
# Conocimiento didáctico matemático de profesores de Matemáticas para el desarrollo del razonamiento algebraico

Cecilia **Gaita** Iparraguirre
IREM-Pontificia Universidad Católica del Perú
Perú.
cgaita@pucp.edu.pe

## Resumen

Más de treinta años de fundamentación teórica y de evidencia empírica ponen de manifiesto que para que los profesores de matemáticas logren contribuir con el desarrollo del razonamiento algebraico en sus estudiantes es fundamental que previamente superen la postura epistemológica en donde el álgebra se entiende como una aritmética generalizada. A partir de ello, se han desarrollado propuestas que permiten identificar distintos niveles de desarrollo en dicho tipo de pensamiento desde la educación básica. Sin embargo, los profesores de matemáticas requieren contar con instrumentos específicos, asociados a distintos objetos matemáticos, que les permitan promover la evolución en el uso de distintos lenguajes, así como en procesos de generalización, los cuales son rasgos fundamentales de evolución en el desarrollo del razonamiento algebraico. En esta ponencia se darán algunos ejemplos relacionados con los aspectos señalados a partir de la revisión del currículo nacional peruano.

*Palabras clave:* Razonamiento algebraico; criterios; niveles RAE; conocimiento didáctico-matemático.

## Introducción

El Razonamiento Algebraico Elemental (RAE) fue propuesto originalmente con la finalidad de aportar en la clarificación de la naturaleza del razonamiento algebraico elemental, a través de la identificación de rasgos que pudieran dar cuenta de la adquisición de dicho razonamiento (Godino et al 2012). Como resultado de ese trabajo, se reconoce que tanto los procesos de generalización como el simbolismo algebraico permiten describir prácticas consideradas como algebraicas y que estas deben evolucionar a lo largo de la formación escolar.

También se determinan como objetos de naturaleza algebraica las relaciones de equivalencia y sus propiedades, las operaciones entre los elementos de los conjuntos numéricos, propiedades de las estructuras que se generan en dichos conjuntos, funciones y sus tipos, operaciones con funciones y sus propiedades, entre otros.

De otro lado, en el Currículo Nacional de la Educación Básica (PERÚ, 2016), se declara que una de las competencias matemáticas que se debe desarrollar en la formación básica regular (hasta los 16 años) es “Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio”. Dicha competencia se define en términos de que “el estudiante logre caracterizar equivalencias y generalizar regularidades y el cambio de una magnitud con respecto a otra, a través de reglas generales” (PERÚ, 2016, p. 73). Por ello, es natural encontrar contextos favorables para el desarrollo del RAE en situaciones asociadas a esta competencia.

Por otra parte, el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS) propone un modelo del conocimiento didáctico-matemático (CDM) que permite caracterizar de manera sistemática los conocimientos del profesor de matemáticas en sus diferentes facetas y componentes (Godino, 2009; Pino-Fan y Godino, 2015; Godino et al, 2016). Sin embargo, en particular en lo que se refiere al álgebra hacen falta programas de formación para la ejecución de itinerarios de pensamiento algebraico desde los 6 hasta los 17 años (Carraher y Schliemann, 2019). La identificación por parte del profesor de los objetos y procesos intervinientes en las prácticas matemáticas es una competencia que le permitirá comprender la progresión de los aprendizajes, gestionar los procesos de institucionalización adecuadamente y evaluar las competencias matemáticas de los alumnos. En particular, será crucial la identificación de situaciones idóneas para el desarrollo del RAE por parte del docente.

En el Perú, los manuales oficiales son considerados un recurso fundamental por los profesores de matemáticas y el gobierno peruano garantiza el reparto gratuito de cuadernos de trabajo de matemáticas para los cinco grados de secundaria en todo el territorio peruano. Sin embargo, en un trabajo previo (Gaita et al, 2022a), se analizaron algunas situaciones presentadas en dichos textos para el desarrollo de la competencia matemática “Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio”, y se concluyó que las tareas se caracterizaban por una simplificación excesiva de la realidad, por el uso de contextos inadecuados para el estudio del cambio y, en otros casos, aunque los contextos seleccionados eran potencialmente adecuados, no eran aprovechados para desarrollar el razonamiento algebraico.

## Criterios para identificar situaciones que contribuyen al desarrollo del RAE

Teniendo en cuenta lo descrito, se proponen criterios que permiten reconocer si una situación referida a contenidos matemáticos tradicionalmente asociados al álgebra (ecuaciones, sistemas de ecuaciones, funciones, entre otros) contribuye al desarrollo del RAE o si tiene potencial para hacerlo y, en ese caso, cómo podría modificarse para que lo desarrolle efectivamente.

Tabla 1
*Criterios para identificar situaciones que contribuyen al desarrollo del RAE.*

| Criterio | Descripción | Para el progreso en el RAE |
|---|---|---|
| 1. Objetos matemáticos que involucra la situación | Se trata de una situación sobre patrones o de búsqueda de regularidades, o que requiere manipular expresiones alfanuméricas y usar propiedades de las estructuras (ecuaciones, sistemas de ecuaciones, inecuaciones, etc.), o que estudia el cambio y la covariación. | La situación requiere la modelización de los datos a través de alguno de los objetos considerados como algebraicos. Para que el RAE evolucione, se debe demandar una modelización de complejidad creciente. |
| 2. Lenguaje que moviliza la situación | La solución del problema debe requerir del uso de distintos lenguajes: gestual natural, numérico, tabular, gráfico, alfanumérico, incluyendo el uso de parámetros, y las transformaciones entre ellos. El paso del lenguaje natural, numérico al alfanumérico requiere que la situación exija atribuir significado a los cálculos. | Para que el RAE evolucione, se debe propiciar el uso gradual de los distintos lenguajes. El uso del lenguaje alfa-numérico se hace necesario en la medida que la situación requiera justificar la solución. |
| 3. Grado de generalidad que demanda la situación | Las cuestiones que se desprendan de la situación deben demandar generalizaciones progresivas de los resultados; desde tareas en donde primero los datos adoptan valores particulares, pasando por aquellas en donde se obtiene una regla general que define a la clase (objeto intensivo), hasta tareas en donde se estudia el comportamiento de familias de problemas (lo que requiere el uso de parámetros). | La situación exige realizar generalizaciones sucesivas. En este proceso, resulta esencial que el estudiante valide las soluciones obtenidas utilizando diversos medios de control, incluyendo la verificación que lo general se cumpla también para lo particular. |

*Fuente*: Gaita, Ugarte y Gonzales (2022b, p.168)

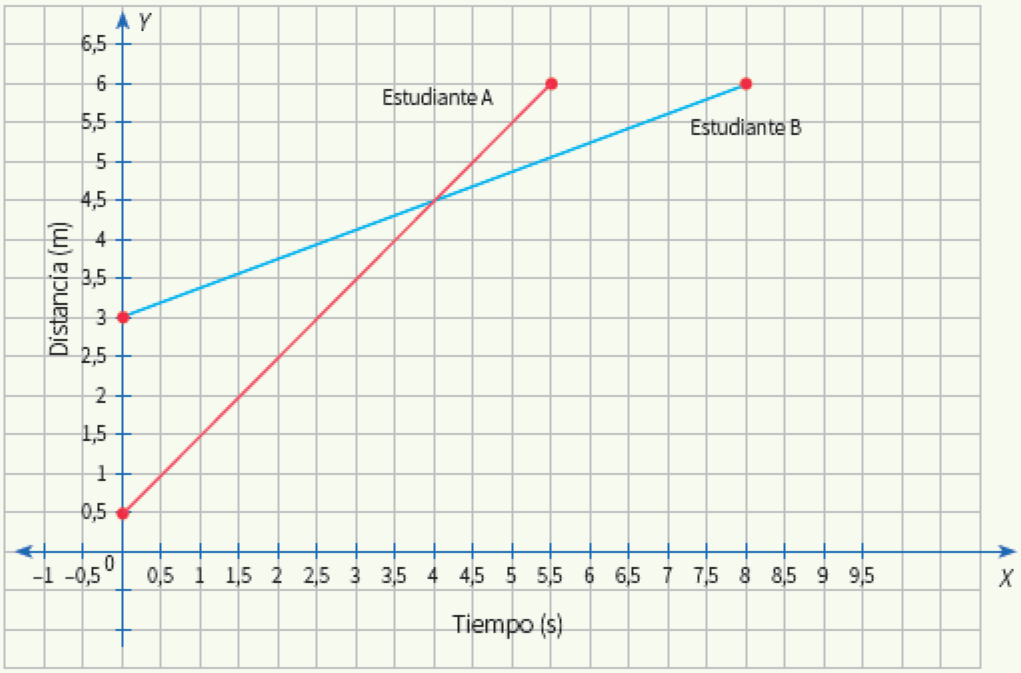
Luego del análisis de la tarea, se brindan pautas para modificarlas, incorporando actividades sucesivas, de modo que las preguntas demanden cada vez un mayor grado de generalidad y de expresión de dicha generalidad (Gaita et al, 2022b)

## Análisis de una tarea empleando los criterios propuestos

A continuación, se presenta una tarea tomada de un texto de matemáticas distribuido por el gobierno peruano a los estudiantes de cuarto año de secundaria de todas las escuelas públicas. La actividad fue analizada en términos del desarrollo de la competencia Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio (Gaita et al, 2022a). La figura 1 reproduce el enunciado original de forma literal.

## ¿Dónde se encontrarán?

En una investigación, dos estudiantes caminan simultáneamente a lo largo de un trayecto de 6 m. El estudiante A empieza en un punto a 0,5 m del inicio del trayecto y camina hacia el punto final a razón de 1 m/s. El estudiante B comienza en el punto ubicado a 2 metros del inicio y camina hacia el final del trayecto a razón de 0,5 m/s. Aquí se muestra una gráfica de los datos obtenidos.




1. Representa mediante una expresión matemática la información presentada en la gráfica.
2. Determina a partir de qué tiempo y distancia el estudiante A pasa al estudiante B.

*Figura 1. Tarea propuesta en un texto*
*Fuente: PERÚ (2019, p.181)*

En la figura 2 se presenta el propósito de esa tarea, tal como la describe el cuaderno de trabajo.

**Propósito:** Establecemos relaciones entre datos, valores desconocidos y transformamos esas relaciones a expresiones algebraicas o gráficas que incluyen sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Así también, combinamos y empleamos estrategias heurísticas, recursos, métodos gráficos, procedimientos y propiedades algebraicas para determinar términos desconocidos, simplificar expresiones algebraicas y solucionar sistemas de ecuaciones lineales.

*Figura 2.* Propósito de la tarea
*Fuente:* PERÚ (2019, p. 181)

La resolución esperada en la institución escolar propone las siguientes etapas: completar una tabla de valores que relacionan el tiempo (X) y la distancia (Y) para el caminante A cada segundo, y otra tabla para el caminante B; escribir las funciones que representan el tiempo y la distancia para los caminantes A y B; a través de la resolución de un sistema de ecuaciones, determinar qué valores toman X y Y cuando se intersecan las dos gráficas y, finalmente, determinar a partir de qué tiempo y qué distancia el estudiante A pasa al estudiante B.

Ahora analizamos la tarea, sin vernos influenciados por las etapas sugeridas en el libro. En el enunciado del problema se presenta la misma información empleando dos representaciones: la verbal y la gráfica (aunque hay un error en el enunciado al señalar que el estudiante B inicia su recorrido a 2 m cuando debió decir 3 m). Es decir, no se propicia un cambio de representación; más aún, la obtención de las expresiones algebraicas sólo se hace necesaria porque el problema lo pide de manera explícita. Además, en el enunciado ya se establecen los valores de los coeficientes lineales (rapidez de los estudiantes) y de los términos independientes de ambas funciones lineales (en la gráfica aparecen las intersecciones con el eje Y).

Para responder la segunda pregunta bastaría interpretar la gráfica del enunciado y responder que el recorrido del estudiante A es mayor que el recorrido del estudiante B a partir de los 4 segundos. Esto se desprende de reconocer en el gráfico las coordenadas del punto de intersección e interpretar lo que este representa en el contexto del problema. Un análisis de la tarea considerando los criterios dados en la tabla 1, se presenta en la tabla 2.

Tabla 2
*Análisis de la tarea según criterios establecidos.*

| Criterio | Descripción | Comentario |
|---|---|---|
| 1. Objetos matemáticos que involucra la situación | Se trata de una situación que se relaciona con el estudio del cambio (tiempo-distancia), pero tal como está planteada, no requiere de requiere del estudio de funciones ni de uso de sistemas de ecuaciones porque las respuestas se pueden obtener a partir de los gráficos. | El contexto de la situación es pertinente para desarrollar el RAE, pero la información presentada y las preguntas consideradas no generan una actividad algebraica. |
| 2. Lenguaje que moviliza la situación | La situación presenta información en lenguaje natural y gráfico; La solución esperada por la institución incluye la obtención de reglas de correspondencia expresadas en lenguaje alfanumérico. | Pese a que se emplean dos lenguajes en el enunciado, las informaciones brindadas son redundantes.<br>Se puede modificar la consigna de modo que las informaciones brindadas sean complementarias y que el empleo del lenguaje alfanumérico se haga necesario en el proceso de solución, atribuyéndole significado a los coeficientes de las expresiones lineales. |
| 3. Grado de generalidad que demanda la situación | Tal como está planteada la tarea, se espera obtener la expresión algebraica para cada función que relaciona la distancia y el tiempo. Sin embargo, como esa regla no se genera a partir de los elementos que la constituyen, no se puede afirmar que sea una entidad unitaria que emergerá del sistema de prácticas. | Es pertinente considerar otras preguntas que permitan reconocer un patrón de formación a partir de un conjunto finito de valores, para luego extraer la regla que generaliza la relación y actividades posteriores, en donde se obtengan nuevos intensivos que representen familias de funciones en las que los movimientos descritos en el enunciado sean sólo casos particulares. Así, se pueden considerar preguntas en donde la rapidez cambie y se cuestione por los cambios que esto genera en los tiempos de encuentro, etc. |

*Fuente*: Creación propia

## Tarea modificada en base a los criterios establecidos

Se modifica al enunciado, considerando inicialmente información en lengua natural, tal como se presenta en la figura 3.

### Trayectos

Autor: (IREM) Instituto de Investigación de Enseñanza de las Matemáticas

En una competencia escolar, dos estudiantes caminan simultáneamente y en el mismo sentido a lo largo de un trayecto rectilíneo con las piernas unidas en la parte inferior por una cinta para hacer más difícil el desplazamiento.
La estudiante A empieza a caminar a 50 m de un punto de referencia y camina hacia el punto final del trayecto, el cual se encuentra a 900 m del punto de referencia, y camina hacia el punto final a razón de $\frac{5}{3}$ (m/s). La estudiante B comienza en el punto ubicado a 300 m del punto de referencia y camina hacia el punto final del trayecto a razón de $\frac{10}{9}$ (m/s). Durante todo el recorrido los estudiantes mantienen un ritmo constante de movimiento.

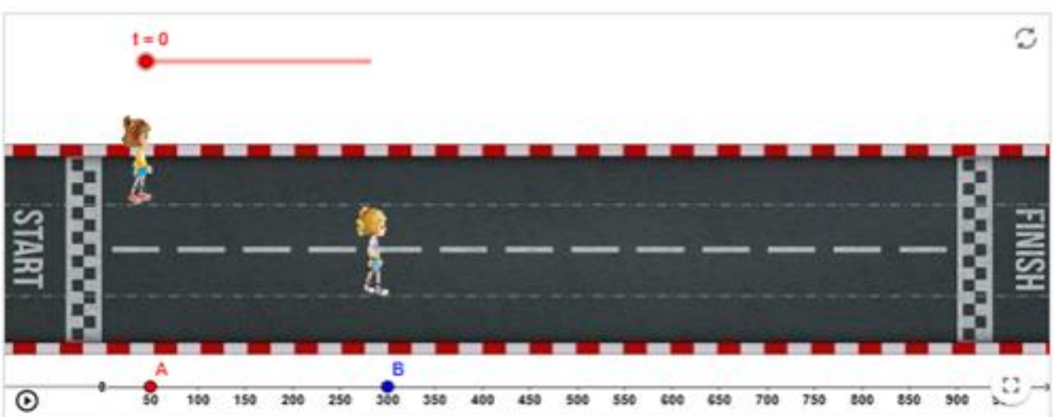
*Figura 3:* Enunciado de la tarea modificada
*Fuente:* Resolución de problemas de regularidad, equivalencia y cambio (Gaita et al, 2022a, p. 82).

En la parte a) se prescinde de la información brindada en el plano cartesiano y se reemplaza por una actividad exploratoria en un sistema unidimensional empleando Geogebra; esto permite reconocer que las posiciones cambian en el tiempo, pero por los valores que toma el deslizador, no será inmediato determinar el cambio por segundo en las distancias recorridas por cada niña. De la manipulación del deslizador, se puede responder la pregunta a) pues se observará que la niña que salió con ventaja, llegará después a la meta. Esto se detalla en la figura 4.

### Trayectos- parte a

**¿La estudiante que empezó con más ventaja llega primero a la meta? Analice qué ocurre cuando el tiempo transcurre al deslizar el punto t. (t representa el tiempo en segundos)**

El punto t se desliza de manera automática al hacer clic en ⊙ y se detiene al hacer clic en ⊚.




**¿Cuántos metros recorre la estudiante más rápida por cada segundo?**

*Figura 4:* Enunciado de la pregunta a)
*Fuente:* Gaita et al. (2022a, p. 82).

Adicionalmente, de comparar los datos relacionados con la rapidez, $\frac{5}{3} = \frac{15}{9} > \frac{10}{9}$ (m/s), se concluirá que la estudiante A es la más rápida y que recorre 5 metros cada 3 segundos, o, equivalentemente, $\frac{5}{3}$ metros cada segundo.

En la parte b), se pide determinar cuántos metros avanza cada niña en los 3 minutos. Eso requiere un proceso de generalización cercana, considerando que lo recorrido en un mismo tiempo es constante para cada niña. Así, como la estudiante A recorre $\frac{5}{3}$ metros por segundo, en 180 segundos recorrerá $\frac{5}{3}(180) = 300$ m; la estudiante B recorre $\frac{10}{9}$ metros por segundo, en 180 segundos recorrerá $\frac{10}{9}(180) = 200$ m. Y como la posición inicial de A era 50 m, luego de 3 minutos se ubica en la posición 350 m. Dado que la posición inicial de B era 300 m, luego de 3 minutos se ubica en la posición 500 m. Así, la distancia que las separa, luego de 3 minutos es 150 m. Estos resultados no se obtienen de la manipulación, pero se validan con esta.

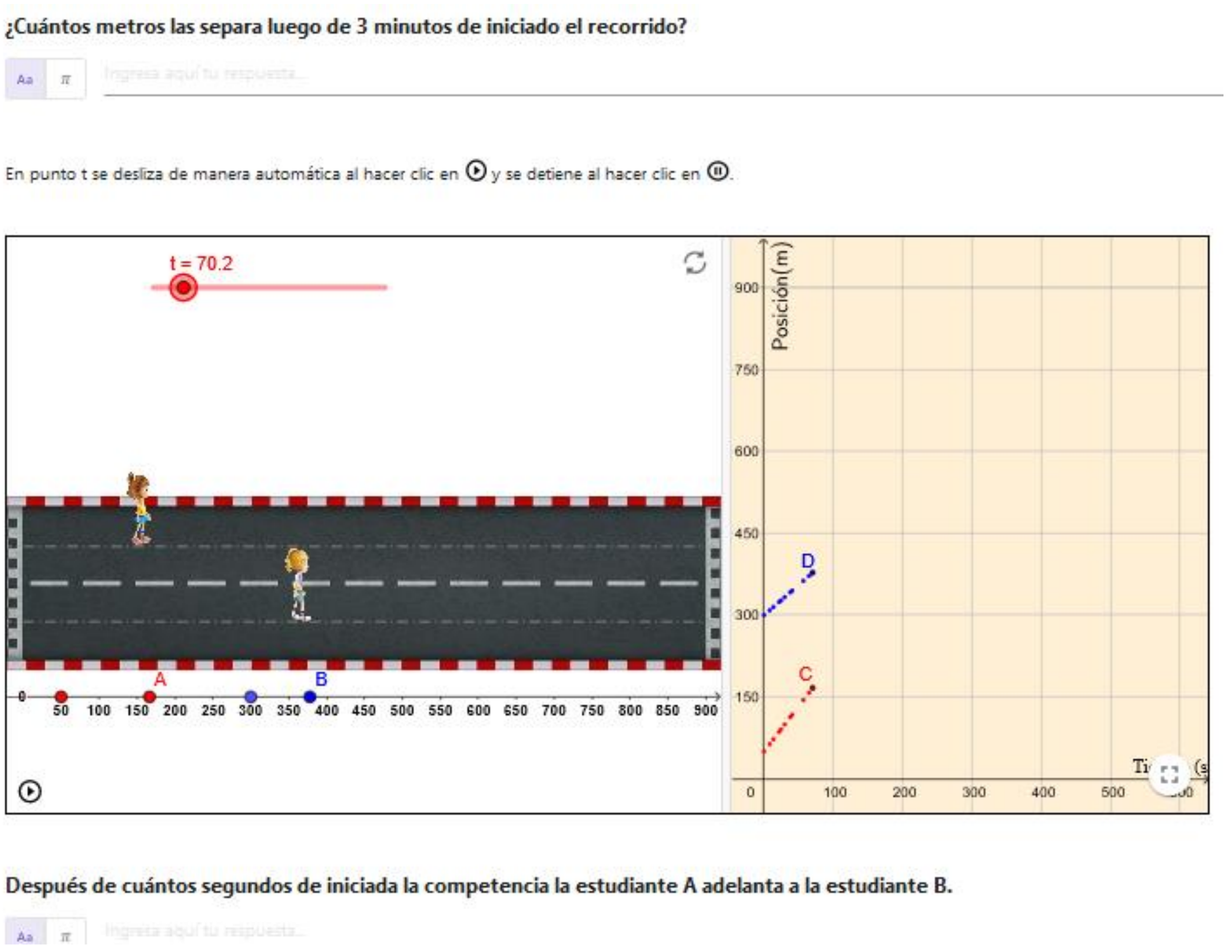



*Figura 5:* Enunciado de la pregunta b)
*Fuente*: Gaita et al. (2022a, p. 82).

.

Además, en la parte b) también se pregunta por el tiempo que debe transcurrir desde que se inició la competencia para que la estudiante A adelante a la estudiante B. Esa información no se obtiene del gráfico; se hace necesario obtener las expresiones algebraicas para las posiciones y resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas: $y = \frac{5}{3}t + 50$; $y = \frac{10}{9}t + 300$. La solución del sistema de ecuaciones es $t = 450$ e $y = 800$, que gráficamente corresponde al punto de coordenadas (450; 800), punto de intersección de las rectas que representan la distancia recorrida por las estudiantes en función al tiempo transcurrido. Por lo tanto, las posiciones de las estudiantes A y B coinciden a los 7minutos y 30 segundos. Como se ha puesto en evidencia, esta actividad demanda el empleo de diversos lenguajes y obliga a trabajar en el lenguaje alfa numérico.

Finalmente, en la parte c) de la tarea, se debe hallar el valor de un parámetro (la rapidez de la estudiante A que ahora no es dato) para que se cumpla una determinada condición: la competencia termine un empate.

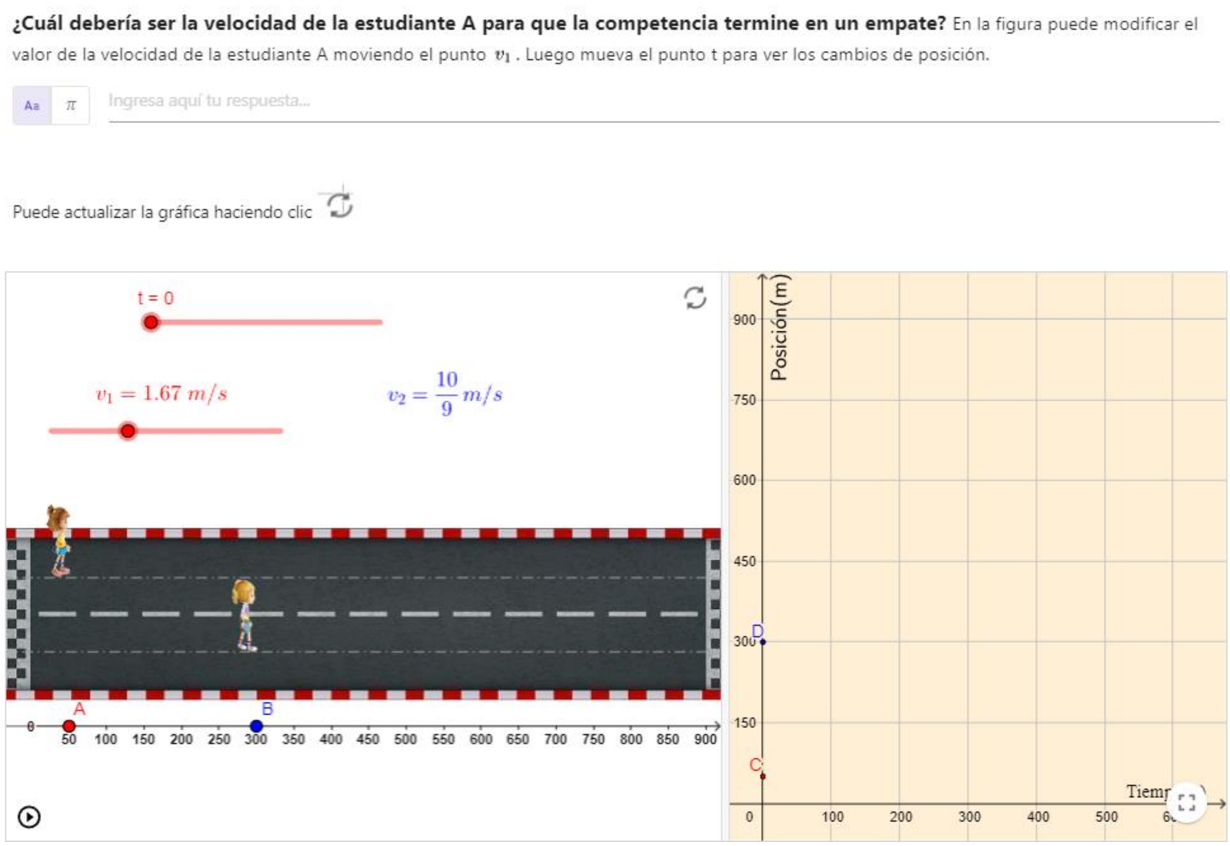



*Figura 6:* Enunciado de la pregunta c)
*Fuente:* Gaita et al. (2022a, p. 83).

Esto requiere de un proceso de generalización que se manifiesta porque se debe estudiar una familia de funciones representadas por expresiones como las siguientes:
Estudiante A: $f(t) = mt + b_1$; Estudiante B: $g(t) = nt + b_2$. Como la gráfica de $f$ pasa por los puntos (0; 50) y considerando que el valor de $m$ debe hallarse, se obtiene: $f(t) = mt + 50$, mientras que la función $g(t) = \frac{10}{9}t + 300$.

Como se quiere que las posiciones finales coincidan, eso significa que debe existir un valor de $t^*$ común tal que $f(t^*) = g(t^*) = 900$. De la función $g(t^*) = \frac{10}{9}t^* + 300 = 900$, se tiene que esto ocurre para el tiempo $t^* = 540s$. Reemplazando en la función $f(t) = mt + 50$, el valor $t^* = 540s$ y $f(t^*) = 900$, se obtiene que la velocidad m, en metros por segundo, debe ser:
$900 = m(540) + 50$, luego $m = 1{,}57$.

Las actividades en Geogebra se pueden encontrar en los siguientes enlaces.
Parte a) https://www.geogebra.org/m/wufbjz9w
Parte b) https://www.geogebra.org/m/nbdj7hda
Parte c) https://www.geogebra.org/m/qvnghayg

## Consideraciones finales

El profesor de matemáticas debe ser capaz de analizar si los problemas que usualmente emplea en sus clases generan prácticas matemáticas de diferentes niveles de complejidad; de no ser así, debe contar con herramientas teóricas que le permitan promover el desarrollo del razonamiento algebraico de sus estudiantes.

Los problemas modificados priorizan el trabajo exploratorio, acompañado con preguntas que contribuyan a identificar patrones o regularidades; esto es fundamental para avanzar en procesos de generalización. En esa medida, se hará necesario emplear el lenguaje alfanumérico, luego de haber empleado otros lenguajes y de haber establecido relaciones entre ellos.

A partir de un estudio inicial con valores particulares, se pueden estudiar regularidades, las que pueden ser más evidentes si se contempla el uso de recursos como hojas de cálculo o GeoGebra. Si se formulan preguntas que exijan establecer relación entre las representaciones gráficas y otros lenguajes, se obtendrá información adicional que contribuirá a una mejor comprensión del problema.

## Referencias y bibliografía

Carraher, D. y Schliemann, A. D. (2019): Early algebraic thinking and the US mathematics standards for grades K to 5 / El pensamiento algebraico temprano y los estándares matemáticos en la Educación Primaria (6–12años) en Estados Unidos. Infancia y Aprendizaje. *Journal for the Study of Educational Development*. https://doi.org/10.1080/02103702.2019.1638570

Gaita, C., Gonzales, C., Ugarte, F. y Wilhelmi, M. R. (2022a). *Resolución de problemas de regularidad, equivalencia y cambio. Desarrollo didáctico de la competencia*. LIMA: FONDO EDITORIAL PUCP.

Gaita, C., Ugarte, F. y Gonzales, C. (2022b). Criterios para diseñar tareas que desarrollen el razonamiento algebraico elemental. *Revista de Matemática, Ensino e Cultura - REMATEC*, 17 (42), pp. 162-179. https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2022.n42.p162-179.id455

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-3.

Godino, J. D., Castro, W., Aké, L. y Wilhelmi, M. D. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *Boletim de Educação Matemática - BOLEMA*, 26 (42B), 483-511. https://doi.org/10.1590/S0103-636X2012000200005

Godino, J. D.; Batanero, C.; Font, V.; Giacomone, B. (2016). Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas: el modelo CCDM. In: Fernández, C. et al. (Ed.). *Investigación en Educación Matemática XX*. Málaga: Ed. SEIEM, 2016. p. 288-297.

PERÚ. Ministerio de Educación del Perú (2016). *Currículo Nacional de la Educación Básica*. 224p. Disponible en: http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/curriculo-nacional-de-la-educacion-basica.pdf.

PERÚ. Ministerio de Educación del Perú (2019). Resolvamos problemas 4. Cuaderno de trabajo de Matemática. Lima: Autor. Disponible en https://repositorio.minedu.gob.pe/handle/20.500.12799/6861

Pino-Fan, L., y Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *PARADIGMA*, 36(1), 87-109. https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2015.p87-109.id552