XIII CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
CIAEM 2011
26 - 30 Junio, 2011
Recife, Brasil
50 años
del Comité Interamericano de Educación Matemática

¿Cómo debe ser la formación de profesores para seguir una estrategia de resolución de problemas en la educación matemática?

Sobre un Programa de Formación y Desarrollo Profesional de los Profesores Sustentado en la Resolución de Problemas

Manuel **Santos**-Trigo
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Cinvestav-IPN, México
Mexico
msantos@cinvestav.mx

Resumen

La educación y el desarrollo profesional de los profesores de matemáticas representa un reto importante en una sociedad que demanda reformas urgentes en los sistemas de educación. ¿Quién debe formar a los profesores de matemáticas? ¿Qué contenidos matemáticos y didácticos se deben incluir en los programas de formación de profesores? ¿Cómo se estructura un programa de formación de profesores? ¿Cuál es el papel de la resolución de problemas en la formación profesional de los profesores? Con estas preguntas iniciales se esbozan principios y actividades importantes en la construcción de un programa de formación que fomente actividades de resolución de problemas en la educación y desarrollo profesional de los profesores.

Palabras clave: Formación de profesores, resolución de problemas.

Contexto

En el ámbito internacional existe un pleno reconocimiento sobre la importancia de la formación profesional de los profesores de matemáticas; sin embargo, existe una gran variedad de modelos y sobre los contenidos que se deben incluir en los programas de formación y acerca de quién debe dirigir esa formación. Por ejemplo, en algunos países las universidades son responsables de los programas de formación y generalmente participan el departamento de matemáticas y la facultad de educación; en otros casos existen instituciones, como las escuelas normales o colegios, que se responsabilizan de la educación y desarrollo de los profesores. El tiempo de duración de los programas también es variable e incluye desde tres en países como China para profesores del nivel básico y hasta cinco como en Alemania para el nivel secundaria. Tatto, Lerman & Novotna (2011) mencionan que se sabe poco acerca de las oportunidades para aprender matemáticas y pedagogía que se les ofrecen a los futuros profesores y a los profesores en ejercicio en el mundo y acerca de la efectividad de esas oportunidades. Afirman que "…la comparación de los efectos en la preparación de los profesores en el ámbito internacional es importante en este momento caracterizado por el clima de las reformas en la educación" (p. 314). En este contexto, resulta importante conocer, contrastar, y analizar las ventajas y limitaciones asociadas con los distintos modelos.

Sobre el conocimiento matemático para la enseñanza

Un tema crucial en los programas de formación de los profesores se relaciona con los contenidos de la disciplina y el conocimiento didáctico que se deben incluir y las formas de estudiarlos. Papick (2011) afirma que "los profesores de matemáticas deben comprender profundamente las ideas matemáticas (conceptos, procedimientos, habilidades de razonamiento) que son centrales en los cursos o grados que estarán enseñando y ser capaz de comunicar estas ideas en una manera apropiada al desarrollo [cognitivo] del alumno". ¿Qué significa que los profesores tengan un conocimiento sólido o robusto de las matemáticas? ¿Qué conocimiento o contenido matemático y a qué profundidad deben dominar los profesores de matemáticas del nivel básico o preuniversitario? ¿Cómo los profesores pueden construir un pensamiento sólido o profundo de la disciplina? En términos del conocimiento didáctico que los profesores deben dominar se incluye establecer dinámicas de interacción entre los estudiantes que fomenten su participación activa en los procesos de resolución de problemas. Aquí resulta importante que los estudiantes comuniquen o expresen sus ideas y exhiban sus formas de pensar en los procesos de solución. El profesor debe valorar y guiar a los estudiantes hacia la presentación de argumentos basados en el razonamiento matemático. Esta valoración se relaciona con la importancia que el profesor desarrolle una comprensión o conocimiento profunda de la disciplina y exhiba ese conocimiento en las respuestas, comentarios y explicaciones que proporcione a las preguntas de los estudiantes. Por ejemplo, Adler y Davis (2006) argumentan que los profesores deben orientar a los estudiantes en el desarrollo de recursos e ideas consistentes con la práctica matemática. Esto incluye señalar cuando los comentarios o respuestas a los problemas que exhiban los estudiantes incluyan errores o limitaciones matemáticas. Adler y Davis Ilustra algunas respuestas que los estudiantes escriben al resolver la ecuación $x^2 – 2x = -1$:

1. estudiante 1: x = 1 porque si $x^2 – 2x = -1$, entonces $x^2 = 2x -1$ y $x = \sqrt{2x-1}$
   x no puede ser 0 porque se tendría $0 = \sqrt{-1}$
   x no puede ser negativa porque se tendría la raíz cuadrada de un negativo
   x=1 funciona porque tenemos 1 = 1 y ningún otro número mayor que uno cumple.
2. estudiante 2: x = 1 porque si $x^2 - 2x = 1$, entonces $x(x-2) = -1$ y así x = -1 o x -2 = -1, lo que nos lleva a que x = 1 (porque x = -1 no es cierto)
3. x = 1 porque si $x^2 - 2x = 1$, entonces $x^2 - 2x - 1 = 0$ y esto se factoriza como $(x-1)(x-1) = 0$; y así x = 1.
4. estudiante 4: x = 1. Dibujo las gráficas y = -1 y $y = x^2 - 2x$. Estas se intersecan solamente en x = 1.
5. x = 1. Sustituí un rango de valores para x en la ecuación y 1 es el único que la satisface.

Así, el conocimiento didáctico de los profesores debe incluir recursos que les permita explicar a sus estudiantes caminos y formas apropiadas de utilizar conceptos y representaciones matemáticas. Este conocimiento es un vehículo que les puede ayudar a identificar limitaciones y reconocer las ventajas de examinar sus propias respuestas desde diversas perspectivas. De manera similar, Papick (2011) afirma que el conocimiento matemático para la enseñanza debe preparar a los profesores para que respondan de manera sustentada una serie de preguntas que los estudiantes enfrentan en sus experiencias de aprendizaje. Algunas de esas preguntas incluyen:

1. Mi profesor del curso del año pasado me dijo que lo que yo haga de un lado de una ecuación también lo debo hacer del otro lado para mantener la igualdad. No entiendo que hago mal al sumar 1 al numerador de ambas fracciones en la igualdad $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$ y así obtener $\frac{2}{2}=\frac{3}{4}$.
2. ¿Por qué el libro dice que un polinomio $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$ si y sólo si cada $a_i = 0$, y después dice que $2x^2 + 5x + 3 = 0$?
3. En la tarea se nos pide encontrar el siguiente término en la lista de números 3, 5, 7, …? John dice que la respuesta es 9 (pensó en los números impares), yo digo que la respuesta es 11 (pensé en los primos), y María dice que la respuesta es 3 (pensó en el patrón periódico). ¿Quién tiene la razón?
4. Mi profesor de álgebra dice que $\frac{x^2+x-6}{x-2}=\frac{[(x+3)(x-2)]}{(x-2)}=x+3$, pero el novio de mi hermana (quien estudia en la universidad) dice que no son iguales, porque la expresión original no está definida en 2, pero la otra expresión da 5 cuando es evaluada en 2.
5. ¿Por qué debemos aprender la fórmula de la ecuación cuadrática, si nuestras calculadoras pueden encontrar raíces hasta con 8 decimales?

Papick (2011) además establece que los profesores deben estar preparados para: evaluar el aprendizaje de los estudiantes a través de una variedad de métodos y tomar decisiones curriculares apropiadas (seleccionar e implementar un currículum), comprender el contenido matemático y comunicar las metas del aprendizaje de la disciplina a los padres, autoridades, etc. Es decir, se intenta que el profesor construya y estructure un marco que sustente sus prácticas de enseñanza que le permita explicar y responder diversas situaciones auténticas que emerjan durante el desarrollo de la enseñanza.

La resolución de problemas y la formación del profesor

La resolución de problemas es una forma de interactuar y pensar acerca de las situaciones que demandan el empleo de recursos y estrategias matemáticas. Es decir, promueve el desarrollo o construcción de un pensamiento inquisitivo donde el conocimiento matemático se conceptualiza en términos de dilemas o preguntas que demandan el uso y formas de pensar consistentes con el quehacer de la disciplina (Santos, 2007). En los programas de formación y desarrollo profesional de los profesores, los participantes tendrán oportunidad de participar en diversas actividades de resolución de problemas. Estas actividades incluyen la comprensión de algún concepto matemático, la formulación de algún problema o la resolución de problemas situados en diversos contextos. En cada una de las tareas o problemas se recomienda presentar un pasaje que describa el contexto de la actividad. El contexto puede incluir situaciones de la vida cotidiana (la excavación de un túnel para la construcción del metro, o la toma de alguna decisión importante); situaciones artificiales donde se asumen condiciones iniciales asociados al comportamiento de un fenómeno de variación (asumir que en un tratamiento médico el paciente elimina un cantidad constante de medicamento cada determinado tiempo), o contextos matemáticos donde el estudiante tiene que construir configuraciones geométricas, identificar patrones numéricos o analizar funciones recursivas (el ejemplo anterior está situado en un contexto matemático). De manera general, en la formación de los profesores las actividades de resolución de problemas deben promover:

1. Una comprensión conceptual del conocimiento matemático que se expresa en términos de conexiones entre las ideas, conceptos y operaciones entre relaciones. Por ejemplo, un acercamiento conceptual hacia el estudio de la derivada implica que el estudiante establezca conexiones entre los diferentes significados asociados a este concepto; es decir, entre el significado geométrico, la definición formal, como razón de cambio, velocidad instantánea, y cálculo de derivadas.
2. Una fluidez operativa o procedimental donde el estudiante desarrolle estrategias y habilidades para desarrollar, efectuar operaciones, y aplicar reglas de una manera flexible, apropiada y eficiente.
3. Un método inquisitivo que le permita formular, representar y resolver problemas matemáticos. Es decir, el estudiante constantemente se debe plantear preguntas que lo lleven a la búsqueda de relaciones o conjeturas y formas de representarlas que permitan explorarlas de manera sistemática.
4. Un método de razonamiento donde el estudiante valore la importancia de sustentar o rechazar con diversos tipos de argumentos, incluyendo los formales y contraejemplos, relaciones o conjeturas matemáticas.
5. Una inclinación hacia el estudio de las matemáticas que le permita valorarlas como una disciplina sensible, útil, y necesaria en la toma de decisiones en esta sociedad.
6. Una serie de hábitos que deben ser parte de la cultura en el salón de clase (Cuoco, 1996). Entre esos hábitos se incluyen la búsqueda de patrones y relaciones, considerar casos especiales, formular conjeturas, identificar estructuras, evaluar los procesos de solución, establecer conexiones, justificar o validar soluciones, refinar argumentos, generalizar soluciones y comunicar resultados.

Sobre la estructura de los problemas

Resulta importante identificar aspectos asociados con la discusión que se promuevan en la resolución de los problemas. Por ejemplo es importante identificar los conceptos, estrategias y procesos de solución que emerjan durante el proceso de solución.

a. Conceptos Matemáticos Relevantes Asociados con el Problema o Actividad

La idea es que para cada actividad se identifiquen los conceptos y recursos matemáticos que son relevantes en la formulación y posibles caminos de solución del problema. En particular, los modelos o representaciones que se construyan a partir del empleo de las herramientas tecnológicas. Esta información es fundamental para evaluar el potencial teórico de la actividad y para diseñar las guías de su uso en el salón de clases.

b. Procesos de Solución

En particular, resulta importante identificar las formas potenciales en que las ideas matemáticas asociadas con la actividad se representan y estructuran para proponer caminos de solución. Por ejemplo, si una idea base en la actividad es la ponderación de la información para ordenar un conjunto de datos, resulta útil identificar la forma en que se asignan determinados pesos a los parámetros, las transformaciones de los datos, las formas de representarlos (tablas), las operaciones y eventualmente los modos de comunicar los resultados. En particular, interesa identificar las heurísticas que se destacan con el empleo de las diversas herramientas.

c. Las Herramientas Computacionales

Interesa discutir el potencial que ofrece cada una de las herramientas tecnológicas en los caminos de solución. Por ejemplo, Excel puede resultar de gran utilidad al analizar información que involucre datos numéricos o analizar el comportamiento de fenómenos continuos a partir de modelos discretos (con procesos de refinamiento) (tablas); Cabri-Geometre resulta útil en la construcción de representaciones dinámicas que permiten determinar invariantes o relaciones a partir del movimiento de determinadas partes de una configuración; o el uso de la calculadora favorece la búsqueda y entendimiento de patrones recursivos o el análisis de expresiones algebraicas y sus correspondientes representaciones gráficas. Además, aquí es importante analizar el uso de otras herramientas como Internet, y la Tableta iPad en los procesos de comunicación de resultados. El empleo sistemático de herramientas computacionales requiere de tareas, actividades y problemas que no sean sólo una adaptación simplista de las que se usan con lápiz y papel, sino tareas o problemas donde las herramientas funcionen como un mediador entre el individuo/ estudiante y la construcción o desarrollo del conocimiento matemático. Por ejemplo, el empleo de un software dinámico ofrece la oportunidad al usuario de construir configuraciones dinámicas de los problemas y éstas representan oportunidades para identificar y explorar no solamente nuevas conjeturas o relaciones; sino también rutas distintas para validarlas o sustentarlas (Santos Trigo, 2007).

d. Soluciones Potenciales

Al trabajar la actividad, los participantes generarán información importante que les permitirá establecer un plan para utilizarlos en sus prácticas de enseñanza. Es decir, antes de implementar el problema en un escenario de enseñanza será importante caracterizar los caminos de solución, las conexiones y posibles extensiones de la actividad original. Esto también ayuda a evaluar las cualidades matemáticas y las posibles limitaciones que puedan emerger durante el periodo de su implementación.

Algunas preguntas de reflexión que se deben promover en las actividades de resolución de problemas incluye: ¿resultó apropiado el contexto de la actividad? ¿En el enunciado de la actividad se emplean términos claros o bien definidos? ¿Es posible identificar las ideas matemáticas fundamentales (ponderación, orden, estimación, prueba, etc.) y los recursos matemáticos necesarios (definiciones, algoritmos, procedimientos, notación, etc.)? ¿Cuál es el papel de las herramientas tecnológicas en términos del tipo de análisis, representaciones o significados que se le dan a las ideas y conceptos matemáticos relacionados con el problema? ¿Cuáles son las limitaciones de la actividad?

Comentarios finales

Las actividades de resolución de problemas resultan un vehículo importante para que en su formación los profesores expresen sus ideas y las sometan a una crítica dentro de la comunidad de aprendizaje. En este contexto, la misma actividad se transforma en un mecanismo de aprendizaje y reflexión donde todos tienen oportunidad de evaluar sus propias ideas, escuchar las ideas de otros y extender sus acercamientos o aprender nuevos conceptos que aparecen durante la búsqueda de conexiones o extensiones de la propia actividad. Además, deben desarrollar estrategias que les permitan expresar de manera oral y escrita tanto sus ideas como sus productos o resultados. Es importante mencionar que el uso sistemático de las herramientas tecnológicas intenta que los profesores en su formación constantemente mejoren sus métodos para resolver problemas (sean cada vez más robustos) y desarrollen otras formas de búsqueda, exploración y argumentación y comunicación de soluciones o relaciones matemáticas. Es decir, construir y contrastar las formas de razonamiento que emergen a partir del empleo de las diversas herramientas tecnológicas.

Referencias y bibliografía

Cuoco, A., Goldenberg, P. & June, M. (1996). Habits of mind: An organizing principle for mathematics curriculum. *Journal of Mathematical Behavior*, 15:375-402.

Papick, I. J. (2011). Stengthening the mathematical content knowledge of middle and secondary mathematics teachers. *Notices of the AMS.* (58)3, 389-392.

Santos-Trigo, M. (2007). *La resolución de problemas matemáticos: fundamentos cognitivos*. México: Trillas.

Tatto, M. T., Lerman, S. & Novotna, J. (2010). The organization of the mathematics preparation and development of teachers: a report from the ICMI Study 15. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13:313-324.