XIII CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
CIAEM 2011 50 anos do Comitê Interamericano de Educação Matemática
26 - 30 Junho, 2011
Recife, Brasil

# Sobre ensino e aprendizagem de frações

Tânia Maria Mendonça **Campos**
Universidade Bandeirante de São Paulo
Brasil
taniammcampos@hotmail.com

**Resumo**

Neste trabalho analisamos o nível de compreensão dos alunos de 4º e 5º ano do ensino fundamental, quanto ao conteúdo frações, a partir de uma intervenção realizada em sala de aula em uma escola da cidade de São Paulo, e investigamos se esses alunos tinham, em geral, maior facilidade de lidar com a equivalência e ordenação de frações em situações quociente. Mais precisamente buscamos investigar como esses alunos lidavam com os invariantes, equivalência e ordem, em situações quociente e parte-todo. As respostas dos alunos e as intervenções feitas mostram como a experiência de trabalhar com situações de divisão em sala de aula, com o apoio de um pesquisador, pode promover novas reflexões sobre o ensino e aprendizagem de frações.

*Palavras chave*: educação matemática, ensino e aprendizagem, frações.

O ensino e aprendizagem de frações constituem um obstáculo considerável para professores e alunos, desde o 4º ano do ensino fundamental no Brasil, quando o tema é abordado, desde o início até o final dessa escolaridade. No entanto, as frações (ou números racionais na sua representação fracionária) são essenciais para o progresso do aluno na aprendizagem de matemática, sendo necessário que a escola encontre meios de promover a compreensão desse conteúdo matemático. Existem inúmeras pesquisas que tratam do tema. No entanto as implicações educacionais de resultados de pesquisa nem sempre são aceitas de imediato pelos professores e pelos responsáveis pelas políticas educacionais. Existem diversas razões que podem explicar a resistência a mudanças educacionais, mesmo quando essas mudanças parecem justificadas por pesquisas. Entre elas, salientamos o apego às tradições, a possibilidade de que estudos feitos em outros países não reflitam a realidade brasileira, e a idéia de que resultados de pesquisas feitas por pesquisadores diretamente em interação com as crianças podem não representar o que aconteceria se as mesmas questões fossem colocadas por professores em sala de aula. Essas preocupações são, de fato, relevantes. Nunes & Bryant (2006) argumentam que a passagem da pesquisa para a sala de aula não pode ser feita sem investigações adicionais, relevantes à sala de aula. Os objetivos desta pesquisa foram:

Analisar tanto o nível de compreensão dos alunos como a atuação de professores do ensino fundamental ao considerar problemas de frações em situações quociente e parte-todo, em sala de aula, com a participação de professores;

Verificar se os resultados obtidos em outros países e que mostram que os alunos têm, em geral, maior facilidade de lidar com a equivalência e ordenação de frações em situações quociente do que em situações parte-todo são replicados na realidade brasileira;

Desenvolver um número de tarefas que possam ser realizadas em salas de aula, de modo que os alunos resolvam problemas em situações quociente; sistematizar os resultados dessa investigação de modo a oferecer aos professores da rede de ensino fundamental elementos para trabalhar o conceito de frações em situações quociente.

Neste trabalho está sendo apresentado um recorte dessa pesquisa, em que vamos analisar o nível de compreensão dos alunos de 4º e 5º ano do ensino fundamental e verificar se estes alunos têm maior facilidade de lidar com a equivalência e ordenação de frações em situações quociente.

O desenvolvimento das tarefas foi centrado na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1983; 1998; 2001) que define um conceito a partir de uma terna (S,I,R), a saber: S um conjunto de situações, que dá significado ao objeto em questão, I um conjunto de invariantes operatórios, que trata das propriedades e procedimentos necessários para definir o objeto em questão, e R um conjunto de representações simbólicas, as quais permitem relacionar o significado desse objeto com as suas propriedades. No que tange aos invariantes operatórios, explícitos – quando as propriedades do objeto e os procedimentos para resolver um problema estão conscientes para o sujeito, ou implícitos – quando o sujeito faz uso correto dos procedimentos, porém não tem consciência das propriedades que subjaz esse procedimento que ele próprio usou para resolver o problema. Os invariantes da fração são a ordem e a equivalência.

Na literatura encontramos várias classificações a priori dos tipos de situações e de significados para os números racionais. Kieren (1975) foi o primeiro pesquisador a chamar a atenção da comunidade científica para o fato de que os números racionais em sua representação fracionária são constituídos de vários construtos e que a compreensão da noção de número racional depende do entendimento destas diferentes interpretações. Posteriormente, Kieren (1988) citado por Ohlsson (1988), identifica cinco idéias como sendo básicas no processo de compreensão dos números racionais, a saber: parte-todo, quociente, medida, razão e operador. Na seqüência têm-se as valiosas contribuições de Behr, Lesh, Post & Silver (1983) e Behr, Harel, Post e Lesh (1992), cuja leitura torna-se imprescindível para o estudo do tema.

Nunes (2003) inspirada nos trabalhos de Kieran (1988), afirma que uma aprendizagem do conceito de fração pode ser obtida com maior êxito quando explorado seus diferentes significados, sendo da maior importância considerar os invariantes operatórios do conceito, explicitamente, na elaboração das tarefas.

As situações de parte-todo, que são muito usadas no ensino de fração no Brasil, resumem-se, muitas vezes, a dividir uma área em partes iguais, a nomear a fração como o número de partes pintadas sobre o número total de partes e a analisar a equivalência e a ordem da fração por meio da percepção Campos e Magina (2001). Tais ações levam os alunos a desenvolver seus raciocínios sobre fração Campos, Magina e Nunes (2006) baseados principalmente na percepção em detrimento das relações lógico-matemáticas nela envolvidas Nunes e Bryant (1997) e Nunes et al (2005).

O uso de outras situações pode ser mais proveitoso para a apropriação da lógica como alicerce para as idéias de fração. Por exemplo, problemas com o significado quociente podem ser usados para as crianças se apropriarem do invariante de ordenação das frações por meio do raciocínio lógico: quanto mais crianças para dividirem o bolo, menor o pedaço de bolo que cada uma receberá. Esta relação inversa entre o divisor e o quociente poderia ajudar as crianças a entenderem que quanto maior o denominador, menor à parte. Nessas situações com significado quociente o professor poderia também usar a razão para ajudar as crianças a entenderem o invariante de equivalência de frações: dada uma mesma razão entre crianças e bolos, a fração correspondente será equivalente, mesmo que o número de bolos e crianças possa diferir nos exemplos. A razão também poderia ser usada em situações nas quais as frações são descritores de quantidades intensivas (medida): se duas misturas de tinta foram feitas com a mesma razão de tinta azul para tinta branca, a cor será a mesma e as frações serão equivalentes, mesmo que a quantidade total de tinta seja diferente, Campos, Magina, Canova & Silva (2010). Ainda, poderíamos pensar na fração como o valor escalar aplicado a uma quantidade Nunes (2003). Estamos falando do significado de operador multiplicativo. No caso do número inteiro, por exemplo, podemos dizer que compramos 12 balas; no caso da fração, poderíamos dizer ¾ de um conjunto de balas. A idéia implícita nesses exemplos é que o número é um multiplicador da quantidade indicada. Assim, podemos dizer que ganhamos ¾ das balas de um pacote que continha 16 balas.

Ao considerarmos situações em que as frações são usadas, diferentes autores Brousseau, Brousseau e Warfield (2004) e Kieren (1988;1993) propõem diferentes classificações. Uma distinção comum a todas as classificações refere-se a situações denominadas parte-todo e quociente. Numa situação parte-todo, uma unidade (ou um inteiro) é dividida em partes iguais: o denominador designa o número de partes em que o todo foi dividido e o numerador designa o número de partes tomadas. Numa situação quociente, existem duas medidas: a fração indica que uma medida, representada pelo numerador, foi dividida pela outra, representada pelo denominador.

Na literatura encontramos estudos tais como Behr (1992); Behr, Wachsmuth, Post & Lesh (1984); Hart (1986); Hart (1986); Kamii & Clark (1995); Kerslake, (1986) que apontam dificuldades dos alunos na identificação de frações equivalentes, e em especial, quando lidam com frações em situação de parte-todo.

Streefland (1987; 1993; 1997) sugeriu que os alunos têm uma melhor compreensão das frações em situações quociente. Estudos recentes Mamede (2008); Nunes e Bryant (2008); Nunes (2007) mostram que os alunos têm desempenho melhor em tarefas semelhantes sobre frações quando as tarefas envolvem situações quociente do que quando elas envolvem situações parte-todo. A implicação desses estudos para o ensino e aprendizagem de frações é a hipótese de que seria mais proveitoso iniciar o ensino das frações em situações quociente e posteriormente estender o uso desse conceito a outras situações.

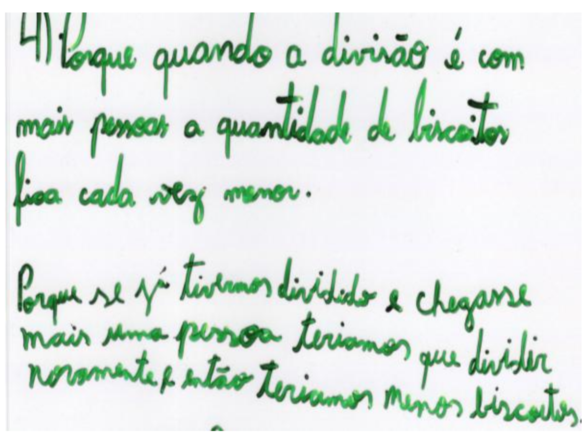
O método utilizado neste estudo, ora analisado, envolveu uma classe de 4º ano e uma classe de 5º ano num total de 37 alunos e 2 professoras. Antes da intervenção foi realizada uma sessão de uma hora e meia, com as professoras, a fim de lhes apresentar os pressupostos da pesquisa. Em cada classe foram realizadas três sessões com o propósito de verificar o nível de compreensão dos alunos ao analisar problemas de frações em situações quociente e parte-todo. Durante a intervenção os alunos foram distribuídos em mesas com 4 alunos cada. Os problemas que compunham o protocolo de pesquisa foram apresentados por meio de slides em power point.

Os alunos resolviam o problema apresentado, individualmente, sem suporte de material concreto, registravam suas respostas primeiramente numa folha de papel e após discussão com seu grupo, eles transcreviam a solução da tarefa numa transparência. Caso não houvesse acordo e o grupo tivesse mais de uma solução, todas elas eram transcritas para a transparência. Neste momento um aluno era escolhido pelo grupo para ser o relator do mesmo e dirigia-se à frente da classe, colocava sua transparência no retro-projetor e defendia a solução encontrada pelo grupo. Um debate coletivo era estabelecido para promover a aprendizagem colaborativa. A pesquisadora questionava o raciocínio dos alunos, mesmo quando corretos. As sessões foram gravadas e filmadas, mas o filme ficou prejudicado dado às péssimas condições da imagem e som.

Utilizamos tarefas do protocolo de pesquisa elaborado pela professora Terezinha Nunes e sua equipe na Universidade de Oxford e que foram aplicadas tanto no Brasil como na Inglaterra e em Portugal. A seguir apresentaremos duas questões, acompanhadas de soluções de alunos e observações pertinentes.


*Figura 1*. Questão 1

Na resposta do aluno copiada abaixo, Figura 2, temos um exemplo de argumentação que evidencia a compreensão do invariante ordem.


4) Porque quando a divisão é com mais pessoas a quantidade de biscoitos fica cada vez menor.

Porque se já tivermos dividido e chegasse mais uma pessoa teriamos que dividir novamente e então teriamos menos biscoitos.

*Figura 2.* Resposta de um grupo de alunos


*Figura 3.* Questão 2

Transcrevemos abaixo exemplos de argumentos usados por alunos e que evidenciam a compreensão da equivalência:

C: Porque não interessa quando eles ganharam o pedaço, porque quando eles ganharam os terços, esses três ganham dessa pizza e acabou uma pizza, e esses ganham da outra pizza, e acabaram as duas. Quando eles cortam as duas ao mesmo tempo, eles também dividem igualmente e acabam as duas pizzas.

P: É o mesmo tanto que um terço. É a mesma quantidade de pizza mas você partiu cada um em dois pedaços. (…) Se fosse 24 fatias, cada um ia ganhar 8. Mas era a mesma quantidade de pizza.

R: Se eles compraram duas pizzas, eles podem dar a primeira pizza para 3 meninas e a outra para as outras 3 meninas. (…) Se elas todas ganharam um pedaço de uma pizza dividida em 3, então elas todas ganham o mesmo tanto (Figura 4).

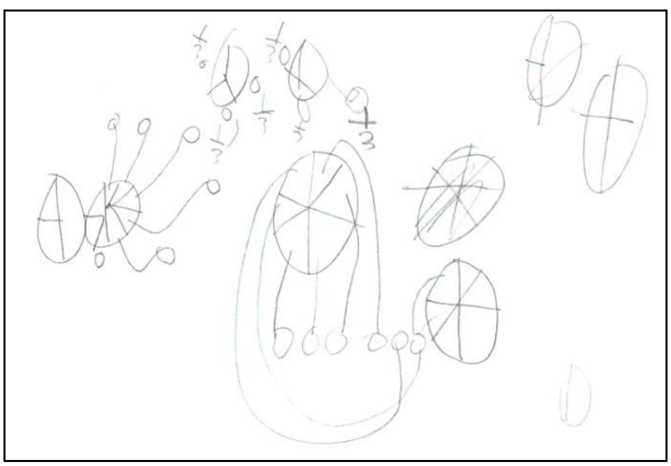


*Figura 4.* Representação da resposta do aluno R.

Algumas observações interessantes sobre as soluções apresentadas pelos alunos nesta questão. Os alunos adotaram a linguagem de frações com facilidade e sem necessidade de usar a partição; para a maioria dos alunos, a divisão igual e exaustiva, utilizando a correspondência, foi argumento suficiente para demonstrar a equivalência das frações; a soma de 1/6 mais 1/6 foi discutida mais em alguns grupos que outros; alguns alunos escrevem a soma como 2/12 e outros como 2/6; ao questionarmos sobre a relação entre a divisão e a representação fracionária, a maioria dos alunos conseguiu perceber que a situação era 2 dividido por 6; os alunos adotaram a linguagem de frações com facilidade e sem necessidade de usar a partição.

Importante registrar que embora os alunos não tenham conseguido resolver todos os problemas, muitos deles ultrapassaram nossas expectativas. Pensávamos que os problemas poderiam se tornar repetitivos, mas os alunos se interessaram pela noção de equivalência. Por exemplo, foi discutido que há muitas maneiras de se representar a mesma quantidade usando frações; que a fração pode ser diferente, porém a quantidade é a mesma e que se pode, por exemplo, cortar a pizza no dobro de pedaços, e cada novo pedaço vai ser a metade do anterior.

Finalmente os resultados deste estudo, para este grupo de alunos, apontam que a experiência de trabalhar frações com situações de quociente pode promover novas reflexões sobre o conceito deste conteúdo matemático fazendo avançar a aprendizagem deste conceito.

## Bibliografia e referências

Behr, M.; Lesh, R.; Post, T.; Silver, E. (1983). Rational number concepts. In: Lesh, R.; Landau, M. (Ed.). Acquisition of mathematics concepts and processes. New York: Academic Press. pp. 91-126.

Behr, M.;Wachsmuth, I.; Post,T.; Lesh, R. (1984). Order and Equivalence. Journal for Research in Rational Numbers: A Clinical Teaching Experiment. Mathematics Education, 15 (5), 323-341.

Behr, M.; Harel, G.; Post. T.; Lesh, R. (1992). Rational number, ratio and proportion. In: Grows, D. A. (Ed), Handbook of research on mathematics teaching and learning. New York: MacMillan, pp. 296-333.

Brousseau, G. ; Brousseau, N. ; Warfield, V.(2004). Rationals and decimals as required in the school curriculum. Part 1: Rationals as measurement. Journal of Mathematical Behavior, 23(1), 1 – 20.

Campos, T.; Magina, S. (2004). Primary school concepts of fractions and teaching strategies. In: 10 International Conference on Mathematics Education -- 10 ICME, 2004, Copenhagem. 10 International Conference on Mathematics Education.1, 1-8.

Campos, T.; Magina, S.; Nunes, T.(2006).O professor polivalente e a fração: conceitos e estratégias de ensino. Educação Matemática Pesquisa, 8 (1), 125-136.

Campos, T.; Magina, S.; Canova, R.; Silva, A. (2010) Sobre a Pesquisa e o Ensino de Números Racionais na sua Representação Fracionária. In: X Encontro Nacional de Educação Matemática. Salvador, Brasil. 1, 1-8.

Hart, K. (1986). The Step to Formalisation. In L. Burton & C. Hoyles (Eds.), Proceedings of the Tenth International Conference of Psychology of Mathematics Education, 159- 164. London: University of London - Institute of Education.

Kamii, C.; Clark, F. (1995). Equivalent Fractions: Their Difficulty and Educational Implications.

Journal of Mathematical Behavior. 14, 365-378.

Kerslake, D. (1986). Fractions: Childten's strategies and errors. Londres: NFR-NELSON.

Kieren, T. (1976). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. In: Lesh, R. (Ed.). *Number and measurement: Paper from a research workshop.* Columbus, Ohio: Eric/Meac, pp.101-144.

Kieren, T. (1988). Personal knowledge of rational numbers: its intuitive and formal development. In: Hiebert, J. & Behr, M. (Ed.). *Number concepts and operations in the middle grades*. Hillsdale, NJ: Erlbaum, pp.162-80.

Kieren, T. (1993). Rational and Fractional Numbers: From Quotient Fields to Recursive Understanding. In T. Carpenter, E. Fennema & T. Romberg (Eds.), *Rational Numbers – An Integration of Research.* Hillsdale, New Jersey: LEA, pp. 49-84.

Mamede, E.; Nunes, T. (2008). Building on Children's Informal knowledge in the Teaching of Fractions. In Olimpia Figueras, J. Cortina, S. Alatorre, T. R. & Sepúlveda, A. (Eds.) *Proceedings of the Joint Meeting of 32th Psychology of Mathematics Education and PME-North America XXX*. México: Morélia. 3, 345-352.

Nunes, T.; Bryant, P. (1997). *Crianças fazendo matemática*. Porto Alegre: Artes Médicas.

Nunes, T.; *et al.(*2001) Introdução à Educação Matemática: os números e as operações numéricas. São Paulo: PROEM.

Nunes, T.; BryanT, P.; Pretzlik, U.; Hurry, J. (2003). *The effect of situations on children's understanding of fractions*. Trabalho apresentado no encontro da British Society for Research on the Learning of Mathematics. Oxford, jun.

Nunes, T.; Bryant, P.; Pretzlik, U.; Evans, D.; Wade. J.; Bell, D. (2004). Vergnaud's definition of concepts as a framework for research and teaching. Annual Meeting for the Association pour la Recherche sur le Développement des Compétences, Paper presented in Paris : 28-31, January.

Nunes, T.; Campos, T.; Magina, S.; Bryant, P. (2005). *Educação matemática: números e operações*. São Paulo: Cortez.

Nunes, T.; Bryant, P. (2006). *Improving literacy through teaching morphemes* London: Routledge.

Ohlsson, S. (1988). Mathematical Meaning and Applicational Meaning in the Semantics of Fractions and Related Concepts. In Hiebert, J. & Behr, M.$ (Eds.), *Number Concepts and Operations in Middle-Grades.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, pp.53-92.

Streefland, L. (1978). Some Observational results Concerning the Mental Constitution of the Concept of Fraction. *Educational Studies in Mathematics*. 9, 51-73.

Streefland, L. (1991). Fractions in Realistic Mathematics Education: A Paradigm of Norwell, MA: *Kluwer Academic Publishers*. Developmental Research.

Streefland, L. (1997). Charming fractions or fractions being charmed?, In Nunes,T. & Bryant, P. (Eds) *Learning and Teaching Mathematics* – An International perspective. East Sussex: Psychology Press, pp. 347-372.

Vergnaud, G. (1983). Quelques problèmes theóriques de la didactique à propos d'un exemple: les structures additives. *Atelier International d'Été: Recherche en Didactique de la Physique*. La Londe les Maures, França.

Vergnaud, G. (1998). A comprehensive theory of representation for mathematics education. *Journal of Mathematical Behavior*. 17(2), 167-181.