profesores en sus experiencias de resolución de problemas y diseño de actividades para la enseñanza?
c. ¿Qué tipo de problemas favorecen la construcción del conocimiento matemático de los estudiantes?
d. ¿Cómo se explica la construcción o desarrollo de un conocimiento nuevo en los estudiantes?

2. Sobre el currículum matemático y la enseñanza
   a. ¿Cómo se diseña y estructura una propuesta de currículum?
   b. ¿Qué contenidos y procesos del pensamiento matemático se deben incluir en la propuesta?
   c. ¿Qué escenarios de enseñanza promueven el desarrollo o construcción del conocimiento de los estudiantes?
   d. ¿Cómo se evalúa el aprendizaje de los estudiantes?
3. Sobre el uso de las herramientas computacionales
   a. ¿Cómo se caracteriza el proceso de apropiación de una herramienta para convertirla en un instrumento para comprender conceptos y resolver problemas?
   b. ¿Cuál es el papel del empleo de distintas herramientas en la comprensión de ideas y la resolución de problemas?
   c. ¿ Qué formas de razonamiento se manifiestan en la resolución de problemas cuando utilizan sistemáticamente diversas herramientas en los procesos de solución?
   d. ¿Cómo se evalúa la pertinencia de un instrumento?

Un resultado importante que emerge de la investigación en educación matemática es el reconocimiento de que el conocimiento matemático y para la enseñanza se construye bajo la participación activa de los profesores en diversas actividades de resolución de problemas (Schoenfeld, 1985). Además, de que la construcción se basa en los conocimientos y recursos que los sujetos han aprendido en sus experiencias previas de aprendizaje. En consecuencia, muchos de los métodos utilizados en la resolución de problemas para promover la reflexión y fomentar el aprendizaje incluyen el trabajo en grupos pequeños, que participen en discusiones con toda la clase y en la resolución de problemas a través de entrevistas estructuradas. Estas formas de estructurar las actividades de aprendizaje han aportado información valiosa relacionada con la evaluación del aprovechamiento o competencias matemáticas de los estudiantes. Además, los mismos problemas que se han utilizado en los programas de investigación se han convertido en recursos importantes para los profesores de matemáticas en la promoción o construcción del pensamiento matemático de sus estudiantes.

Conclusiones

Resulta necesario que matemáticos, educadores y profesores trabajen conjuntamente en los programas de formación y desarrollo profesional de los profesores que realmente reflejen la esencia de lo que significa aprender la disciplina. En particular, lo que interesa es que los profesores desarrollen una forma de pensar y disposición hacia el estudio de las matemáticas donde exhiban distintas formas de representar fenómenos, identifiquen relaciones y patrones, formulen conjeturas, justifiquen y comuniquen resultados. En este sentido, es importante estructurar actividades en términos de secuencias de problemas donde se reflejen los aspectos inherentes que transforman las asignaturas tradicionales en líneas de pensamiento numérico, algebraico, geométrico y estadístico. Así, el entendimiento o comprensión de las ideas matemáticas no es un proceso final; sino dinámico que se va robusteciendo en función de la necesidad de responder y resolver series de cuestionamientos que emerjan dentro y fuera de la propia comunidad de aprendizaje. , un aspecto crucial en las agendas de resolución de problemas es la interacción y discusión abierta entre los grupos de investigación sobre los aspectos comunes y principios o fundamentos que distinguen cada uno de los programas. En la resolución de problemas se reconoce también que pueden existir caminos distintos para promover el desarrollo del pensamiento matemático; sin embargo, todos esos caminos coinciden en reconocer la relevancia de conceptualizar la disciplina en términos de dilemas o preguntas que en este caso los profesores deben necesitan responder y discutir en términos de recursos matemáticos. En este proceso, los profesores desarrollan el hábito inquisitivo que les permita reflexionar constantemente de manera profunda sobre las diversas maneras de representar y explorar las ideas matemáticas. Es decir, construyen, desarrollan, refinan, o transforman sus formas de comprender y resolver problemas como resultado de formular preguntas relevantes y responderlas con el uso de distintos medios, incluyendo las herramientas computacionales. En este contexto, los acercamientos iniciales en la resolución de problemas pueden ser incoherentes o limitados, pero éstos se refinan o mejoran cuando los mismos profesores presentan y discuten de manera abierta sus ideas dentro de una comunidad profesional de aprendizaje que valora y promueve el cuestionamiento matemático o método inquisitivo. Además, resulta relevante establecer una agenda académica para la actualización de los profesores en servicio así como la educación y formación de los nuevos profesores que atienda su formación sólida en matemáticas y que resalte las actividades de aprendizaje que se deben promover en el salón de clase (Santos, 2007).. El uso de distintas herramientas plantea la necesidad de actualizar o ajustar las diversas maneras de evaluar las competencias matemáticas. Aquí interesa caracterizar las formas de razonamiento que se construyen o desarrollan cuando utilizan de manera sistemática varias herramientas computacionales.

Referencias y bibliografía

Adler, J.; Davis, Z. (2006). Opening another black box: Researching mathematics for teaching in mathematics teacher education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 37(4), 270-296.

Cuoco, A.; Goldenberg, E.; Mark, J. (1996). Habits of mind: An organizing principle for mathematics curricula. *Journal of Mathematical Behavior,* 15(4), 375-402.

Davis, B.; Simmt E. (2006). Mathematics-for-teaching: An ongoing investigation of the mathematics that teachers (need) to know. *Educational Studies in Mathematics,* 61(3): 293-319.

Mason, J.; Burton, L.; Stacy, K. (1982). *Thinking mathematically*. London: Addison-Wesley.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston VA: The Council.

Papick, I. (2011). Stengthening the mathematical content knowledge of middle and secondary mathematics teachers. *Notices of the AMS*, 58 (3), 389-392.

Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton: Princeton University Press.

Santos, M. (2007). *Resolución de problemas matemáticos. Fundamentos cognitivos*. México: Trillas.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press.

Selden, J.; Selden, A., Mason, A. (1994). Even good calculus students can't solve nonroutine problems. In J. Kaput and E. Dubinsky (Eds.), *Research Issues in Undergraduate Mathematics Learning: Preliminary Analyses and Results* (pp. 19-26), MAA Notes 33, Washington, DC: Mathematical Association of America.

Tatto, M., Lerman, S.; Novotna, J. (2010). The organization of the mathematics preparation and development of teachers: a report from the ICMI Study 15. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13, 313-324.