



## Uma abordagem para o ensino de Geometria Analítica através da Resolução de Problemas

Mário Barbosa da **Silva**  
Instituto Federal de São Paulo - campus Itaquaquecetuba  
Brasil

[prof.mariodasilva@outlook.com](mailto:prof.mariodasilva@outlook.com)

Ilda Pavret **Silva**  
Universidade Cruzeiro do Sul  
Brasil

[ildapavret@gmail.com](mailto:ildapavret@gmail.com)

Norma Suely Gomes **Allevato**  
Universidade Cruzeiro do Sul  
Brasil

[normallev@gmail.com](mailto:normallev@gmail.com)

Janaína Posso **Possamai**  
Universidade Regional de Blumenau  
Brasil

[janainap@furb.br](mailto:janainap@furb.br)

### Resumo

Este trabalho apresenta a implementação de uma atividade de sala de aula desenvolvida com estudantes da 3ª série Ensino Médio Profissionalizante e tem por objetivo analisar a construção do conhecimento matemático em relação aos conceitos da Geometria Analítica, tendo sido implementada a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. São desenvolvidas considerações teóricas sobre Resolução de Problemas, e o estudo configurou-se como uma pesquisa de natureza qualitativa, com dados construídos a partir da implementação de uma estratégia de ensino por meio da resolução de um problema gerador. Os resultados evidenciaram que a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas contribuiu na construção do conhecimento matemático do estudante em relação aos conceitos de circunferência e suas conexões com outras áreas do saber e, também, favoreceu processos avaliativos ao professor, em relação à aprendizagem desencadeada e orientada pelo problema gerador.

*Palavras-chave:* Educação Matemática; Resolução de Problemas; Geometria Analítica; Ensino-Aprendizagem-Avaliação; Ensino Médio.

### **Introdução**

As transformações sociopolíticas e econômicas no mundo atual têm ocorrido de forma latente, e exigido que os sistemas educacionais ofereçam, aos estudantes da Educação Básica, uma formação para enfrentar novos desafios, valorizar a criatividade, desenvolver o pensamento reflexivo e, principalmente, resolver problemas. Isso significa que os sistemas educacionais precisam preparar o professor para utilizar métodos eficazes para melhorar a qualidade de ensino em uma sociedade economicamente competitiva, tecnológica, complexa e em constante mudança em todas as áreas do saber. Nesse contexto, a resolução de problemas pode ser uma estratégia de ensino eficiente para promover a compreensão do conteúdo, em particular do conteúdo matemático, e desenvolver diversas habilidades cognitivas nos estudantes que são relevantes para a vida e para novas aprendizagens.

No âmbito da Educação Matemática, a literatura sobre Resolução de Problemas se constitui numerosa e diversificada em todos os níveis de ensino em território brasileiro (Allevato & Onuchic, 2021; Possamai & Silva, 2020; Silva & Allevato, 2021) e internacional (Cai & Hwang, 2020; Cai & Lester, 2012; Leikin & Elgrably, 2020), sendo indicada nos documentos oficiais (BRASIL, 2018; NCTM, 2000) como uma forma privilegiada na aprendizagem matemática.

Desse modo, a Resolução de Problemas, como uma abordagem atual, apresenta características notáveis em sala de aula, no sentido de promover aprendizagem, despertar o interesse e a participação dos estudantes de forma contextualizada e dinâmica, e adequada ao cenário de complexidade em que se encontram as escolas. Vale (2017, p. 131), ao mencionar a resolução de problemas como uma demanda emergente da prática cotidiana dos professores, tendo em vista suas contribuições no processo de ensino e aprendizagem, é contundente em relação “à necessidade de práticas de sala de aula onde se desenvolvam capacidades criativas dos estudantes, permitindo que todos participem ativamente na sua aprendizagem, onde possam fazer as suas pesquisas e compartilhar as suas descobertas”.

Por meio do presente trabalho, se objetiva apresentar e analisar a implementação de uma atividade em sala de aula e as contribuições da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, segundo Allevato e Onuchic (2021), na construção de conhecimento matemático por estudantes do Ensino Médio relacionado ao conceito de circunferência.

Para fundamentar este trabalho, na sequência desta introdução, realizamos breve discussão teórica sobre Resolução de Problemas. Em seguida, explicitamos os procedimentos metodológicos adotados, apresentamos a discussão e análise da atividade e, por fim, as considerações finais.

## Resolução de Problemas

Allevato e Onuchic (2021) defendem o Ensino-Aprendizagem-Avaliação de um novo conteúdo matemático através da Resolução de Problemas, iniciando com um problema gerador. A dinâmica de trabalho, nessa metodologia de ensino, exige uma nova postura, tanto do professor como do estudante. O processo é centrado no estudante enquanto o professor atua como mediador, incentivador, questionador. Segundo Cai e Lester (2012, p. 149) “orientar os alunos a investigarem ideias matemáticas importantes” é essencial para uma boa aula de matemática.

Essas pesquisadoras apresentam uma sugestão de como pode ser realizado esse trabalho em sala de aula, organizando-o em dez etapas:

(1) proposição do problema, (2) leitura individual, (3) leitura em conjunto, (4) resolução do problema, (5) observar e incentivar, (6) registro das resoluções na lousa, (7) plenária, (8) busca do consenso, (9) formalização do conteúdo, (10) proposição e resolução de novos problemas. (Allevato & Onuchic, 2021, p. 52)

A eficácia dessa metodologia decorre de um conjunto de fatores e ações tanto do professor como do estudante. O primeiro precisa, diante de seus compromissos com o ensino, preparar e selecionar problemas geradores que, de acordo com Allevato e Onuchic (2021, p. 47), são “[...] o ponto de partida e orientação para a aprendizagem de novos conceitos e novos conteúdos matemáticos”, visando contemplar o conteúdo a ser trabalhado em sala de aula. O estudante, por sua vez, precisa se interessar e se responsabilizar pela construção do seu conhecimento (Onuchic & Allevato, 2011).

Nesse contexto, a compreensão dos conteúdos matemáticos emergirá; ocorrerá a busca por justificativas embasadas em conceitos, para refutar ou não uma resolução; se apresentará a possibilidade de aprender diversas formas de resolução; e serão construídos dados avaliativos durante a aprendizagem. Esclarecendo essas ideias, na sequência apresentamos a metodologia de pesquisa, o relato e a análise da prática desenvolvida em sala de aula.

## Metodologia de Pesquisa

A investigação apresentada neste trabalho é parte de uma pesquisa de doutorado. A prática aqui relatada foi desenvolvida em cinco encontros, realizados em setembro e outubro de 2022, e envolveu 30 estudantes da 3ª série do Ensino Médio do curso de Edificações, de uma escola técnica da cidade de São Paulo, Brasil.

Trata-se de um estudo de natureza qualitativa, priorizando a compreensão da dinâmica da sala de aula, as discussões e as produções dos estudantes que vivenciaram o processo de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática, conforme sugerem Borba, Almeida e Gracias (2018).

Após serem fornecidas orientações sobre a pesquisa, aos estudantes, no primeiro encontro, além da entrega do Termo de Esclarecimento e Livre Consentimento, foi proposto o problema apresentado no Quadro 1.

## Quadro 1

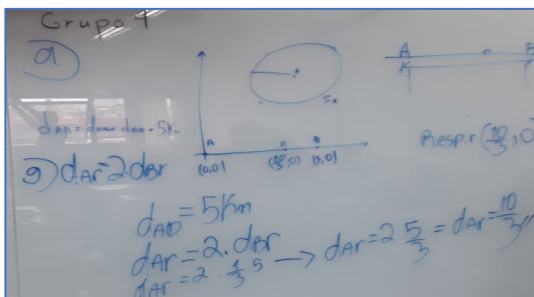
## Problema gerador sobre as emissoras de rádio

Duas emissoras de rádio, a primeira com uma potência que é o dobro da segunda, estão separadas por uma distância de 5 quilômetros. Sabe-se que a intensidade com que um receptor recebe os sinais emitidos é proporcional à potência e inversamente proporcional ao quadrado da distância da emissora ao receptor segundo a equação:  $I = \frac{P}{d^2}$ , onde: (I corresponde a intensidade, P a potência e d, a distância). Determine:

- Os pontos nos quais a qualidade de recepção das emissoras é a mesma;
- Utilizando o GeoGebra, faça a representação dessa situação com a resposta do item anterior e informe qual é o tipo da figura encontrada e os seus elementos;
- Explore o software de geometria dinâmica e crie novas figuras similares à situação expressa no problema.
- A figura encontrada sugere qual significado em relação à situação expressa no problema?
- A expressão encontrada no item (a) pode ser representada de outra maneira? Como?
- No seu conhecimento, este novo conteúdo está relacionado com outro conceito matemático?
- Encontrar a expressão analítica que generaliza o item (a).
- Elabore um novo problema sobre o mesmo conteúdo para propor aos seus colegas.

(Fonte: Adaptado de Giovanni & Bonjorno, 2005, p. 82)

O principal objetivo do problema proposto foi iniciar um novo tópico matemático através de um problema gerador, conforme as recomendações de Allevato e Onuchic (2021), promovendo a aprendizagem do conceito e da equação da circunferência, trabalhados na Geometria Analítica. Tínhamos em mente a dedução formal dessa equação, mobilizada pela utilização do GeoGebra associada à exploração matemática necessária à resolução do problema, com vistas à valorização das relações entre a resolução de problemas e a prova matemática.



Transcrição da imagem:

- Representação no plano cartesiano da situação problema sendo: A(0,0); B(5,0) e R(x,0);
- Representação da situação fora do plano cartesiano;
- $d_{AB} = d_{AR} + d_{RB} = 5 \text{ km};$
- $d_{AB} = 5 \text{ km}$
- $d_{AR} = 2d_{RB}$
- $d_{AR} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 5 \rightarrow d_{AR} = 2 \cdot \frac{5}{3} = d_{AR} = \frac{10}{3};$
- Resp:  $r\left(\frac{10}{3}, 0\right)$

Figura 1. Resolução do item (a) do grupo 4

Cada estudante recebeu uma cópia do problema gerador para uma leitura individual. Em seguida, foi solicitado que formassem grupos<sup>1</sup> de no máximo quatro pessoas e discutissem o problema com os colegas, para desenvolverem uma estratégia de resolução. Esperávamos que os estudantes, após a compreensão do problema, elaborassem uma representação da situação utilizando os recursos do GeoGebra no seu smartphone ou com papel e lápis, e, depois, utilizassem os seus conhecimentos prévios para encaminhar uma possível resolução. Os

<sup>1</sup> Foram formados oito grupos, sendo seis com quatro estudantes e dois com três.

estudantes trabalharam durante quatro encontros<sup>2</sup> para finalizar uma resolução para o problema. Em seguida os grupos apresentaram as resoluções a toda a turma, registrando-as no quadro branco e explicando o que tinham pensado. A apresentação não teve uma ordem pré-estabelecida, ocorrendo conforme cada grupo se dispunha a mostrar os resultados obtidos aos seus colegas. O grupo 4 apresentou, para o item (a), a resolução indicada da Figura 1:

No presente trabalho, vamos nos ater a este item do problema, o item (a), por ser suficiente para as discussões que aqui pretendemos desenvolver, com relação aos conteúdos prévios manifestados pelos alunos e a aprendizagem que desenvolveram através da resolução deste problema. Na plenária e busca pelo consenso, a resolução apresentada por esse grupo gerou discussões envolvendo tanto a representação pictórica como a algébrica. Os estudantes informaram que as emissoras e o receptor poderiam estar representados em uma região do plano cartesiano, e que a circunferência é a melhor figura para representar esse contexto, pois contemplaria as informações do enunciado do problema. Essa compreensão se mostra nos registros dos alunos, indicando as coordenadas dos pontos são  $A(0,0)$ ,  $B(5,0)$  e  $R(x,0)$  nas representações, uma usando o plano cartesiano (para circunferência) e a outra, numa reta (para a distância entre as emissoras A e B. Além disso, ao escrever  $d_{AR} = 2d_{RB}$ , estão considerando a informação fornecida no enunciado de que “a primeira [emissora] com uma potência que é o dobro da segunda” tem implicações na razão entre as distâncias de cada um das emissoras ao receptor. Dito de outro modo: os alunos consideraram a potência de emissão de sinais para deduzir a relação entre as distâncias necessária para a resolução de problemas, muito embora a relação entre as distâncias, assumida por eles, não esteja correta.

Ademais, este grupo foi contundente ao enfatizar que as coordenadas do centro da circunferência precisariam ser as coordenada da emissora A, e que as coordenada da emissora B ficariam sobre uma circunferência, respeitando a distância de 5 km entre elas, constituindo o raio. O receptor ficaria entre as duas emissoras, conforme a representação apresentada pelos alunos. Cabe ressaltar, como pode ser observado na resolução apresentada na Figura 1, que o grupo não encontrou a resposta correta, devido a não elevar a distância ao quadrado. Um estudo prévio mais cuidadoso por parte dos alunos com relação à intensidade, à potência, e à distância envolvida, é essencial para o encaminhamento correto de estratégia de resolução deste problema. Não raro isso se mostra nas primeiras tentativas de resolução de um problema gerador, nessa metodologia. As compreensões e resoluções são aprimoradas nas próximas etapas, como veremos nos dados que ainda serão apresentados neste artigo. Também podemos observar que os alunos, inicialmente, não adotaram uma representação para a incógnita (distância entre o receptor e a emissora B) na resolução algébrica, conforme a Figura 2:

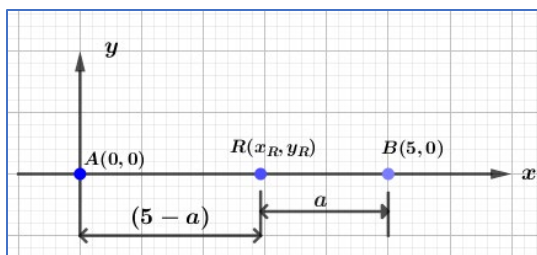


Figura 2. Possível representação pictórica da resolução do grupo 4

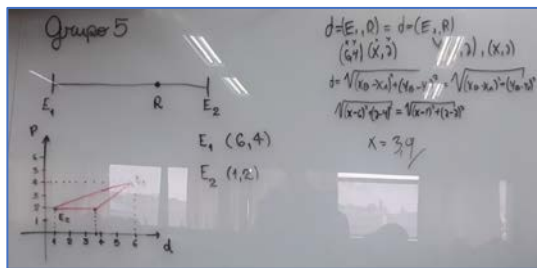
<sup>2</sup> Cada encontro teve duração de 100 minutos, ou seja, duas aulas de 50 minutos cada.

A resolução do grupo 4 desencadeou uma discussão importante entre os estudantes. Os demais grupos conseguiram identificar tanto a coerência e a concordância com as informações do problema como os erros e os equívocos que haviam sido realizados em suas próprias resoluções, ao compreender a resolução do grupo 4. Esses fatos contribuíram para o grupo 4 empenhar-se em “convencer” os estudantes de outros grupos sobre qual seria a resolução adequada para o problema. Na Figura 3 está registrado o momento em que um estudante (de camisa branca) de outro grupo vem à lousa e questiona os procedimentos adotados na resolução apresentada, pelo grupo 4:



Figura. 3 – Interação entre os estudantes na apresentação do grupo 4

Conforme apontam Allevato e Onuchic (2021, p. 50), o objetivo da plenária é fazer com que “[...] o professor estimule os alunos a compartilharem e justificarem suas ideias, defenderem pontos de vistas, compararem e discutirem as diferentes soluções, isto é, avaliarem suas próprias resoluções de modo a aprimorarem a apresentação (escrita) da resolução”. O estudante de camisa branca, do grupo 3, foi convencido de que a sua resposta estava incorreta, e que a dos seus colegas (grupo 4) apresentava coerência com o contexto do problema devido a sua estratégia de resolução acatar as informações fornecidas no enunciado. O grupo 4 explicou que a potência da emissora A é o dobro da emissora B, então, a unidade receptora precisa ficar entre as emissoras, porém, mais próxima da B, para que a qualidade de sinal recebido seja a mesma a partir de ambas.



Transcrição da imagem

- Representação no plano cartesiano da situação problema, sendo:  $E_1(6, 4)$ ;  $E_2(1, 2)$  e  $R(x, 2)$ ;
- Representação da situação fora do plano cartesiano;
- $d = (E_1, R) = d = (E_2, R)$
- $\begin{pmatrix} x & y \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ x & 2 \end{pmatrix} \quad (1, 2), (x, 2)$ ;
- $d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ ;
- $\sqrt{(x - 6)^2 + (2 - 4)^2} = \sqrt{(x - 1)^2 + (2 - 2)^2}$ ;
- $x = 3,9$

Figura. 4 – Resolução do item (a) do grupo 5

Outro fato similar a esse ocorre com a resolução do grupo 5, ao ser compartilhada com colegas de sala durante a plenária: o estudante do grupo 4 identificou que o grupo 5 não acatou a informação sobre a distância entre as emissoras, que era de 5 km. O estudante verificou com o GeoGebra a distância entre elas, e informou ao grupo 5 que os valores adotados para as

coordenadas das emissoras  $E_1(6, 4)$  e  $E_2(1, 2)$ , estabelecidos por eles na resolução, não corresponde a 5 km. E utilizou uma justificativa matemática para refutar a resolução dos seus colegas, pois os estudantes já haviam aprendido o conceito de distância entre dois pontos na geometria analítica no primeiro semestre. A Figura 4 apresenta a resolução do grupo 5.

Esses aspectos vêm ao encontro das pesquisas de Allevato e Onuchic (2021) e Vale (2017), ao mencionarem que a resolução de problemas pode contribuir no processo de ensino e aprendizagem durante apresentação da resposta dos estudantes, promover a participação ativa em todo o processo de resolução e de apresentação de suas respostas, estimular o compartilhamento de descobertas e aprendizagens, e desenvolver a capacidade criativa.

Na resolução desenvolvida pelo grupo 5 (figura 4), o equívoco na distância entre as emissoras e a consideração de um valor específico, 2, como ordenada do ponto R impediram que o grupo chegasse a uma expressão genérica – a equação de uma circunferência – que respondesse ao que foi solicitado neste item do problema.

Em consenso, os estudantes concluíram que os equívocos nas resoluções apresentadas pelos grupos os levaram a, inicialmente, não encontrar a resposta correta do item (a); porém, contribuíram para sanar dúvidas, aprender novos conceitos e relembrar outros que já haviam aprendido anteriormente. Iniciando a formalização do conteúdo o pesquisador apresentou o seguinte exemplo aos estudantes: utilizando os pontos  $A(4, 2)$ ,  $B(7, 6)$ ,  $R(x, y)$  e as informações dadas no problema, foi deduzida a equação  $[x_R^2 + y_R^2 - 20x_R - 20y_R + 150 = 0]$ . Ela responde ao que foi solicitado, representando uma circunferência com centro no ponto  $(10, 10)$  e raio  $\sqrt{50}$ ; em qualquer ponto dessa circunferência em que se encontre o receptor, a intensidade do sinal recebida será igual a partir de ambas as emissoras. Na sequência, os estudantes conseguiram identificar que o principal objetivo da resolução do problema gerador foi promover uma melhor compreensão do conceito de circunferência e da dedução de sua equação. Assim, conforme defendem Allevato e Onuchic (2021), pudemos evidenciar como a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas contribuiu no processo de ensino e aprendizagem sobre circunferência.

Os alunos empenharam esforço e curiosidade para encontrar uma resposta, enfrentaram o desafio de ultrapassar os obstáculos proporcionados pelo problema e de aprender Matemática por essa abordagem. Ao serem questionados pelo pesquisador se a resolução desse problema promoveu alguma aprendizagem matemática, eles foram categóricos, ou seja, se manifestaram com muita segurança e clareza na resposta: “diversos conhecimentos matemáticos, por exemplo, equação da circunferência, distância entre dois pontos, operações algébricas, equações e outros”.

Alguns estudantes apontaram fenômenos físicos e da engenharia, ou seja, fizeram conexões do conteúdo matemático que foi abordado através do problema gerador com outras áreas do conhecimento, conforme recomendam Allevato e Onuchic (2019). Ademais, o processo avaliativo foi contemplado em toda a atividade. Os aspectos relacionados à avaliação, embora não sejam o foco deste estudo, ocorreram no sentido de que foi possível perceber as dúvidas e os equívocos dos alunos na resolução do problema ao longo da implementação da metodologia, possibilitando ao pesquisador realizar mediações que auxiliassem os alunos a corrigir e



compreender seus erros e avançar na construção de conhecimento. (Allevato & Onuchic, 2021; Pironel & Onuchic, 2021; Pironel & Vallilo, 2017)

### Considerações finais

As discussões realizadas durante o desenvolvimento dessa atividade e as análises dos protocolos produzidos possibilitaram evidenciar as contribuições, para a aprendizagem dos estudantes, dos momentos da apresentação das resoluções e plenária, na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Ela visa conduzir os estudantes na construção de conhecimento matemático de forma consciente, responsável e criativa, diante dos objetivos estabelecidos pelo professor para a temática de aula. Ressalte-se que, ao valorizar o protagonismo do estudante, as diferenças individuais na resolução proposta por cada um, seus processos de pensamentos e esforços com a atividade proposta, a interação e a aprendizagem promovida no momento de plenária e na busca pelo consenso e, também, a aceitação do erro um caminho que conduz ao conhecimento, são habilidades relevantes ao desenvolvimento da compreensão do conteúdo neste processo de aprendizagem. Nesse contexto, o professor consegue avaliar e identificar os avanços, as compreensões e as dificuldades apresentadas pelos estudantes e ajudá-los em sua aprendizagem.

### Referências

- Allevato, N. S. G., & Onuchic, L. R. (2021). Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. In: Onuchic, L. R., & Allevato, N. S. G., & Noguti, F. C. H., & Justulin, A. M. (org.): *Resolução de Problemas teoria e prática (2ª ed., pp. 37–58)*. Paco Editorial.
- Allevato, N. S. G., & Onuchic, L. R. (2019). As conexões trabalhadas através da Resolução de Problemas na formação inicial de professores de Matemática. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, 10(2), 1–14.
- Brasil. MEC. Base Nacional Comum Curricular: educação é a base. Brasília: Ministério da Educação, 2018. <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>
- Borba, M. C., & Almeida, H. R. F. L., & Gracias, T. A. S. (2018). Pesquisa em ensino e sala de aula: Diferentes vozes em uma investigação. Autêntica.
- Cai, J.; & Hwang, S. (2020). Learning to teach through mathematical problem posing: theoretical considerations, methodology, and directions for future research. In *International Journal of Educational Research*, 102, (pp. 1–8).
- Cai, J., & Lester, F. (2012). Por que o ensino com a Resolução de Problemas é importante a aprendizagem do aluno? In *Bolletín GEPEM*, (60), 241–254.
- Leikin, R., & Elgrably, H. (2020). Problem posing through investigations for the developed and evaluation of proof-related skills and creativity skills of prospective high school mathematics teachers. In *International Journal of Educational Research*, 102, (pp. 1–13).
- National Coucinl of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*, Reston.
- Onuchic, L. R., & Allevato, N. S. G. (2011). Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. *Boletim de Educação Matemática*, 25(11), 73–98.



- Pironel, M., & Onuchic, L. R. (2021). Resolução de problemas: oportunidade de avaliação para a aprendizagem. In: Onuchic, L. R., & Allevato, N. S. G., & Noguti, F. C. H., & Justulin, A. M. (org.): *Resolução de Problemas teoria e prática* (2ª ed., pp. 59–74). Paco Editorial.
- Pironel, M., & Vallilo, S. A. M. (2017). O papel da avaliação na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. In: Onuchic, L. R., & Leal Junior, L. C., & Pironel, M. (org.): *Perspectivas para a resolução de problemas* (pp. 279–304). Livraria da Física.
- Possamai, J. P., & Silva, V. C. S. (2020). Comunicação Matemática na Resolução de Problemas. *Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática*, 17(e020026), 1-15.  
<https://doi.org/10.37001/remat25269062v17id277>
- Silva, M. B., & Allevato, N. S. G. (2021, 29 a 30 de julho). A Resolução de Problemas em um Ciclo de Formação Continuada de Professores de Matemática [Apresentação de Comunicação Oral]. *I Simpósio de Resolução de Problemas na Educação Matemática*. Maringá, PR, Brasil. <https://drive.google.com/drive/folders>
- Vale, I. (2017). Resolução de Problema um Tema em Contínua Discussão: vantagens das Resoluções Visuais. In: Onuchic, L. R., & Leal Junior, L. C., & Pironel, M. (org.): *Perspectivas para Resolução de Problemas* (pp. 131–162). Livraria da Física.