La práctica cartesiana de uso de diagramas y la introducción de las curvas algebraicas en la edición latina de la *Geometría* de Van Schooten

Luis Carlos **Arboleda**
Universidad del Valle
Colombia
luis.carlos.arboleda@gmail.com
Jhon Helver **Bello** Chávez
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia
jhonhelver@gmail.com

Resumen

En este trabajo se analiza la práctica matemática con diagramas en la segunda edición en latín de la Geometría de Van Schooten (1659 - 1661). Esta edición en dos tomos incluye numerosos Comentarios con aclaraciones y elaboraciones de Van Schooten y alumnos suyos sobre asuntos cruciales de la geometría algebraica que Descartes no desarrolló en el texto original. Argumentamos que Van Schooten ubicó en la obra de Descartes una temática central para la divulgación de la Geometría, la representación algebraica de curvas. Mostramos que los diagramas como modo semiótico de representación y de comunicación fueron esenciales para este propósito porque, además de asegurar la solución algebraica más general de los problemas geométricos, permitieron el paso a la tematización de las curvas algebraicas. Señalaremos el interés pedagógico de algunos episodios históricos en los cuales se expresa esta doble característica de la práctica diagramática en la geometría cartesiana.

Palabras clave: historia y educación matemática, diagramas y práctica cartesiana, edición de textos históricos, Descartes, Van Schooten.

Introducción

La primera edición de la *Geometría* en francés se publicó como parte del *Discurso del Método*. (Descartes, 1637). Su difusión fue menor, entre otras razones porque los documentos científicos de la época se escribían entonces en latín. Pocos años después Frank Van Schooten hijo, quien había sido ilustrador de la obra, se interesó por su contenido matemático y concibió la idea de realizar una segunda edición en latín. Adicionalmente a la traducción, Van Schooten incluyó unos *Comentarios* con sus propias reflexiones y las conclusiones de algunas de las disputas que el trabajo de Descartes había suscitado en los matemáticos de la época, entre ellos, Huygens, Roverbal y el propio Van Schooten. Un estudio de estas controversias se encuentra en Dopper (2014). También incluyó algunas de las primeras producciones en geometría cartesiana elaboradas por sus estudiantes más destacados: Florimondi de Beaune, Johannis Hudden, Henrici Van Heuraet y Johannis de Witt. Van Schooten recogió y editó estos materiales con el firme propósito de promover el estudio y el desarrollo teórico de la geometría cartesiana.

En el presente trabajo se aplica la primera dimensión del esquema que Schubring (1987, 2023) propone para el estudio de textos matemáticos, el análisis de las ediciones. Concretamente los diagramas que usó Van Schooten en los comentarios de la obra. Argumentamos que el entramado de signos del diagrama moviliza toda una forma de pensar que permite pasar de la generalización geométrica a la tematización de las curvas algebraicas, tal como se advierte en los *Comentarios* de Van Schooten. En la práctica matemática de Descartes se utilizan los diagramas desde el inicio de la *Geometría*, tanto para definir operaciones representadas en segmentos, como para solucionar problemas por medio del método analítico, estudiar instrumentos mecánicos y solucionar ecuaciones. Los diagramas son esenciales para comprender la práctica cartesiana. En las explicaciones de Van Schooten, por su parte, los diagramas aparecen con otras funciones. También son un medio para justificar propiedades de las curvas e identificar un objeto de una clase designada por una expresión simbólica. Estos nuevos usos de los diagramas involucran nuevas formas de razonar y proceder en la práctica matemática que Van Schooten reconoció en la obra de Descartes.

La práctica con diagramas en Descartes

De acuerdo con Schubring (1987, 2023) uno de los retos de la historia de las matemáticas en cuanto al estudio de su producción y reproducción a través de textos, es reconocer la interacción de la enseñanza e invención de teorías en su respectivo contexto sociocultural. (Schubring, 2001). El periodo de producción y reproducción del nuevo campo de la geometría cartesiana comienza en 1637 y se estabiliza con la introducción del cálculo por Newton y Leibniz. La *Geometría* inició una época de profundas transformaciones en la práctica matemática. Se establecieron nuevas relaciones entre aritmética, álgebra y geometría basadas en principios de representación, justificación y rigor lógico que tomaron distancia de los establecidos en la antigüedad. Los nuevos planteamientos para la geometría incluyen el uso de curvas para resolver problemas, la clasificación de curvas geométricas a partir de su representación simbólica, el estudio de la representación y el carácter geométrico de las curvas por medio de la construcción de instrumentos diferentes a la regla y el compás, una forma de representación de curvas por medio de ejes cartesianos y la constitución de una teoría de curvas para el estudio de sus propiedades fundamentales. Estudios respecto a estas temáticas se pueden encontrar en Bos (2001), Clarke (2005), Dopper (2014), Liu (2017), Macbeth (2014), Maronne (2007), Rabouin (2016, 2017).

En el análisis de los diagramas de la *Geometría* se observa que las construcciones geométricas se basan en un nuevo modelo de representación de la magnitud. En efecto, Descartes define al comienzo de su obra las operaciones algebraicas entre magnitudes abstractas, las cuales son interpretadas como construcciones geométricas de segmentos cuya relación se soporta en la teoría eudoxo-euclidiana de razones y proporciones. Con las operaciones así definidas Descartes construye métodos para solucionar las ecuaciones antes obtenidas, diseña instrumentos mecánicos para el trazado de curvas e introduce la herramienta de los ejes cartesianos para representar curvas. La primera frase del libro I es bien significativa a este respecto: "Todo problema en geometría puede fácilmente reducirse a términos tales que un conocimiento de las longitudes de segmentos de recta sea suficiente para su construcción". (Descartes, 1954, p. 2; trad. LCA y JHB).

Un recurso fundamental de la práctica cartesiana es el empleo del método analítico de resolución de problemas y de situaciones geométricas, el cual consiste en seis etapas: enunciar aquello que es dado; enunciar con la misma práctica lo que se busca; a partir del mismo tratamiento operatorio a lo dado y buscado se deduce una ecuación que funciona como un principio de lo dado, el análisis; la resolución de las ecuaciones y la construcción de la solución (Hintikka y Remes, 1974, citado por Arboleda, 2012, p.2).

Con la introducción de una práctica de algebrización de la geometría con las anteriores características, Descartes inicia un cambio en la naturaleza semiótica de los problemas de la ciencia. El cambio que permiten los diagramas del modo geométrico de representación al simbólico mediante los cálculos algebraicos proporciona diferentes formas de expresar una curva. Sin embargo, la descripción de la generalidad de la curva se expresa en una ecuación que representa todas las curvas que cumplen las relaciones proporcionales. El diagrama cumple un papel sintético en la presentación de las propiedades de la curva, el principio de identidad de la geometría algebraica de Descartes le permite al diagrama iniciar una relación de doble vía entre la estructura geométrica y la algebraica, lo que conlleva cierta invarianza entre los razonamientos producto de la elaboración del diagrama y los argumentos que sustentan las ecuaciones.

En este sentido, estamos de acuerdo con Rabouin (2017) que no es tanto el lenguaje simbólico del álgebra lo que marca el surgimiento de la matemática moderna. Lo que permite una nueva forma de razonar en matemáticas es la reorientación de las relaciones entre segmentos de líneas en lenguaje natural, a su representación simbólica como cantidades arbitrarias y el tratamiento algebraico de tales relaciones.

En el desarrollo del método analítico de resolución de problemas Descartes recurre al diagrama por lo menos en tres momentos: al suponer una solución del problema, en la solución de ecuaciones por medios geométricos y en la identificación del lugar geométrico que representa una expresión algebraica. En el primer caso, el diagrama dirige, organiza y sistematiza el razonamiento (Rabouin, 2016), permite que la imaginación del resolutor ponga en juego las conexiones y operaciones necesarias para mostrar puntos, segmentos y relaciones que resuelven la situación. En este sentido, el principio rector de la matematización que realiza Descartes es principalmente la práctica y sistematización de la imaginación (Sepper, 2016). Detengámonos en comentar esta idea.

Descartes afirma que en el entendimiento de aquellas cuestiones que no tratan de lo corporal no se requiere apelar al recurso de los sentidos, la memoria y la imaginación. Es lo que ocurre con los objetos de la geometría cuyo estudio moviliza la imaginación a través de sus propiedades de extensión, figura y movimiento. Es verdad que el entendimiento puro puede asignar un sentido abstracto a extensión, la figura, el número, la superficie, la línea o la unidad. Pero, en la geometría cartesiana no funciona este sentido abstracto, ya que siempre hay que apelar a la imaginación para reflexionar sobre sus objetos:

> Las líneas de la geometría cartesiana no pueden separarse de los objetos materiales. Ello no implica de ninguna manera que al reflexionar sobre tales líneas se abarque el conjunto de las determinaciones de los cuerpos; se puede -o incluso se debe- centrar la atención sobre un modo particular de la cosa, sobre una (o dos) dimensiones, haciendo abstracción. (Jullien, 1996, p. 13; trad. LCA y JHB)

Por ejemplo, en el planteamiento de la solución del problema de Pappus para cuatro rectas se plantea el siguiente diagrama:

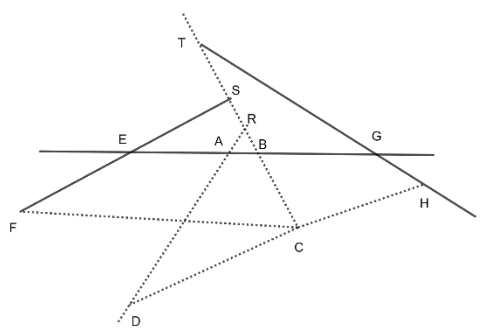

Figura 1. Diagrama solución del problema de Pappus (Descartes, 1954, p. 26)

En donde AB, AD, EF y GH son cuatro rectas dadas en una posición, C es un punto que pertenece al lugar geométrico que se busca y los segmentos CB, CD, CF y CH son los segmentos que cumplen la condición de proporcionalidad $CB \times CF = CD \times CH$. La construcción de la ecuación depende de las consideraciones realizadas en el diagrama.

En el caso del problema de Pappus, como lo muestra detalladamente Maronne (2007), la situación del punto C en determinada región del plano, la posición de los segmentos auxiliares CB, CD, CF, CH y la elección de una recta conocida $AB = x$ y otra desconocida $CB = y$ para representar los puntos que hacen parte del lugar geométrico, condicionan las relaciones geométricas a partir de las cuales se construyen las distintas formas de las ecuaciones solución del problema mediando la operatividad algebraica. Esta problemática queda planteada en el tratamiento que hace Descartes de los signos de la representación simbólica. Esto es, cada recta queda representada simbólicamente dependiendo de su posición, por ejemplo: si R está entre C y B, el segmento $CR = y - \frac{bx}{z}$, y cuando C está entre B y R entonces $CR = -y + \frac{bx}{z}$. (Descartes, 1954, p. 29).

El segundo caso de recurso al diagrama ocurre cuando Descartes analiza la curva producto de una colección de puntos generados por la intercepción de dos curvas de menor orden. En estos casos el diagrama configura una red de conceptos que permite estudiar el objeto y sus propiedades. La figura 1 muestra la curva trazada por un hiperbológrafo a partir de la intercepción de dos rectas, de acuerdo con el procedimiento originalmente expuesto en (Descartes, 1954, p. 51). En esta innovación de los artefactos dispuestos para la geometría, los diagramas sintetizan las propiedades de las curvas, todas las representaciones se ocultan en las relaciones que hacen posible la imagen, desde allí, se estructura la representación simbológica de cada elemento que la compone. En el diagrama se representa la curva y se esquematiza la relación que permite pasar del registro figurativo al registro algebraico, se describen dos objetos que se encuentran en ontologías diferentes la curva como objeto geométrico y como ecuación algebraica. Cada punto de la curva se describe como la raíz de una ecuación cuando se fija una de las dos variables, lo que permite exhibir los puntos de la curva sin tener que hacer la construcción geométrica para cada punto (Maronne, 2007).

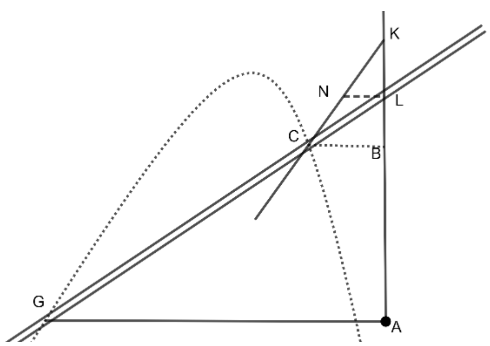

Figura 2. Hiperbológrafo. (Descartes, 1954, p. 51)

En el tercer caso de la práctica diagramática, después de obtener el principio analítico representado en la ecuación, Descartes se enfoca en mostrar el tipo de curvas que son solución. En el caso del problema de Pappus para cuatro rectas, realiza una construcción para determinar la relación entre los puntos que conforman la solución y las rectas tomadas como ejes.

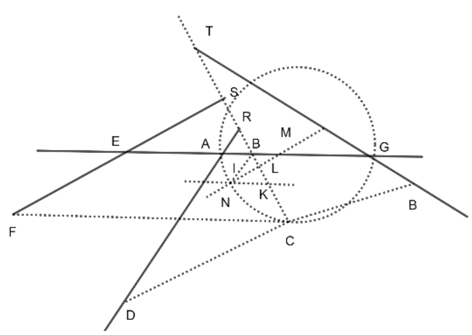

Figura 3. Construcción de una cónica en la solución del problema de Pappus. (Descartes, 1954, p.69)

Obsérvese que todas las líneas punteadas, incluyendo los puntos de la cónica, hacen parte de una estrategia para mostrar la relación que debe tener cada punto de la circunferencia con los ejes de referencia, pero no permite validar que todos los puntos sean construibles. La posición de la recta IK depende de la cónica que se quiera analizar y su representación simbólica de la posición respecto a la recta $CB = y$, nuevamente Descartes advierte la relación entre la posición de los segmentos de recta en el diagrama y el signo de la representación algebraica: "Tomo el punto K entre L y C, ya que la ecuación contiene $-\frac{n}{k}x$; si este fuera $+\frac{n}{k}x$, debería tomar L entre K y C; mientras que si $\frac{n}{z}x$ fuera igual a cero, no debería trazar IL". (Descartes, 1954, p. 310)

Descartes realiza este mismo análisis de signos para el término $\frac{p}{m}x^2$ del término en LC de la ecuación, siendo $LC = \sqrt{m^2 + ox + \frac{p}{m}x^2}$, con lo cual se da solución al problema de Pappus para cuatro rectas, como lo estudia convenientemente Dopper (2014, p.p. 93-94). Sin embargo, el proceso que muestra el diagrama para cada caso Descartes no lo realiza, la explicación de las curvas solución queda sumergida en el análisis del signo de la expresión algebraica.

Después de adelantar el proceso de generalización que partiendo del diagrama lleva a la construcción de la ecuación que representa la curva solución, Descartes pasa a deducir las curvas determinadas por la expresión algebraica. En esta última parte, el diagrama no es esencial como sí lo fue para para obtener la expresión algebraica. Este segundo análisis es pues, puramente algebraico. Por otra parte, Descartes deja planteado el procedimiento para determinar y construir la cónica solución a partir de la ecuación del lugar geométrico en el problema de Pappus, pues solo hace explicito este procedimiento para el caso de una cónica, dejando en manos del lector el trabajo de completar el análisis. Como veremos en el siguiente aparte del artículo, será Van Schooten quien realizará la tarea de analizar los distintos casos de cónicas solución (Maronne, 2007).

Las explicaciones de van Schooten en los Comentarios

En el prefacio de la segunda edición en latín, Van Schooten afirma que los *Cometarios* y los escritos que acompañan la traducción, tienen como propósito que el lector comprenda el contenido de la *Geometría* y la importancia del método de análisis de Descartes. Es decir, que esta edición comentada y ampliada con otros documentos pueden considerarse como parte de una estrategia comunicativa de Van Schooten en la divulgación y enseñanza de las ideas cartesianas. En especial, en cuanto a ayudar a un lector acucioso a comprender y completar las tareas que Descartes deja planteadas en su obra. En ese sentido, la edición de Van Schooten incorpora una función claramente pedagógica para la real comprensión de la nueva geometría algebraica de Descartes. Ello contribuyó sin duda a la amplia difusión y recepción de esta edición y a su rápida apropiación en otros dominios de la práctica matemática.

Este es un ejemplo histórico de cómo un texto explicativo de una obra paradigmática puede aportar a la consolidación y reproducción de una práctica matemática nueva y a su extensión en otras direcciones. Este asunto es considerado por Schubring (2019) cuando crítica la noción de transposición didáctica de un texto porque considera que no tiene en cuenta la importancia eventual de la preparación de materiales para la enseñanza en la práctica de producción matemática. Indica Schubring (2001, 2019, 2023) que, por su parte, los estudios históricos de la matemática deben develar la importancia de la enseñanza no solo en la reproducción de la cultura matemática, sino también en la práctica de producción matemática.

En este apartado revisamos algunos momentos de los *Comentarios* de Van Schooten en los cuales consideramos que se transforman o se realzan aspectos significativos de la práctica cartesiana con diagramas. Uno de esos momentos es el uso que hace Descartes de los diagramas en la solución del problema de Pappus para cuatro rectas. Específicamente en la identificación de las cónicas que representa la ecuación general de segundo grado. La problemática que enfrenta Van Schooten es hacer claridad sobre el método seguido por Descartes para analizar la ecuación y deducir la relación entre la cónica, su expresión simbólica y la construcción geométrica del diagrama.

En el intervalo de tiempo entre la aparición de la edición de 1637 y la elaboración de los *Comentarios* de la segunda edición en latín, los matemáticos de la época, principalmente Roverbal y Huygens, estudian y cuestionan la posición de cada una de las cónicas y el hecho que Descartes presente solo una parte de la hipérbola. La controversia a que ello dio lugar queda conciliada con la introducción de los comentarios B y BB de la versión en latín. La historia de estas controversias ha sido estudiada en detalle en (Dooper, 2014).

El comentario BB de Van Schooten se refiere a la relación que Descartes establece entre la posición del punto C en el diagrama del problema de Pappus para cuatro líneas (Fig. 1) y los ángulos en los que se encuentran las rectas dadas. Es decir, en términos modernos, comprende la pérdida de generalidad en la determinación de la ecuación del lugar geométrico solución del problema, al restringir la posición de C en cierta región del plano. Esta restricción del espacio geométrico en el que se produce la solución fue uno de los motivos de controversias de la época. Descartes argumentaba que implícitamente él había indicado cómo extender su procedimiento a otras situaciones, de manera que cualquier lector reflexivo pudiera hacerlo por su cuenta. En su carta a Mersenne del 31 de marzo de 1638 afirma al respecto: “Hago la construcción como los arquitectos construyen estructuras, dando las especificaciones y dejando el trabajo manual real a carpinteros y albañiles” (Descartes, 1954, p. 63).

Si se examina en detalle, el procedimiento de Descartes consiste en interpretar y estudiar la posición de la figura en términos de la ecuación algebraica, con lo cual la emergencia del análisis de la ecuación se separa de su interpretación geométrica, dejando al lector la necesidad de construir para cada caso la curva solución.

Van Schooten entiende la importancia de esta intención de Descartes y en su comentario BB trata de aclarar el procedimiento. Para ello apela al problema que plantea Huygens en su carta a Descartes del 6 de diciembre de 1656, en donde el problema de la situación geométrica se explica en términos del análisis de signos de la ecuación.

El problema se refiere a la construcción de un espacio d a partir de la posición de C con respecto a los puntos A y B de una recta. Van Schooten hace explicita la analogía de la solución con el razonamiento del problema de Pappus en cada uno de los casos de identificación de los signos de la ecuación.

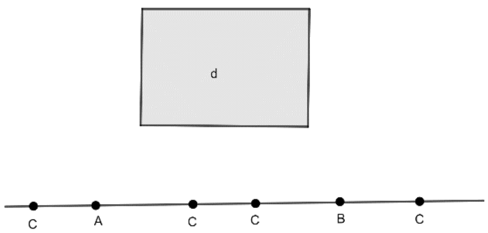

Figura 4. Diagrama asociado al ejemplo del comentario BB. (Schooten, 1659, p. 180)

La construcción de d a partir de la posición de C respecto a A y B, modela la condición de los signos de la expresión algebraica en el problema de Pappus respecto al punto solución. Si C está a la izquierda de AB y $CA = x$, entonces $xx + ax = d$. Si C está entre A y B, la ecuación es $ax - xx = d$; y finalmente, si C está a la derecha de B, entonces, la ecuación es $xx - ax = d$.Van Schooten utiliza un problema de menor complejidad en este comentario para explicar el problema de los signos en la representación simbólica de la ecuación.

Este problema y su solución apuntan a reconocer dos momentos significativos del procedimiento cartesiano. Comprender la prefiguración del uso de magnitudes orientadas que conservan un valor específico independiente del cambio de orientación, y la adopción de la convención simbólica de alternancia de signos para tener en cuenta todos los casos posibles en que se relacionan las magnitudes. Al mismo tiempo, este comentario BB de Van Schooten subraya la importancia del tratamiento algebraico en el esclarecimiento de una problemática de carácter geométrico.

El comentario CC del libro II retoma en parte las discusiones entre Van Schooten y Huygens sobre el análisis algebraico de la ecuación y la deducción a partir de ella de las curvas solución del problema de Pappus. En total se estudian 4 casos para la parábola, 5 casos para el círculo, 5 casos para la elipse y 10 casos para la hipérbola. En la edición de 1637 Descartes explica el procedimiento de la construcción y presenta las conclusiones con respecto a la relación entre la cónica solución y los cambios respectivos en la forma de la ecuación dada por $y = m - \frac{n}{z}x + \sqrt{m^2 + ox - \frac{p}{m}x^2}$. Sin embargo, no aclara la relación entre los puntos de cada curva y la ecuación general. Este es el propósito del comentario CC.

Van Schooten parte de la conclusión a la que había llegado Descartes sobre el tipo de cónica solución que se deduce de la ecuación al considerar el término $LC = \sqrt{m^2 + ox - \frac{p}{m}x^2}$:

> En particular, si el término $\frac{p}{m}x^2$ es cero, la sección cónica es una parábola; si está precedido de un signo más, es una hipérbola, y, por último, si va antecedido de un signo menos, es una elipse. Se da una excepción cuando a^2m es igual a pz^2 y el ángulo ILC es recto, en cuyo caso obtenemos una circunferencia en lugar de una elipse. Si la sección cónica es una parábola, su *latus rectum* es igual a $\frac{oz}{a}$ y su eje siempre está a lo largo de la recta IL. Para hallar su vértice, N, hacemos IN igual a $\frac{am^2}{oz}$, de modo que el punto I esté entre L y N si m^2es positivo y ox es positivo; y L está entre I y N si m^2es positivo ox negativo. Es imposible que m^2 sea negative cuando los términos están dispuestos como se ha indicado antes. Finalmente, si m^2es igual a cero, los puntos N e I deben coincidir. (Descartes, 1954, p. 68)

Van Schooten construye para cada caso la posición para las rectas IL, IN y LK, e identifica la posición de cada curva, luego, el *latus rectum*, el vértice, y el diámetro de cada curva según lo descrito por Descartes y exhibe su correspondiente ecuación. En estos diagramas se aclara la problemática de cambio de signo que había dejada planteada Descartes y la nulidad de algunos de los términos de la ecuación general. La figura 4 muestra el diagrama del primer caso para las parábolas utilizado en el comentario CC.

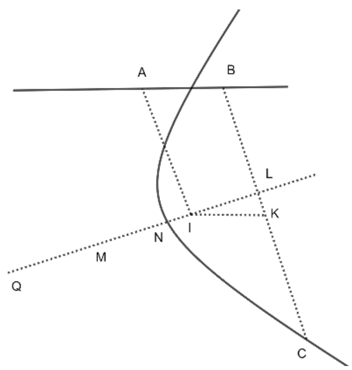

Figura 5. Primer caso de la cónica solución del problema de Pappus. (Van Schooten, 1659-1661, p. 182)

En el texto que acompaña este diagrama Van Schooten (1659) afirma: la sección es una parábola en la cual la línea LC existe; y las ordenadas aplicadas al diámetro siempre están en la línea IL. El vértice N en el otro lado del punto L debe tomarse con respecto al punto I, $LC = \sqrt{mm + ox}$, para encontrar, el *latus rectum*.

Van Schooten realiza un cambio definitivo con respecto al tratamiento de Descartes, en cuanto su comentario apunta a aclarar la idea de curva y la relación con su representación simbólica. En este momento de la práctica cartesiana se pasa de construir la curva a establecer la relación entre sus propiedades conocidas a través de un tratamiento algebraico. Como lo indica Maronne (2007) este análisis es netamente algebraico. El diagrama es una referencia para la situación, pero no es determinante en la obtención de su expresión simbólica.

Para todos los casos, Van Schooten muestra las posiciones relativas de los puntos N, L, I, C y de los segmentos de recta IK, IN, LC, LM, LN, explicando las afirmaciones que Descartes hizo en la *Geometría* sobre la relación entre la ecuación que representa el problema y los segmentos que se construyen en el diagrama de la figura 5.

En la explicación de Van Schooten sobre las cónicas solución del problema de Pappus para cuatro rectas, el diagrama es usado como una red conceptual que permite pasar del análisis puntual de la curva a una expresión algebraica que representa todos los puntos de la curva, y que permite analizar su posición relativa a partir del uso de las rectas que se toman como ejes. Los 24 diagramas que aparecen en este comentario son ilustrativos de las características conocidas de la curva, al tomarla como dada.

Estas explicaciones sobre la cónica solución del problema de Pappus continúan en el comentario CCC, el cual está relacionado con la siguiente frase de la *Geometría*: *Es pues fácil determinar esta parábola, de acuerdo con el primer problema del primer libro de Apolonio* (Descartes, 1954, p. 68). Van Schooten comprendió el enfoque metodológico propuesto por Descartes: encontrar el principio analítico de las curvas que representan la solución al problema y, luego, mostrar que cada cónica se deduce de la ecuación que expresa este principio. La noción usual de cónica en la época era aquella introducida por Apolonio, como corte de un cono. En este comentario Van Schooten muestra que la representación simbólica de la clase de curvas de Apolonio es equivalente a la que se deduce de la ecuación solución del problema de Pappus, y, por lo tanto, se identifican con el lugar geométrico de los puntos solución de tal problema.

En la introducción a este comentario Van Schooten indica que su intención es que los lectores de la *Geometría* comprendan la solución y las propiedades de las cónicas, incluso si no tienen acceso al libro de Apolonio. Van Schooten tomó la proposición 11 del libro I de *Cónicas* e interpretó la definición para cada curva en los términos conceptuales de la geometría cartesiana. Sobre el mismo diagrama que utiliza Apolonio, designa las cantidades de magnitud con una letra minúscula y opera con ellas algebraicamente. El diagrama euclidiano interpretado en la doble escritura cartesiana es el soporte de referencia para mostrar la equivalencia entre la representación figural de la curva y su representación algebraica (Bello, 2021).

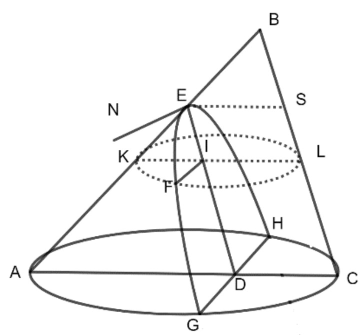

Figura 6. Diagrama usado por van Schooten de la proposición 11 del libro I de Apolonio. (Schooten, 1659, p. 207)

Para el caso de la parábola Van Schooten observa que si $AB = BC$ la base del cono es una circunferencia de diámetro AC, y la sección KFL es también una circunferencia paralela a la base. Nombra $AB = a, BC = b, AC = c, EB = d, EI = x, FI = y$, luego como el triángulo ABC es semejante con KEI y con el triángulo EBS, deduce que $KIL = FI$ y, por lo tanto, la relación que identifica la cónica se puede representar por $\frac{ccd}{ab}x = yy$ que es una curva de segundo grado.

El tratamiento algebraico que hace Van Schooten de la construcción geométrica se fundamenta en el procedimiento cartesiano de extender las magnitudes euclidianas al campo operatorio de magnitudes abstractas y en utilizar la teoría euclidiana de las razones y proporciones para determinar la expresión simbólica de cada cónica. Esto comporta toda una comprensión de la naturaleza de la generalización de la noción de curva algebraica producto del análisis cartesiano. La identificación de Van Schooten del fondo de la tematización que Descartes introdujo en la geometría euclidiana, se traduce en compromiso en su difusión y explicación pública a través de la edición comentada. Otra prueba de ello es la inclusión que él hace en la segunda edición (1659 - 1661) de dos escritos consagrados a discutir los principios fundamentales de la matemática cartesiana, y el método cartesiano de solución de problemas con base en el tratamiento algebraico de su interpretación mediante construcciones geométricas, *Principia Matheseos Universalis seu Introductio ad Cartesiane Géometríae Methodum* (Schooten, 1661a) y *Tratactus de Concinnandis Demostrationibus Geometricis ex Calculo Algebraico* (Schooten,1661b).

Conclusiones

En el presente trabajo hemos tratado de mostrar el interés que reviste un análisis de textos históricos, en este caso las primeras ediciones de la *Geometría*, para comprender los procesos complejos de comunicación y formación de cultura matemática alrededor una obra paradigmática, la teoría de curvas algebraicas. Hemos visto que el estudio de esta función comunicativa y de educación matemática, aparece estrechamente relacionada en los inicios de la práctica cartesiana con la función principal de producción de conocimientos. La estrategia comunicativa de Van Schooten en cuanto a la divulgación y enseñanza de las ideas cartesianas se dirigía a satisfacer las necesidades de un lector proactivo de conocer la nueva geometría, pero también a realizar las tareas de perfeccionamiento del método que Descartes había dejado planteado en su obra. La interrelación entre la función pedagógica y la función epistemológica en la edición de Van Schooten contribuyó sin duda a la amplia difusión y recepción de esta edición y a su rápida apropiación en otros dominios de la práctica matemática.

También hemos mostrado que el estudio de los diagramas en estas ediciones a aporta elementos significativos para comprender la práctica matemática en un contexto histórico concreto. Con respecto al papel de los diagramas en el establecimiento de la geometría cartesiana, el análisis de los *Comentarios* pone de presente el importante papel que Van Schooten desempeñó al aclarar en su tiempo la función del diagrama en el proceso constitutivo de la curva algebraica a partir de la configuración geométrica del problema de Pappus. En palabras modernas diríamos que en los *Comentarios* se explica con nuevos elementos el uso del diagrama en la *Geometría*, y se realza su función como red conceptual que permite pasar del análisis puntual de la curva a una expresión algebraica que representa todos los puntos de la curva, mediante la caracterización de su posición relativa a partir del uso de las rectas que se toman como ejes.

Van Schooten como editor y comentarista comprendió el fondo de la novedad del método de Descartes y la importancia de orientar en esa dirección a los lectores de la edición latina. Esto lo corroboramos en su cuidadosa presentación de la extensión de las magnitudes euclidianas al campo operatorio de magnitudes abstractas, como condición necesaria para utilizar la teoría euclidiana de las razones y proporciones en términos de una representación simbólica conveniente, y constituir la curva algebraica como un objeto matemático radicalmente nuevo. Hemos utilizado en varias ocasiones el término de *tematización* para referirnos a este procedimiento.

Esta noción fue introducida por Jean Cavaillès para distinguir la edificación lógica de las teorías de una simple generalización. Como se aclara en (Arboleda, 2011): “la tematización es el proceso por el cual una operación que previamente se ha realizado sobre un campo de objetos, es objeto de una segunda operación, la cual se vuelve a su vez objeto de una tercera operación, y así sucesivamente”. Parafraseando el artículo antes referido podemos que decir que el arte específico de la geometría cartesiana es la tematización. Aquello que hemos querido exponer a través de este estudio de las ediciones de la Geometría es que Descartes no llegó al objeto curva algebraica por abstracciones de objetos reales mediante la descripción de sus características principales, sino a través de una práctica compleja de encadenamiento de operaciones lógicas sobre dominios matemáticos preconstituidos.

Referencias y bibliografía

Arboleda, L. C. (2011). Objetividad matemática, historia y educación matemática. En Recalde, L. C. y G. I. Arbeláez (2011). *Los números reales como objeto matemático. Una perspectiva histórico-epistemológica.* Cali: Editorial Universidad del Valle; pp. 19-38.

Arboleda, L. C. (2012). El análisis cartesiano en la solución del problema de Pappus y la introducción de las curvas algebraicas. *13º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*, 764 - 777. Medellín: Universidad de Medellin. Recuperado de: http://asocolme.org/images/eventos/13/MATEMATICA_EDUCATIVA_13_Encuentro_Colombiano%20ECME.pdf

Bello, J. (2021). *Diagramas y práctica matemática en la Geometría Cartesiana (1637-1750). Contribución de la historia de la matemática a la formación de profesores.* Cali: Universidad del Valle. Récupéré sur https://bibliotecadigital.univalle.edu.co/browse?type=author&value=Bello%20Chavez,%20Jhon%20Helver

Bos, H. (2001). *Redefining Geometrical Exactness: Descartes' Transformation of the Early Modern Concept of Construction.* New York: Springer.

Clarke, D. (2005). Descartes' philosophy of science and the scientific revolution. Dans *The Cambridge Companion to Descartes* (éd. Décima, 258 - 285). Cambridge : Cambridge University Press.

Descartes , R. (1637). La geometrie . Dans R. Descartes, *Discours de la methode pour bien conduire sa raison et chercher la verite dans les sciences; plus La dioptrique Les meteores et La geometrie qui sont des essais de cete methode* (pp. 297-413). Leiden.

Descartes, R. (1954). *The Geometry.* (D. Smith, & M. Latham, Trads.) New York: Dover Publication.

Dopper, J. (2014). *A life of learning in Leyden. The Mathematician Frans Van Schooten (1615-1660).* Tesis doctoral, Universidad de Utrecht, Veedam.

Jullien, V. (1996). *Descartes. La "Géométrie" de 1637*. Paris: Presses Universitaires de France.

Liu, C. (2017). Re-examining Descartes' Algebra and Geometry. *Analytic Philosophy, 58*(1), 29 - 57. https://doi.org/10.1111/phib.12093

Macbeth, D. (2004). Viète, Descartes, and the Emergence of Modern Mathematics. *Graduate Faculty Philosophy Journal, 25*(2), 87 - 117. https://doi.org/10.5840/gfpj200425212

Maronne , S. (2007). La théorie des courbes et des équations dans la Géométrie cartésienne: 1637 - 1661. Université Paris - Diderot , Paris VII. Paris : *Histoire et perspectives sur les mathématiques [math.HO]*. Obtenido de https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00204125v2

Rabouin, D. (2016). Mathesis universalis et algèbre générale dans les Regulae ad directionem ingenii de Descartes. *Revue d'histoire des sciences, 69, 259-309.* https://doi.org/10.3917/rhs.692.0259

Rabouin, D. (2017). Logic of imagination. Echoes of Cartesian epistemology in contemporary philosophy of mathematics and beyond. Synthese, 195:4751-4783. Doi:10.1007/s11229-017-1562-1

Schooten, F. van (1659). Commentarii. En F. Schooten (Ed.), Geometria à Renato Des Cartes (Vol. 1, págs. 143-400). Amsterdam: Apud Ludovicum & Danielem Elzevirios. Vol. 1 (1659), vol. 2 (1661). Obtenido de: https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b8601510z/f11.item

Schooten, F. van (1661a). Principia Matheseos Universalis seu Introductio ad Cartesiane Géometríae Methodum. En F. Schooten (Ed.), *Geometria à Renato Des Cartes* (Vol. 2, pp. 1-48). Amsterdam: Apud Ludovicum & Danielem Elzevirios.

Schooten, F. van (1661b). Tratactus de Concinnandis Demostrationibus Geometricis ex Calculo Algebraico. En F. Schooten (Ed.), *Geometria à Renato Des Cartes*. (Vol. 2, pp. 341-420). Amsterdam: Apud Ludovicum & Danielem Elzevirios.

Schubring , G. (1987). On the methodology of Analysing Historical Textbook: Lacroix as Textbook Autor. *For the Learning of Mathematics*, Vol. 7, (3), 41 – 51. https://www.jstor.org/stable/40247906

Schubring, G. (2001). Production mathématique, enseignement et communication. Remarques sur la note de Bruno Belhoste, "Pour une réévaluation du rôle de l'enseignement dans l'histoire des mathématiques" parue dans la RHM 4 (1998), p. 289–304." *Revue d'histoire des mathématiques* 7.2 (2001): 297-308. http://eudml.org/doc/252108.

Schubring, G. (2019). The Impact of Teaching Mathematics Upon the Development of Mathematical Practices. Dans G. Schubring (Éd.), *Interfaces between Mathematical Practices and Mathematical Education.* Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-01617-3_5

Schubring, G. (2023). *Analysing Historical Mathematics Textbooks.* Switzerland: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-17670-8

Sepper, D. (2016). Descartes. Dans A. Kind (Éd.), *The Routledge handbook of philosophy of imagination* (pp. 27-39). New York: Routledge