XIII CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
CIAEM 2011
26 - 30 Junio, 2011
Recife, Brasil
50 años
del Comité Interamericano de Educación Matemática

La contribución de la Historia de las Matemáticas a la Formación de Profesores de Matemáticas de Educación Secundaria

Bernard R. **Hodgson**
Département de mathématiques et de statistique
Université Laval, Québec, Canada G1K 7P4
Bernard.Hodgson@mat.ulaval.ca

Resumen

En esta ponencia presento el lugar que la historia de las matemáticas ocupa en los programas de formación de profesores, más concretamente la contribución que esta temática puede aportar a la preparación de profesores de secundaria. Tomando como base la exigencia, cada vez más extendida en muchos países, de integrar elementos culturales e históricos en el curriculum escolar de matemáticas, analizo cómo ese contexto impacta en los programas universitarios de formación de profesores, así como en los departamentos de matemáticas que ofertan cursos de historia de las matemáticas. También presento algunos ejemplos de tópicos matemáticos con sabor histórico, extraídos de mi propia experiencia como formador de futuros profesores de secundaria.

Introducción

En la educación matemática actual, cada vez hay una mayor concienciación del papel que debe jugar la cultura en la enseñanza y aprendizaje de matemáticas. Esto se puede considerar parte de una tendencia global de incrementar los aspectos culturales en el curriculum escolar general, que incluye el de matemáticas. De particular interés en esta conexión es el papel específico que la historia de las matemáticas podría o debería ocupar en el horizonte de la educación matemática.

En esta ponencia pretendo examinar los contextos pedagógicos en los que se puede utilizar, de forma útil y provechosa, la historia de las matemáticas, para cubrir las necesidades específicas de los futuros profesores que, a su vez, permitan seguir las tendencias actuales sobre cultura e historia en el curriculum escolar de matemáticas. También deseo considerar un aspecto, posiblemente común a diferentes departamentos de matemáticas de todo el mundo, como es el hecho de que algunos matemáticos son inducidos, *de facto,* a responsabilizarse de la enseñanza de la historia de las matemáticas sin haber recibido una formación específica sobre ese contenido. Será crucial cómo estos compañeros adquieren el soporte necesario para abordar estas expectativas que recaen sobre ellos. Finalmente, ofreceré algunos ejemplos de tópicos históricos que proporcionan ricos contextos para discusiones fructíferas sobre matemáticas, especialmente desde una perspectiva epistemológica, extraídos de mi enseñanza a futuros profesores de secundaria. Los ejemplos escogidos están relacionados con la noción de demostración.

Mis comentarios están basados en mi propia experiencia como matemático que trabaja en la formación de profesores de educación secundaria, en particular en la enseñanza de una asignatura de historia de las matemáticas específica para profesores. Los puntos de vista y ejemplos que se ofrecen provienen de dos presentaciones previas, la primera en la Sixth International Conference on Mathematics Education and Cultural History of Mathematics in the Global Information Society (MECHMI-6) celebrada, en 2009, en Osaka (Japón) (Hodgson, 2009) y, la otra, en la International Conference on the Socio-Cultural Approach to Mathematics Education que tuvo lugar en Jinhua (China), en 2010 (Hodgson, 2010). Agradezco esta oportunidad de presentarlos a la comunidad latinoamericana en el contexto del XIII CIAEM.

2. Historia de las matemáticas y el curriculum de matemáticas

En las últimas décadas, parece haber una fuerte tendencia en la evolución de los curricula escolares hacia la introducción de componentes relacionados, específicamente, con aspectos culturales. Lo explicaré mediante ejemplos con los que estoy familiarizado, en concreto me referiré a los actuales curricula oficiales de matemáticas para educación primaria y secundaria en la provincia de Quebec (Canadá) — estos dos programas educativos se implementaron en la última década.

En el curriculum escolar de matemáticas de primaria se enumera, explícitamente, un conjunto de “Referencias Culturales”1 que, además del llamado “Conocimiento Fundamental”, forman parte integral del programa — ésta es una característica nueva en relación con versiones previas del curriculum. Estos ingredientes culturales tienen un componente histórico no despreciable que tiene que ver con tópicos como números (origen de los números, desarrollo de sistemas de representación de números, relaciones interdisciplinares con geografía, ciencia, etc.), figuras geométricas (relaciones con el arte, la decoración, la arquitectura, etc.) o medida (aspectos históricos del sistema de medidas, símbolos).

Los requisitos del curriculum de educación secundaria son mucho más ambiciosos y explícitos, tanto en el alcance como en la profundidad que se espera que consigan los profesores relacionada con esas “Referencias Culturales”. Como consecuencia, su descripción en el documento oficial del curriculum de matemáticas llena unas cuantas páginas y proporciona bastantes sugerencias específicas sobre los temas que se pueden introducir, relaciones que se pueden hacer (históricas o interdisciplinares), periodos históricos que se pueden discutir o matemáticos que se pueden mencionar. Estos aspectos están relacionados con las principales partes del curriculum (aritmética y álgebra, geometría, trigonometría, combinatoria, estadística y probabilidad). Entre las justificaciones básicas que se presentan, en esos documentos, de dichas referencias culturales, se incluye el hecho de que las matemáticas forman parte de la herencia de la humanidad, que poseen una larga y rica historia y que su evolución ha estado directa o indirectamente relacionada con las necesidades de las diferentes sociedades. De esa forma se anima a que los profesores consideren la importancia de incorporar una dimensión epistemológica en las actividades de aprendizaje para ofrecer una ventana al pasado y el presente

[1] “Repères culturels” en francés.

y dar oportunidades a los alumnos de apreciar mejor las matemáticas, tanto en sí mismas como disciplina, como en relación con su papel en la sociedad.

No sorprende que, las guías educativas oficiales de los programas universitarios para profesores de educación primaria y secundaria, subrayen la importancia de formarlos introduciendo la perspectiva cultural en su trabajo con los alumnos. La cultura se presenta "como un tipo de sensibilidad que permite definir una relación con el mundo, con nosotros mismos y con otros"2 (Ministère de l'Éducation, 2001). El "profesor culto", cuya responsabilidad es facilitar que los alumnos sean "personas cultas", se considera poseedor de cultura, su heredero, crítico e intérprete. Su papel es facilitar la construcción del conocimiento por los alumnos, para lo cual debe ser sensible a la historia de un concepto concreto o de un aspecto del conocimiento.

La recomendación oficial del ministerio de educación fue invitar a que los formadores de profesores relacionaran su proceso de enseñanza con la cultura, sin añadir "asignaturas culturales" a los programas de formación de profesores. Éste es precisamente el enfoque elegido, en mi universidad para la preparación de profesores de primaria, principalmente debido a la imposibilidad de añadir nuevos créditos a los ya de por sí saturados programas. Referido al componente matemático, los ingredientes culturales se consideran en dos asignaturas obligatorias para futuros profesores de primaria. En aritmética se incluyen actividades sobre el desarrollo de los sistemas de numeración así como discusiones sobre la historia y especificidad de diferentes tipos de números (números naturales, negativos, racionales, irracionales). La asignatura de geometría ofrece varios contextos para trabajar los fenómenos geométricos, por ejemplo, en relación con la geometría que poseen ciertos objetos en el arte (pinturas, etc.), las simetrías que se pueden observar en el entorno (edificios, puentes, etc.) o el estudio de frisos y teselas. Discusiones sobre rigor y argumentación también forman parte del programa.

En relación con las necesidades de los profesores de secundaria, la mayoría de las universidades de Quebec incluyeron una asignatura de historia de las matemáticas en el programa de formación de profesores. Éste es el caso de mi universidad donde la ofrecimos, específicamente, a los profesores de secundaria, en el sentido de que son los únicos alumnos que la cursan. Su objetivo, como se indica explícitamente en su título, es proporcionar a los estudiantes la oportunidad de reflexionar sobre la evolución de ideas matemáticas, así como desarrollar una profunda y amplia visión de este campo observando algunas de sus "grandes corrientes". Esta asignatura se concibe como una piedra angular que se ofrece en el último semestre del programa y pretende iluminar el origen de algunas nociones matemáticas del nivel de secundaria para permitir apreciar su motivación, lugar e importancia en las matemáticas. A los estudiantes se les invita a "vivenciar" los conceptos matemáticos al situarlos en su contexto — histórico, científico, sociológico — problemas y situaciones que conducen al desarrollo de las nociones matemáticas fundamentales. Un objetivo específico del curso, como reacción a una creencia ampliamente difundida, es permitir que los alumnos se den cuenta de que las matemáticas, aunque surgen del esfuerzo humano y tienen un brillante pasado, están lejos de estar "terminadas" sino fuertemente inmersas en el mundo actual y su evolución. También se espera que el curso permita, a los futuros profesores, desarrollar herramientas y marcos de referencia para la reflexión personal sobre el papel y el lugar que la historia de las matemáticas puede tener en la educación secundaria.

---

[2] "la culture comme *raison sensible* qui nous fait entrer en relation avec le monde, soi-même et autrui".

3. Retos departamentales relacionados con la enseñanza de la historia

Entre las asignaturas que, eventualmente, típico miembro de un departamento universitario de matemáticas puede enseñar, probablemente la historia de las matemáticas tiene un sabor peculiar. Aunque no se puede esperar que todos los matemáticos tengan interés o sean expertos en ese tema, es importante identificar las condiciones que permiten que un departamento cumpla adecuadamente con sus obligaciones en relación con ella y proporcione soporte suficiente a sus profesores.

Una dificultad básica, como se mencionó en la Introducción, es la posible ausencia de conocimiento formal de la historia de las matemáticas por un potencial profesor de universidad. Y esto es, de alguna forma, diferente de lo que suele ocurrir en otros campos de conocimiento. Por ejemplo, cuando un algebrista enseña una asignatura de análisis, ese conocimiento ya lo ha explorado como matemático (al menos, como estudiante). Es posible que no posea el nivel de un investigador en ese tema pero no es un extraño a ese conocimiento y, dependiendo del nivel específico de la asignatura que debe enseñar, puede, fácilmente, estar en una posición razonable para satisfacer cualquier expectativa. Esto puede ser bastante diferente con la historia de las matemáticas puesto que es un conocimiento del que se suele estar más distanciado. La mayoría de los que se acercan a la historia de las matemáticas sin ser profesionales, tienen que empezar desde el principio — algunas veces, incluso, respecto de los aspectos globales de "cultura general" en los que la asignatura está inmersa.

Hay otras dificultades intrínsecamente relacionadas con el propio campo de conocimiento. Mis comentarios, sobre este aspecto, se basan principalmente en mi experiencia personal, es decir, en la evolución que sufrí cuando mi conexión con la historia pasó de un interés personal, esencialmente cultural, a otro relacionado con organizar un conocimiento que formara la espina dorsal de una asignatura. La historia de las matemáticas es un campo extremadamente vasto que me obligó a seleccionar el contenido e identificar criterios para que fuera congruente con las expectativas de la audiencia a la que iba dirigida. La enseñanza de una asignatura estándar, como el álgebra lineal, no suele obligar al mismo nivel de selección. El "tipo" de conocimiento que se enseña tampoco es el mismo que el de una asignatura de matemática tradicional. Mientras que, en mi opinión, aunque la asignatura de historia de las matemáticas debe, evidentemente, tener un fuerte contenido matemático, puede no ser, y debería no ser, "sólo" matemáticas. Es decir, un aspecto crucial, en ella, es apreciar las matemáticas en diferentes momentos de su evolución, atestiguar que los conceptos emergen en un contexto cultural, social y científico dado, y apreciar las "grandes ideas" que forman un hilo conductor a lo largo de la evolución de las matemáticas a través de los tiempos. Finalmente, evaluar una asignatura de historia de las matemáticas representa un reto sustancial usualmente más complicado que en otras asignaturas de matemáticas con las que el profesorado está acostumbrado. Dependiendo del énfasis, es preciso valorar las dimensiones culturales y globales para las que un examen tradicional puede no ser el mejor instrumento.

Otra dificultad que deseo mencionar está relacionada con lo que llamaría aceptación (o falta de aceptación) de la historia de las matemáticas como un campo en el que un determinado departamento de matemáticas debería sentirse responsable. Esto tiene un impacto obvio en el apoyo que proporcionará a los profesores involucrados, o que pretendan involucrarse, en su enseñanza. Aquí se puede establecer una llamativa analogía con el nivel de aceptación y apoyo de una Facultad de matemáticas a la formación de profesores, como se discute en (Hodgson, 2001). La cuestión básica es si ese compromiso (en la enseñanza a profesores o en la de la historia) se considera por el departamento como un trabajo *bona fide* en matemáticas al mismo nivel que cuando se interactúa con alumnos de ingeniería o especialistas en matemáticas — por no referirse a la investigación matemática per se. Aunque algunos indicadores (por ejemplo, reconocimiento de los compañeros, promoción, subvenciones, etc.) parecen sugerir que la situación está muy a menudo alejada de la ideal en este sentido, otros señalan que la mentalidad está evolucionando, aunque lentamente.

4. Posibles recursos para los que enseñan historia de las matemáticas

El surgimiento y consolidación de la didáctica de la matemática como un campo de investigación y especialización en sí mismo es un elemento crucial en el desarrollo de las reflexiones que se llevan haciendo en los últimos 50 años sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas desde una perspectiva internacional. En particular la Comisión Internacional de Educación Matemática (International Commission on Mathematical Instruction / ICMI) ha atestiguado, acompañado y, en algunos momentos, incluso fomentado esa evolución (Menghini *et al.* 2008 o Hodgson 2009), que ha pasado de centrarse en objetivos nacionales de educación matemática, en los primeros momentos de existencia del ICMI a principios del siglo XX, a objetivos relacionados con las necesidades de los individuos — tanto alumnos como profesores. Este cambio ha conllevado el desarrollo de un estudio más sistemático del papel de la historia de las matemáticas en el contexto pedagógico y su impacto potencial en el alumno, así como la publicación de abundante literatura sobre este tema.

En el marco del ICMI, por ejemplo, el *International Study Group on the Relations between the History and Pedagogy of Mathematics* (HPM) se afilió al ICMI en 1976 y desde entonces, regularmente, se han propuesto y organizado diferentes actividades dedicadas al papel e impacto de la historia de las matemáticas en entornos pedagógicos. Por ejemplo, además de los “encuentros satélite” celebrados con ocasión de la celebración de las sucesivas ediciones del Congreso Internacional de Educación Matemática (International Congress on Mathematical Education / ICME), cada cuatro años, el HPM también está apoyando, en Europa, la European Summer University (ESU) sobre Historia y Epistemología de la Educación, que también se celebra cada cuatro años. Las publicaciones resultantes de tales actividades del HPM (ver entre otras (Katz, 2000) contienen un rico material del cual, un recién llegado que vaya a encargarse de la enseñanza de la historia, seguramente puede beneficiarse.

Una acción más específica y sistemática del ICMI fue la organización de un Study sobre el papel de la historia de las matemáticas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Su décimo ICMI Study fue “conceived in the early 1990s in order to tease out the different aspects of the relations between history and pedagogy of mathematics, in recognition of how the endeavours of (…) the HPM Study Group had encouraged and reflected a climate of greater international interest in the value of history of mathematics for mathematics educators, teachers and learners”[3] (Fauvel & van Maanen, 2000). El volumen resultante del estudio (Fauvel & van Maanen, 2000) contiene valiosa información sobre este tópico, especialmente en relación con el caso específico de la formación de profesores. Una revisión del Study y sus resultados, que vale la pena leer, fue realizada por Furinghetti (2005). También se pueden encontrar comentarios

[3] Concebido, a principios de los noventa, para desentrañar los diferentes aspectos de las relaciones entre la historia y la pedagogía de las matemáticas, en reconocimiento de cómo los esfuerzos (…) del HPM Study Group habían animado y reflejado un clima de mayor interés internacional hacia el valor de la historia de las matemáticas para los educadores matemáticos, profesores y alumnos

sobre ese Study en mi documento (Hodgson, 2009), donde resalté muchos ejemplos concretos de diferentes países que aparecen en sus páginas y que podrían inspirar a los que se animen a incluir el componente histórico en la formación de profesores.

La información que esas fuentes proporcionan es acorde al fuerte consenso que se observa en la investigación actual en educación matemática sobre la importancia del "componente del profesor" entre los muchos factores que influyen en el desarrollo de la educación matemática en términos generales y, más específicamente, la implementación actual en el aula de las reformas e innovaciones propuestas. Una cita del informe sobre el trabajo del Survey Team, presentado por Sfard en su conferencia plenaria en el ICME-10, puede ser adecuada en este contexto:

> The first thing I wish to say is that I am pleased to find out that the last few years have been *the era of the teacher* as the almost uncontested focus of researchers' attention. This is quite a change with respect to the last two decades of the 20th century which were almost exclusively *the era of the learner*. And we have certainly come a long way since *the era of the curriculum*, roughly corresponding to the 1960s and 1970s when the main players in the educational game were the developer and the textbook. I consider the re-conceptualization of the relationship between the teacher and the researcher a big leap toward research that plays a genuine role in shaping and improving practice. (Sfard, 2008 p. 90)

Otra referencia reciente de la literatura, sobre el papel de la historia de la matemática en la preparación de los profesores, es el artículo de Furinghetti (2007), donde el álgebra se utiliza como un estudio de caso para mostrar cómo la historia interviene en la construcción de secuencias de enseñanza. El interesante punto de vista de la autora es que los futuros profesores necesitan ver los tópicos que enseñarán de una manera distinta y que la historia puede ser una ayuda para proporcionar un contexto en esa visión renovada. Se debe advertir que, en su aproximación, la historia de las matemáticas no se introduce *per se* en el programa de formación de profesores sino que es un "mediador del conocimiento para la enseñanza" (Furinghetti, 2007).

5. Algunos apuntes sobre el papel de la demostración inspirados en la historia de las matemáticas

Elegir "buenos" tópicos para una asignatura de historia de las matemáticas no es siempre una cuestión trivial, especialmente cuando trata de considerar las necesidades de los profesores. En esta sección discutiré tres ejemplos de tópicos extraídos de la historia de las matemáticas que desarrollé durante mi enseñanza a futuros profesores de educación secundaria y que, no sólo considero adecuados, sino importantes para la formación de esos profesores. Estos tres ejemplos se basan en el empleo de fuentes originales en el aula. Ese acercamiento a los textos originales, sea con futuros profesores o con alumnos, se presentó en el ICMI Study 10 como "uno de los más valiosos, tanto en los colegios para los alumnos como en las instituciones de formación de profesores"[4] (Fauvel & van Maanen, 2000) pero ciertamente es muy ambicioso y difícil. No es fácil identificar fuentes originales que sean accesibles a los alumnos — a veces los obstáculos lingüísticos son considerables por el estilo y el contexto de la escritura —, que se puedan trabajar en un tiempo razonable y que sean herramientas útiles para ayudar a que los alumnos progresen en su aprendizaje. Pero se puede hacer de forma provechosa, como se muestra claramente en la amplia literatura que se ha desarrollado (ver por ejemplo el Capítulo 9 de Fauvel & van Maanen, 2000).

[4] one of the most rewarding for students both at school and at teacher training institution

Los ejemplos que considero a continuación se han presentado en mi documento (Hodgson, 2010) y están relacionados con la noción de demostración — probar la validez de un teorema dado, probar la corrección de un algoritmo dado (o fórmula). Creo que muestran gráficamente cómo la historia puede ayudar a reflexionar sobre el papel de la demostración y los diferentes entornos en los que puede tener lugar. También sugieren el tipo de desarrollo histórico-matemático que podría ser apropiado para profesores.

Empezaré con el importante descubrimiento, hace poco más de un siglo, relacionado con 'el Maestro de los Maestros', Arquímedes (287-212 a. de C.), y se refiere al tema de la demostración desde una perspectiva general.

5-a. Sobre *El Método* de Arquímedes

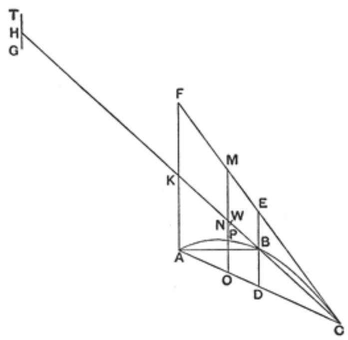
El tratado de Arquímedes, *El Método,* cuya existencia era conocida a través de otros trabajos, fue sorprendentemente descubierto en la biblioteca de un monasterio griego en Constantinopla a finales del siglo XIX. El manuscrito estaba en un palimpsesto, es decir, un pergamino reutilizado que fue descifrado en 1906 y publicado en 1912 (Heath, 1953). El palimpsesto, que recientemente ha recibido mucha atención cuando se vendió en una subasta en 1998, es actualmente objeto de un importante proyecto de investigación. (Más información sobre el palimpsesto se puede encontrar en (Netz & Noel, 2007) y en la página web *www.archimedespalimpsest.org/*.)

Un interés fundamental de *El Método* es que, en él, Arquímedes presenta un método, basado en los principios de la mecánica, que usó para descubrir muchos importantes resultados sobre áreas y volúmenes. Arquímedes explícitamente afirma que no considera que dichos resultados estén demostrados con su método. Pero hace hincapié en que, conocer el resultado que debe ser probado, es de gran ayuda cuando hay que realizar argumentos rigurosos.

En una parte del prefacio de *El Método*, dirigido a Eratóstenes, Arquímedes introduce el contenido de este tratado en los siguientes términos:

> Saludo de Arquímedes a Eratóstenes. (…)
>
> Viendo en ti (…) un hombre de considerable importancia en Filosofía, y un admirador [de la indagación matemática], considero adecuado escribir para ti y explicar con detalle (…) la peculiaridad de cierto método con el que es posible investigar algunas cuestiones matemáticas por medio de la mecánica (…) [C]iertas cosas se clarificaron para mí primero por el método mecánico aunque después tuvieron que demostrarse geométricamente puesto que dicho método no suministra una verdadera demostración. Pero, naturalmente, una vez adquirido algún conocimiento del asunto en cuestión, es más fácil desarrollar la demostración que buscarla sin ningún conocimiento previo. (Heath, 1953 p. 13)

Después Arquímedes presenta el primer teorema que obtuvo por medio de su método de descubrimiento, esto es, que el área de un segmento de parábola es 4/3 del área del triángulo inscrito en ella. Su discusión se basa en el siguiente sistema mecánico (Heath, 1953 p. 16), donde K es el punto de apoyo de la palanca CH, la línea PO del segmento de parábola ABC se traslada TG, con centro de gravedad H, y luego se equilibra con MO, con centro de gravedad en N. (Heath, 1953 pp. 15-17, o Katz, 2009 pp. 104-105.)



Arquímedes concluye la discusión con las siguientes observaciones:

> Ahora bien, lo que aquí se establece no ha sido verdaderamente demostrado por el argumento empleado; pero ese argumento parece indicar que la conclusión es cierta. Entonces, como el teorema no está demostrado pero, al mismo tiempo, sospechando que la conclusión es cierta, recurriremos a la demostración geométrica que yo mismo descubrí y ya publiqué. (Heath, 1953 pp. 17-18)

Es verdaderamente fascinante dar testimonio de la aguda distinción de Arquímedes entre un argumento heurístico que permite alcanzar una cierta conclusión, sugiriendo que sea cierta, y una demostración *bona fide* de tal conclusión (Es posible utilizar un divertido juego de palabras en francés para esta conexión, para distinguir entre “Archimède qui *t*rouve” y “Archimède qui *p*rouve”).

Además del interés histórico intrínseco del descubrimiento del texto de *El Método*, este episodio proporciona una maravillosa oportunidad para una rica discusión con los estudiantes sobre la noción de demostración, su papel y estatus en el contexto matemático y las variadas formas que puede tomar. Es de gran interés ver a Arquímedes juzgándose a si mismo al decir que “el teorema no está demostrado” por su método mecánico y haciendo hincapié en la necesidad de proporcionar una demostración adecuada, esto es, un argumento que respete los criterios comúnmente aceptados sobre cómo debe ser una demostración. Por otro lado, podemos ver a Arquímedes teniendo en mente lo que es una demostración, es decir, un cierto “acto social” que tiene lugar en una cultura y en un marco científico determinados, es decir, un argumento que debe ser aceptado como válido por un grupo de personas. Por eso llegamos al convencimiento de que este aspecto puede ser provechoso para nuestros estudiantes y, en particular, para los futuros profesores.

(Debería tenerse en cuenta que la “demostración geométrica” mencionada por Arquímedes aparece como proposición final de su tratado *Cuadratura de la Parábola* (Heath, 1953). Esta demostración se basa en la aproximación del área del segmento de parábola por polígonos inscritos usando lo que se conoce como “método de exhausción” juntamente con una doble *reductio ad absurdum* — todo ello siguiendo los estándares de los griegos de su tiempo.)

5-b. El Teorema de Pitágoras

Mis siguientes ejemplos están relacionados con contextos en los que se obtienen algunos resultados matemáticos de forma visual o, al menos, con un fuerte matiz geométrico. Por supuesto es importante recalcar hasta qué punto tales demostraciones, eventualmente "demostraciones sin palabras" como también se las conoce, son aceptables, pertinentes, útiles e incluso preferibles a otro tipo de demostraciones.

La historia de las matemáticas, en particular su conexión con el análisis, muestra muchos casos de reticencia a confiar en argumentos visuales. De hecho, a veces, incluso se puede evidenciar una total devaluación del papel de las figuras. Quizás el que mejor expresó este punto de vista fue Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) quien orgullosamente anunció, en la introducción de su *Mécanique analytique* (1788), que no había figuras en su libro:

> "No se encontrarán figuras en este libro. El método que aquí presento no requiere construcciones ni razonamiento geométrico o mecánico, sino sólo operaciones algebraicas desarrolladas de forma regular y uniforme." (Lagrange, 1965)[5]

Para Lagrange, la desaparición de las figuras era una consecuencia de la preeminencia dada al simbolismo algebraico frente al geométrico. Ese criterio dominó enérgicamente el contexto matemático hasta tal punto que un resultado geométrico, como el Teorema de Pitágoras, se suele presentar en un marco algebraico un tanto distante de sus orígenes geométricos. Este es un sorprendente ejemplo de la distinción entre "historia" y "herencia" discutido por Grattan-Guinness (Grattan, 2004).

Es interesante volver a parafrasear a Euclides (c. 325-265 BCE) en sus *Elementos*, cuando establece el Teorema de Pitágoras (Libro I, Proposición 47):

> En los triángulos rectángulos el cuadrado construido sobre el lado opuesto al ángulo recto es igual a los cuadrados construidos sobre los lados que forman el triángulo rectángulo. (Heath, 1956).

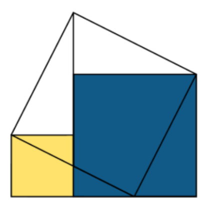
De crucial importancia es el uso de la palabra "sobre" — los objetos matemáticos que Euclides discute son geométricos, es decir "los cuadrados SOBRE los lados" de un triángulo básico, no son los (algebraicos) "cuadrados DE los lados". Es bastante natural y tentador, dentro de la "herencia" de la tradición, discutida en (Grattan, 2004), incluir las letras *a*, *b* y *c* para los lados del triángulo y convertir el Teorema de Pitágoras en su versión algebraica: $a^2+b^2=c^2$. Esto conduce a una posible demostración del teorema donde el tratamiento algebraico vuelve a ser preeminente: el siguiente cuadrado, de lado $a+b$ y, por lo tanto, de área a^2+b^2+2ab, está formado por cuatro triángulos rectángulos *a-b-c,* además de un cuadrado de lado *c*, de donde $a^2+b^2=c^2$.

Una aproximación diferente al Teorema de Pitágoras, que se puede interpretar en términos de la disección del cuadrado construido sobre la hipotenusa en el cuadrado de lado $(a-b)$ y cuatro triángulos, se puede encontrar en la antigua literatura China, precisamente en el tratado clásico *El Gnomon del Zhou* (*Zhoubi suanjing*) que se remonta a la Dinastía Han (entre −206 y 220) y que fue comentado por

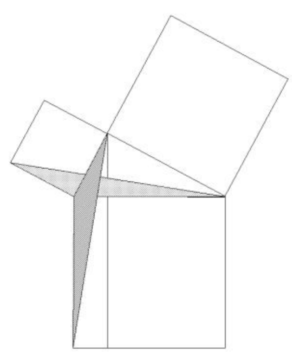
[5] On ne trouvera point de Figures dans cet Ouvrage. Les méthodes que j'y expose ne demandent ni constructions, ni raisonnemens géométriques ou méchaniques, mais seulement des opérations algébriques, assujetties à une marche réguliere et uniforme.

Zhao Shuang en el siglo III — ver [16], p. 204. La siguiente figura famosa fue extraída de la edición de 1213 (Chemla, 2005).

En esta última figura también se puede ver otra disección del cuadrado sobre la hipotenusa que, posiblemente, transmite mejor el sabor geométrico original del Teorema de Pitágoras, esto es, la combinación de dos cuadrados para formar un tercero con área igual a la de los dos cuadrados dados. Esta interpretación particular es incluso más clara en la siguiente figura, del matemático árabe Thabit Ibn Qurra (836-901).

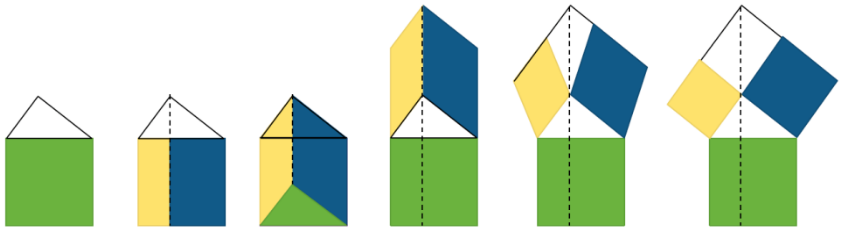


De la misma forma, la demostración propuesta por Euclides en su Proposición I.47, que surge del siguiente diagrama, también es más cercana al aspecto geométrico que nos interesa.

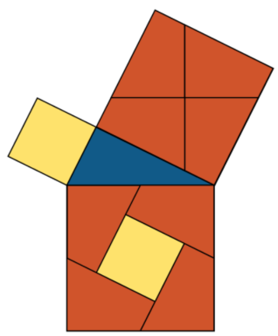


Esta figura se obtiene trazando la perpendicular a la hipotenusa desde el vértice del triángulo rectángulo y, después, dividiendo el cuadrado sobre la hipotenusa en dos rectángulos. La demostración de Euclides consiste en probar que cada cuadrado construido sobre los lados que forman el ángulo recto es igual (en área) a uno de esos triángulos. Por ejemplo, los dos triángulos sombreados en la figura anterior, que son congruentes, juegan el papel de “intermediario” entre el cuadrado más pequeño y el rectángulo más pequeño dentro del cuadrado construido sobre la hipotenusa — cada triángulo es la mitad del área del cuadrilátero correspondiente.

La demostración de Euclides, o una pequeña variante de la suya, puede ser fácilmente trasformada en una “demostrada sin palabras” animada.



De especial interés, cuando uno desea ver el cuadrado construido sobre la hipotenusa a partir de la combinación de los dos cuadrados construidos sobre los lados, es la ingeniosa demostración-disección propuesta por Henry Perigal (1801-1898), un aficionado matemático británico. Dibujando primero una línea paralela a la hipotenusa a través del centro del mayor cuadrado construido sobre los catetos, y luego una perpendicular a ésta, se divide el cuadrado en cuatro trozos que, cuando se añaden adecuadamente al cuadrado más pequeño, proporcionan un embaldosado del cuadrado construido sobre la hipotenusa.



Otras reflexiones sobre el Teorema de Pitágoras, entendido como suma de cuadrados, se pueden encontrar en (Hodgson, 2010).

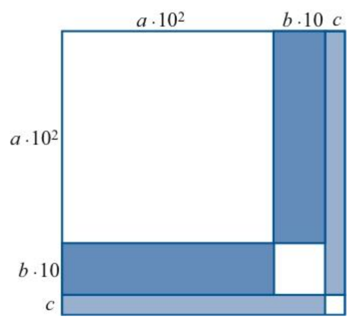
5-c. Extrayendo raíces cuadradas

El interés en extraer raíces cuadradas en matemáticas ha sido creciente desde tiempos remotos. Una posible encapsulación de este tópico se puede hacer con el siguiente algoritmo, que se ha enseñado en los colegios de todo el mundo hasta hace pocas décadas. El cálculo que se muestra corresponde a $\sqrt{55225} = 235$.

$$
\begin{array}{lll|l}
5 & \cancel{52} & \cancel{25} & 235 \\ \cline{4-4}
\underline{4} & & & \cancel{2 \times 2} \\
1 & 52 & & \cancel{43 \times 3} \\
\underline{1} & \underline{29} & & 465 \times 5 \\
 & 23 & 25 & \\
 & \underline{23} & \underline{25} & \\
 & & 0 &
\end{array}
$$

No sorprende que esa manipulación se enmarque en un contexto puramente aritmético. Sería posible justificar este algoritmo utilizando la identidad algebraica $(u+v)^2 = u^2 + v^2 + 2uv$. Incluso las mismas palabras empleadas ("raíces cuadradas") sugieren que un marco geométrico que incluya algunos cuadrados puede ser útil.

La extracción de raíces cuadradas es un tópico tratado en otro trabajo matemático chino, *Nueve Capítulos del Arte Matemático* (Shen; Crossley & Lun, 1999), también escrito en tiempos de la Dinastía Han (entre -206 y 220). El comentario hecho en el siglo III por Liu Hui sobre esta operación (Capítulo Cuatro, "Pequeña anchura", problema 12) está basado en una bella figura geométrica[6] que aclara los principios que subyacen a este algoritmo y, en particular, los extraños pasos en los que las raíces parciales se tienen que doblar (como 23 para obtener 46 — ver la última línea en la parte derecha de la tabla). Naturalmente esto es una consecuencia de la presencia del término 2*uv* en el desarrollo de $(u+v)^2$. Transferir la discusión a un marco geométrico y ver los dos rectángulos en cada paso, como se observa en el siguiente diagrama, puede ser una experiencia provechosa. (Este diagrama se aplica al cálculo de una raíz cuadrada de tres dígitos, $abc = a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c$. El cálculo de $\sqrt{55225}$ es el mismo ejemplo discutido por Liu Hui.)



Diagramas similares se pueden encontrar en la literatura, por ejemplo, en los comentarios de Theon de Alejandría sobre el *Almagesto* de Ptolomeo, a finales del siglo IV (Chabert; *et al.;* 1994). Se debería advertir que los cálculos de raíces cúbicas, que están basados en diagramas análogos 3D, también se abordan en los *Nueve Capítulos* (Shen, Crossley & Lun, 1999)

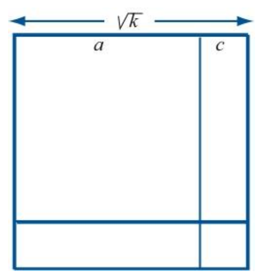
Mientras que el algoritmo aritmético anteriormente presentado permite calcular fácilmente raíces cuadradas con la exactitud deseada, su eficiencia está lejos de ser óptima. De hecho, cuando se compara con el conocido método usado por Herón de Alejandría, en el siglo I, uno se pregunta por qué éste último no consiguió implantarse en los currículos escolares como ocurrió con la primera.

[6] De acuerdo con [23], la regla presentada en los *Nueve Capítulos* "es el primer registro en la historia de las matemática de extracción de raíces cuadradas en el sistema decimal" (p. 209). El diagrama coloreado al que Liu Hui se refiere en su comentario se ha perdido pero fue preservado de una generación a otra durante mucho tiempo. Una figura similar a la de aquí se presenta se puede encontrar en la *Gran Enciclopedia del Reinado de Yongle (Yongle Dadian),* de inicios del siglo XV, donde aparece un trabajo de Yang Hui sobre los *Nueve Capítulos* de 1261. De acuerdo con [18], p. 107, éste es el diagrama sobre raíces cuadradas más antiguo que existe en la literatura china.

En el Libro I de su *Métrica*, Herón propone como método de cálculo de $\sqrt{k}$ la expresión $\frac{1}{2}\left(a+\frac{k}{a}\right)$. Luego calcula $\sqrt{720}$ como resultado de aplicar a un triángulo de lados 7, 8, 9 la fórmula que lleva su nombre para obtener el área de un triángulo en función de sus lados. En el texto, al explicar su método para obtener la raíz, Herón no solo describe los cálculos realizados paso a paso, sino que también introduce explícitamente la idea de reiterar el proceso para obtener una mejor aproximación. (Ver el texto Herón en (Heath, 1981).

No es conocido cómo Herón obtuvo el método anterior para calcular raíces cuadradas. Quizás forme simplemente parte del "folklore matemático" de su tiempo, que posiblemente data de la época de Arquímedes. Pero es interesante subrayar que, presumiblemente, un método usado por los matemáticos mesopotámicos para calcular raíces cuadradas — "un método del que hay evidencias textuales", por usar las palabras de Katz (2009) — puede estar relacionado con el algoritmo de Herón para raíces cuadradas.

Considerando un cuadrado de lado *a*, que forma parte de un cuadrado de área *k*, se puede encontrar una mejor aproximación de $\sqrt{k}$ diseccionando el gnomon del área $b=k-a^2$ (esto es, la forma L-inversa) en dos rectángulos y un cuadrado. Despreciando este "pequeño" cuadrado (de lado $c=\sqrt{k}-a$), se puede aproximar el lado *c* de los rectángulos restantes por medio de $\frac{b}{2a}$. De hecho, la expresión $a+\frac{b}{2a}$ se usó durante siglos como una aproximación de $\sqrt{a^2+b}$ (con resultados análogos para $\sqrt{a^2-b}$, donde esta vez se considera un cuadrado de lado *a* que contiene a un cuadrado de área *k*).



Aunque las manipulaciones algebraicas necesarias no eran accesibles para los matemáticos mesopotámicos o griegos, se debe resaltar que la expresión $a+\frac{b}{2a}=a+\frac{k-a^2}{2a}$ se puede reducir trivialmente a la fórmula de Herón, $\frac{1}{2}\left(a+\frac{k}{a}\right)$. Lo que pretendo mostrar es que, a pesar de lo anacrónica que puede ser esta visión (una "herencia" o "presentism" en el mejor de los casos), el estilo mesopotámico previo de los argumentos geométricos-algebraicos que conducen a la fórmula de Herón para raíces cuadradas arrojan una visión interesante sobre el conocido algoritmo.

La eficiencia excepcional del algoritmo de Herón se puede analizar, de forma provechosa, considerándola como un caso particular del conocido método de Newton-Raphson en el que se establece la convergencia cuadrática.

6. Conclusión

En su revisión del ICMI Study 10 (Furinghetti, 2005) subraya la "falta de conocimiento histórico" de los que enseñan — ya sea a futuros profesores en la universidad o a estudiantes en la escuela — como "un gran obstáculo para el uso de la historia [de las matemáticas] en la enseñanza".

Mi objetivo principal, cuando enseño historia de las matemáticas a futuros profesores de educación secundaria, es permitirles desarrollar un reconocimiento y experiencia (congruente con su contexto de enseñanza) del papel que la historia puede jugar en su propia enseñanza. Ellos serán los que deberán decidir cómo usar esa visión si consideran que les puede ayudar en su recorrido matemático con sus alumnos. Pero, para que esto ocurra, necesitan no sólo ser conscientes del potencial papel de la historia, sino también alcanzar un alto nivel de autonomía y confianza — como es el caso, naturalmente, de cualquier otro aspecto de sus acciones profesionales — para ser capaces de tomar decisiones pedagógicas. Es, por ello, esencial que, durante su formación universitaria perciban las posibilidades (y limitaciones) del uso de la historia de las matemáticas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Esto no puede suceder a menos que los departamentos de matemáticas responsables de la formación de profesores vean la historia de las matemáticas como una parte *bona fide* de su misión y responsabilidad. Es justo decir que, en general, probablemente se necesita mejorar en ese aspecto — aunque actualmente seamos testigos de que la historia de las matemáticas está siendo mejor aceptada y promocionada en los círculos matemáticos y educativos.

Agradecimientos

El autor está profundamente agradecido a Mª Teresa González Astudillo y José María Chamoso Sánchez por su amabilidad al traducir este manuscrito.

Referencias

Chabert, Jean-Luc ; *et al.* (1994) *Histoire d'algorithmes: Du caillou à la puce*. Paris: Belin. (Traducción al inglés: *A History of Algorithms: From the Pebble to the Microchip*. New York: Springer, 1999.)

Chemla, Karine (2005) Geometrical figures and generality in ancient China and beyond: Liu Hui and Zhao Shuang, Plato and Thabit ibn Qurra. *Science in Context* 18, 123-166.

Fauvel, John; van Maanen, Jan (Eds) (2000) *History in Mathematics Education: The ICMI Study*. (New ICMI Study Series, vol. 6) Dordrecht-Boston-London: Kluwer.

Furinghetti, Fulvia (2005) A report on the ICMI Study: "The role of the history of mathematics in the teaching and learning of mathematics". *L'Enseignement Mathématique* 51, 365-372.

Furinghetti, Fulvia (2007) Teacher education through the history of mathematics. *Educational Studies in Mathematics* 66, 131-143.

Grattan-Guinness, Ivor (2004) History of heritage? An important distinction in mathematics and for mathematics education. *American Mathematical Monthly* 111, 1-12.

Heath, Thomas L. (1953) *The Works of Archimedes*. (With a Supplement: *The Method of Archimedes*.) New York: Dover. (Nueva publicación de las ediciones de 1897 y 1912 por Cambridge University Press)

Heath, Thomas L. (1956) *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, vol. 1. (2nd edition) New York: Dover. (Nueva publicación por Cambridge University Press de la edición de 1926)

Heath, Thomas L. (1981) *A History of Greek Mathematics*, vol. II: *From Aristarchus to Diophantus*. New York: Dover. (Nueva publicación por Clarendon Press, Oxford de la edición de 1926)

Hodgson, Bernard R. (2001) The mathematical education of school teachers: role and responsibilities of university mathematicians. In: D. Holton, (Ed.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level — An ICMI Study.* (New ICMI Study Series, vol. 7), pp. 501-518. Dordrecht-Boston-London: Kluwer.

Hodgson, Bernard R. (2009) ICMI in the post-Freudenthal era: moments in the history of mathematics education from an international perspective. In: Kristín Bjarnadóttir, Fulvia Furinghetti and Gert Schubring, (Eds.) *Dig Where You Stand. Proceedings of the Conference on On-Going Research in the History of Mathematics Education* (Garðabær, Iceland, June 21–23, 2009), pp. 79-96. Reykjavik: School of Education, University of Iceland.

Hodgson, Bernard R. (2009) History of mathematics and the mathematical education of secondary school teachers: some personal views on the contribution of teacher educators and its context. In: Kiyoshi Yokochi, Mingyuan Gu, Masahiko Suzuki and Akira Yanagimoto, (Eds.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Mathematics Education and Cultural History of Mathematics in the Global Information Society (MECHMI-6)* (Osaka, Japan, November 21-23, 2009), pp. 27-32. Osaka: Osaka Kyoiku University.

Hodgson, Bernard R. (2010) A mathematician's perspective on the role of history in the mathematical curriculum. In: Zhang Weizhong and Yang Guangwei, (Eds.), *Proceedings of the International Conference on the Socio-Cultural Approach to Mathematics Education* (Jinhua, China, June 28-30, 2010), pp. 1-15. Jinhua: Zhejiang Normal University.

Hodgson, Bernard R. (2010) Sommes à la sauce pythagoricienne. *Accromath* 5 (été-automne 2010), 22-29. [Disponible online en www.accromath.ca]

Katz, Victor J. (2000) *Using History to Teach Mathematics: An International Perspective.* Washington: The Mathematical Association of America.

Katz, Victor J. (2009) *A History of Mathematics: An Introduction.* (3rd edition) Boston, etc.: Addison-Wesley.

Lagrange, Joseph-Louis. (1965) *Mécanique analytique*, tome premier. Paris: Librairie Albert Blanchard.

Lam, Lay Yong; Ang, Tian Se (2004) *Fleeting Footsteps: Tracing the Conception of Arithmetic and Algebra in Ancient China*. Singapore: World Scientific.

Menghini, Marta; Furinghetti, Fulvia; Giacardi, Livia; Arzarello, Ferdinando (2008) *The first century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908-2008). Reflecting and shaping the world of mathematics education.* Rome: Istituto della Enciclopedia Italiana.

Ministère de l'Éducation (Québec) (2001) *La formation à l'enseignement: les orientations, les compétences* professionnelles. (Traducción al inglés: *Teacher Training: Orientations, Professional Competencies*.) Québec: Gouvernement du Québec.

Netz, Reviel; Noel, William (2007) *The Archimedes Codex.* London: Weidenfeld & Nicolson. (Traducción al español: *El código de Arquímedes.* Madrid: Temas de Hoy, 2007.)

Sfard, Anna (2008) What could be more practical than good research? On mutual relations between research and practice of mathematics education. (Plenary Lecture based on the work of Survey Team 1) In: Mogens Niss (Ed.) *Proceedings of the Tenth International Congress on Mathematical Education* (Copenhagen, July 4-11, 2004), pp. 76-92. Roskilde: IMFUFA.

Shen, Kangshen; Crossley, John N.; Lun, Anthony W.-C. (1999) *The Nine Chapters on the Mathematical Art: Companion and Commentary.* Oxford: Oxford University Press.