
# Validación de conjeturas en el aprendizaje de la Matemática

Leticia **Aguilar** Pascual
Colegio de Ciencias y Humanidades-UNAM
México
leticia.aguilar@cch.unam.mx
Ángel Homero **Flores** Samaniego
Colegio de Ciencias y Humanidades-UNAM
México
ahfs@unam.mx

## Resumen

La validación de conjeturas y la argumentación son parte esencial de los debates y de la producción de conocimiento. Según John Dewey, el pensamiento reflexivo es parte inherente del ser humano, todos pensamos de manera reflexiva y este pensamiento puede fomentarse y perfeccionarse en la escuela. Según nuestra experiencia, es posible trasladar el proceso de producción de conocimiento (en este caso, matemático) al salón de clase y fomentar el pensamiento reflexivo en nuestros estudiantes.

El propósito de este taller, dirigido a docentes de bachillerato y nivel superior e investigadores interesados, es ilustrar, desde el modelo de intervención didáctica, *Aprender Matemática, Haciendo Matemática* (Flores, 2010), cómo se trabajan algunas actividades de aprendizaje en geometría euclidiana. El desarrollo de la actividad se hará en grupos pequeños, de preferencia en parejas, con un momento final de reflexión grupal; en un ambiente en el que se fomentaría el respeto, la tolerancia y la colaboración.

*Palabras clave*: Educación Matemática; Pensamiento Reflexivo; Geometría; Validación de conjeturas; Argumentación en matemática; Resolución de problemas.

## Introducción

La matemática se aprende haciendo y reflexionando sobre lo que se hace, éste es el principio que norma nuestro trabajo en el aula de matemática. En este contexto, la argumentación y la validación de conjeturas son dos aspectos importantes del aprendizaje de la disciplina. De hecho, forman parte del concepto de *pensamiento reflexivo* caracterizado por John Dewey (1910, 1916) como una cadena de ideas que parten de una conjetura y llegan a una conclusión razonable.

El proceso de pensamiento reflexivo se inicia con un razonamiento abductivo (Peirce, 1877; Fann, 1970) que lleva al planteamiento de una conjetura como explicación de un hecho inesperado o que llama nuestra atención (despierta nuestra curiosidad); el proceso continúa con la búsqueda de explicaciones plausibles a nuestra conjetura siguiendo razonamientos inductivos y deductivos hasta llegar a una conclusión razonable o aceptable.

El pensamiento reflexivo está en la base del conocimiento científico que caracterizamos como una serie de hipótesis que se corroboran de manera experimental o una serie de experimentos que producen hipótesis por comprobar (Peirce, 1877). Esta indagación, combinación de experimentación y reflexión nos lleva a producir conocimiento nuevo y a comprender mejor el entorno en el que nos desenvolvemos. Para nosotros, los pensamientos matemático, científico, crítico, histórico, social, etcétera, nos son otra cosa que manifestaciones del pensamiento reflexivo cuando se hacen tareas y actividades en esos cuerpos de conocimiento.

La producción de conocimiento matemático no es la excepción. La matemática descansa en una serie de definiciones y axiomas o postulados que la fundamentan; a partir de éstos se plantean hipótesis o conjeturas que, al ser validadas por la comunidad, adquieren el estatus de teoremas que se utilizan en el mismo rango que los axiomas. Así, al igual que todo cuerpo de conocimiento, la matemática produce su conocimiento en dos niveles: el primero se refiere al trabajo individual o colectivo de un grupo de matemáticos que producen un cierto conocimiento y adquieren la certeza de que es válido; el segundo nivel tiene que ver con la presentación de dicho conocimiento a la comunidad matemática (a través de publicaciones en revistas o la presentación en congresos) quien lo somete a un proceso de revisión y escrutinio que culmina con su aceptación o rechazo.

En ambos niveles, la validación de conjeturas y la argumentación son parte esencial de los debates y de la producción de conocimiento. Según Dewey (1910, 1916), el pensamiento reflexivo es parte inherente del ser humano, todos pensamos de manera reflexiva y este pensamiento puede fomentarse y perfeccionarse en la escuela. Según nuestra experiencia, es posible trasladar el proceso de producción de conocimiento (en este caso, matemático) al salón de clase y fomentar el pensamiento reflexivo en nuestros estudiantes.

El propósito de este taller es ilustrar, mediante una situación concreta, como desarrollamos algunas actividades de aprendizaje en geometría euclidiana, en las que se plantean conjeturas y se busca su validación, desde el modelo de intervención didáctica, *Aprender Matemática, Haciendo Matemática* (Flores, 2010).

### *Aprender Matemática, Haciendo Matemática*

El marco de referencia es el modelo de intervención didáctica *Aprender Matemática, haciendo Matemática* (AMHM) que se ha venido desarrollando desde 2007, en un principio como modelo de enseñanza centrado en el estudiante. El propósito es conformar en el aula un ambiente de aprendizaje en el que todos los estudiantes tengan la oportunidad de aprender haciendo la matemática y debatiendo sobre sus resultados.

Para que sea efectivo, el ambiente que se busca es de respeto, tolerancia y cooperación (adaptado de Flores y Gómez, 2009):

- **Tolerancia**. Capacidad de considerar y aceptar las ideas de los demás; esto implica una convivencia armónica en la que no existen prejuicios acerca del género, la raza o las preferencias sexuales. La tolerancia y el respeto están en la base de la no discriminación.

- **Respeto**. Reconocimiento del derecho a ser de los seres vivos; con respecto a las personas, se trata del reconocimiento de sus derechos y su dignidad. Implica una actitud de tolerancia y reconocimiento a las personas, la sociedad y la naturaleza. El respeto y la tolerancia implican un aumento en la autoestima de los estudiantes.

- **Cooperación**. Trabajo conjunto para el logro de metas comunes; el propósito de la cooperación es el beneficio mutuo; implica la capacidad de hacer de lado ideas y propuestas propias, cuando sea necesario.

Cada ambiente escolar de aprendizaje se conforma a partir de cinco dimensiones (Flores 2017, adaptadas de Schoenfeld y *The teaching for a Robust Understanding Project*, 2016) que, en nuestro caso definimos como:

- **Contenido Curricular**. Temática, aprendizajes, estrategias didácticas y objetivos contemplados en el currículo; debe estar acorde con el nivel educativo del que se trate. En un buen ambiente de aprendizaje, las actividades contribuyen al desarrollo de los estudiantes como pensadores reflexivos, flexibles y con recursos teóricos para afrontar las situaciones a las que se enfrenten.

- **Demanda Cognitiva**. Es el grado de complejidad con que se deben manipular la información y los conceptos disciplinares en las actividades de aprendizaje para su buen desarrollo. Debe ser tal que signifique un reto para el estudiante sin llegar a ser algo imposible de llevar al cabo. Un buen ambiente de aprendizaje sería aquel en el que la demanda cognitiva fuera la adecuada con el nivel educativo, y el esfuerzo cognitivo de los estudiantes para realizarla fuera mínimo.

- **Acceso Equitativo al Contenido**. Un ambiente de aprendizaje equitativo debe permitir y fomentar la participación de todos los estudiantes en las actividades de aprendizaje. El trabajo en equipo es el vehículo para establecerlo, así como la supervisión continua del profesor y los debates grupales. Un ambiente de aprendizaje equitativo deja de lado prejuicios de género, raza, religión o preferencia sexual, y da voz a todos los integrantes de la comunidad.

- **Identidad y Pertenencia**. Es el grado en que un estudiante se siente identificado con el ambiente de aprendizaje e integrante de la comunidad conformada por el grupo. Parte de su identidad tiene que ver con la concepción del estudiante sobre sí mismo como un buen aprendiz, dispuesto a compartir su conocimiento con los demás y a recibir ideas y comentarios de otros aprendices o del profesor. El ambiente de aprendizaje debe fomentar la autoestima del estudiante y su capacidad como aprendiz afectivo y autónomo.
- **Retroalimentación Formativa**. Está conformada por las actividades de aprendizaje y la información que el profesor lleva al aula como productos de una evaluación. Los resultados de la evaluación en el aula sirven, en parte, para identificar errores y debilidades en el aprendizaje; la retroalimentación formativa sirve para eliminar debilidades y corregir errores.

El equilibrio entre estas dimensiones y el fomento del respeto, la tolerancia y la cooperación se conjuntan para crear el ambiente idóneo de aprendizaje a través de las actividades que el docente diseña o que los estudiantes proponen.

Por su parte, las actividades de aprendizaje se basan, principalmente, en la resolución de problemas o en la exploración de situaciones matemáticas en las que es necesario plantear conjeturas y buscar su validación de manera individual y colectiva.

La siguiente es un ejemplo del tipo de actividad que se lleva al aula:

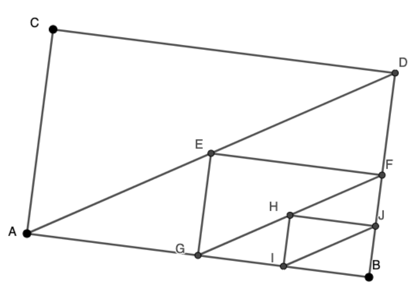


*Figura 1*. Rectángulos y sus diagonales.

*En la figura se muestra el rectángulo ABDC de dimensiones a y b y su diagonal, y otros rectángulos construidos a partir del punto medio de las diagonales.*

*¿Cuánto mide la diagonal mayor? Explica tu respuesta. ¿Puedes hallar una expresión que dé la longitud de una diagonal dadas las dimensiones del rectángulo? Explica tu respuesta.*

*En caso afirmativo, ¿qué expresión es? ¿Cómo sabes si es correcta?*

Los conceptos que habría que utilizar para llevar al cabo la actividad corresponden a una geometría básica: teorema de Pitágoras, definición de rectángulo, triángulos semejantes y algo de álgebra elemental, entre otros; conceptos que se estudian en secundaria (edades entre los 11 y 15 años); ¿cuál es la demanda cognitiva de la actividad? ¿El estudiante será capaz de generalizar el procedimiento y dar con la relación que se pide?

La labor del profesor, además de diseñar y plantear la actividad, consistiría en determinar si la demanda cognitiva es adecuada para el nivel académico de los estudiantes y, en todo caso, proporcionar el andamiaje necesario para que la actividad sea realizada con éxito.

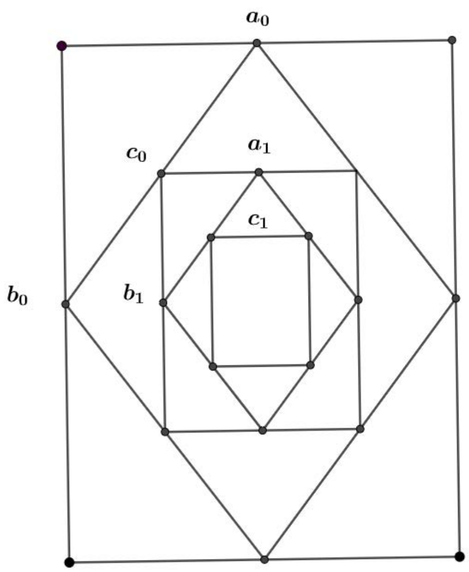


*Figura 2.* Cuadriláteros de puntos medios.

Otro factor importante es la comunicación durante el proceso de resolución de los problemas o del desarrollo de las actividades; ésta debe ser abierta, el estudiante debe sentirse con la confianza de preguntar a sus compañeros o al profesor si tiene dudas sobre lo que se está haciendo, o con la con la libertad de asesorar a sus compañeros y compartir información e ideas que ayuden a completar la tarea. El profesor funge, entre otras cosas, como una especie de catalizador que coadyuva en la resolución de problemas; es una especie de abeja que lleva el polen de la información de un equipo a otro.

Al final, como recapitulación, el profesor hace un balance grupal de la actividad y aprovecha para entablar un diálogo con sus estudiantes sobre las dificultades y los retos que enfrentaron y la mejor manera de superarlos.

Grosso modo, en el taller se procederá haciendo un resumen de AMHM y del planteamiento de la actividad (inicio del taller), la organización de los integrantes en equipos y el desarrollo de la actividad (desarrollo), y una reflexión final sobre los resultados de la actividad y su potencial para ser llevada a clase (conclusión).

## Desarrollo

Para fines del presente taller, se plantea realizar una actividad de generalización de patrones, parecida a la que presentamos como ejemplo, que los asistentes abordarían siguiendo, lo más de cerca posible, la metodología de AMHM. Estamos ciertos que será difícil desarrollar la actividad completamente y con todo su potencial, debido a las limitaciones de tiempo; sin embargo, será una buena aproximación al funcionamiento del modelo y dará idea de cómo planteamos el trabajo en clase.

La actividad es la siguiente:

***Cuadriláteros de puntos medios***

*a) Si unimos los puntos medios de un rectángulo, ¿qué tipo de cuadrilátero se obtiene? ¿Cómo validas tu respuesta (conjetura)?*

*b) Si el rectángulo tiene dimensiones $a_0$, $b_0$, ¿qué dimensiones tendrá el cuadrilátero de los puntos medios?*

*c) Si, ahora, unimos los puntos medios del cuadrilátero de los puntos medios, ¿qué tipo de cuadrilátero se obtiene? ¿Cómo validas tu conjetura?*

*d) ¿Qué dimensiones tiene este segundo cuadrilátero? Justifica tu respuesta.*

*e) De acuerdo con la Figura 2, ¿es posible llegar a una expresión que relacione el área del cuadrilátero de los puntos medios cuando el proceso se hace k veces?*

*f) Si la respuesta al inciso e) es negativa, explica tu respuesta.*

*g) Si la respuesta al inciso e) es positiva, ¿cómo sería la generalización?*

La revisión de la actividad se hará de preferencia en parejas y, después de un tiempo razonable de trabajo en cada inciso, se tendrá una discusión global sobre las posibles respuestas a las preguntas planteadas. También se hará un análisis de la actividad en cuanto a su contenido curricular y su demanda cognitiva. Como cierre del taller, se hará una reflexión con todos los integrantes sobre la viabilidad de instrumentar el modelo en el aula.

## A manera de conclusión

En nuestra opinión, la matemática escolar se ha visto como una herramienta para resolver problemas, y su estudio se asemeja en mucho al estudio de un manual de uso: si se siguen los pasos correctamente, tendremos éxito en el "aprendizaje" de la materia.

Sin embargo, la matemática es mucho más que una mera herramienta. Se trata de una ciencia que estudia fenómenos exclusivamente matemáticos (matemática pura); una teoría que ayuda a entender y explicar de mejor manera los fenómenos de nuestro entorno (matemática aplicada); y un lenguaje universal que nos sirve para comunicar ideas científicas (SUMEM, 2012); y su desarrollo y comprensión requiere de algo más que lógica como lo apunta Torres (2016; página 88):

*La construcción, manejo y observación de casos particulares, las analogías y la imaginería visual se no se pueden echar así nomás por la borda.*

La hipótesis que subyace en el planteamiento de AMHM es que, si se estudia la matemática en sus cuatro aspectos, desde los niveles básicos, en un ambiente de cooperación, respeto y tolerancia, se facilitaría con mucho su aprendizaje y se aprovecharía todo su potencial, sobre todo en el desarrollo del pensamiento reflexivo.

Así, la actividad que se propone desarrollar en el taller pretende ilustrar la metodología de trabajo del modelo de intervención didáctica AMHM e iniciar, en los participantes, una reflexión sobre el cambio de paradigma en la docencia. La actividad también servirá para hacer un análisis de la conexión que tiene con algunos temas que se estudian en Cálculo Diferencial.

## Referencias y bibliografía

Dewey, J. (1910) *How we think*. EUA: D. C. Heath & co. Publishers.

Dewey, J. (1916). *Democracy & Education. EUA, McMillan.*

Fann, K. T. (1970). *Peirce's theory of abduction*. The Hague: Nijhoff.

Flores, A. H. (2010). Learning Mathematics, Doing Mathematics: a learner centered teaching model. *Educaçao Matemática Pesquisa.* v.2. (n.1), 75-87. https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/2331

Flores, A. H. (2017). Pensamiento Matemático y El Quehacer Científico. *Revista Pädi.* n. 1, 26-39. Universidad Autónoma de Querétaro, México.

Flores, A. H., y Gómez, A. (2009). Aprender Matemática, Haciendo Matemática: la evaluación en el aula. *Educación Matemática.* vol. 21, núm. 2, 117-142.

Peirce, C. S. (1877). *The Fixation of Belief.* https://en.wikisource.org/wiki/The_Fixation_of_Belief.

Schoenfeld, A. y The Teaching for Robust Understanding Project. (2016). https://truframework.org/.

SUMEM. (2014). *Consideraciones para la mejora de la educación matemática en la UNAM.* México. Secretaría de Desarrollo Institucional, UNAM.

Torres, C. (2016). Acerca de la comprensión en matemáticas. *Miscelánea Matemática.* 62, 81-103. https://miscelaneamatematica.org/download/tbl_articulos.pdf2.a3941dd027236826.363230362e706466.pdf.