XVI CIAEM
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference of Mathematics Education
UNIVERSIDAD DE LIMA
Lima - Perú
30 julio - 4 agosto 2023
xvi.ciaem-iacme.org

¿Qué hay de maravilloso en el continuo aritmético de los números reales?

Carlos **Sánchez** Fernández
Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana
Cuba
carlossanchezfernandez@gmail.com

Resumen

Desde la época dorada de la matemática helena el "continuo aritmético" ha sorprendido a los más ilustres pensadores cuando les revelaba sus singulares maravillas. Mucho se ha escrito sobre las propiedades de los números, pero todavía, cuándo procuramos hacer más seductor nuestro discurso, aparecen vacilaciones. Y cada nivel educacional enfrenta sus propios conflictos cognitivos con diferentes dominios numéricos. En esta charla nos interesa subrayar que los números no son simplemente para hacer cuentas, sino además para hacer cuentos sobre su "vida y prodigios". A fin de cuentas, esta será una charla con el objetivo de compartir experiencias para que nuestra actividad docente no pierda su encanto y mostrar una forma de cómo se puede usar la historia de la matemática para hacer más atractivas nuestras clases sobre los principales dominios numéricos. Además, abrimos el diálogo sobre los aspectos más seductores de los números reales en cada nivel educacional.

Palabras claves: Historia de la matemática; cultura matemática; dominios numéricos; números hipotenúsicos; números perfectos; números metálicos; números plásticos; números trascendentes.

Introducción

Esta conferencia pretende ilustrar aquellas características que reflejan mejor lo más atractivo del "continuo aritmético", es decir, de los diferentes tipos de dominios numéricos que conforman la arquitectura de la recta real. Se ha concebido para ser disfrutada; no para aburrir y mucho menos para estresar al interesado. Pensamos que, así como la gente gusta del arte por el simple placer de conocerlo y disfrutarlo, así deberíamos gustar de la matemática por sí misma y no como algo que existe la obligación de saber por su utilidad y aplicación (que, por supuesto tiene con creces y es meritorio comunicarlo).

Hemos tomado como marco teórico, ante todo, las enseñanzas de ese gran maestro americano Don Ubiratan D'Ambrosio sobre *Etnomatemática* (D'Ambrosio, 2002). Nos ha inspirado, también, el excelente libro sobre *Enculturación Matemática* de Alan Bishop (Bishop, 1999); ambos educadores han merecido la Medalla "Félix Klein" por su admirable obra en favor de la cultura matemática. Hay una idea capital en la obra de estos dos grandes maestros que nosotros compartimos: la convicción de que la Matemática es parte de la Cultura. Y como dijo alguien ingenioso: "*Cultura es lo que nos queda cuando olvidamos todo lo que nos obligaron a saber*". Y, en busca de precisión, el diccionario de la RAE nos orienta: Cultura es el "*conjunto de conocimientos que permite a alguien desarrollar su juicio crítico*". Luego, cuando decimos que pretendemos elevar nuestra *Cultura Matemática*, es porque queremos compartir los conocimientos matemáticos imprescindibles para ser más lúcidos y capaces de ejercer con eficacia y justicia nuestra función pedagógica. Para nosotros, el recurso principal a nuestra disposición y con estos fines, es la Historia de la Matemática.

Disfrutar del placer estético de la matemática exige sin duda un grado de participación activa mucho más intenso que al recrearse con la música, el cine o la pintura. El encanto de la matemática está en su íntima y armoniosa estructura donde se ligan objetos de naturaleza asombrosamente disímiles. Su atractivo está también en la generalización y la abstracción de sus teorías que engloban, en precisas y concisas formulaciones, toda una odisea de más de cuarenta siglos de una historia dinámica, tortuosa, llena de contradicciones y tensiones, colmada de retos al intelecto.

Nuestro interés es compartir experiencias en el uso de la historia de la matemática como herramienta didáctica para la elevación de la cultura matemática. Nutren estas experiencias la oportunidad aprovechada de coordinar -e impartir con sumo placer junto a la profesora Rita Roldán- un curso por la televisión educativa cubana en la serie de *Universidad para todos* con el título de *Números y Figuras en la Historia*. Curso que por su éxito se editó y en parte se publicó en un sencillo libro (Sánchez y Roldán, 2012). Muchas de las cuestiones señaladas en esta charla han sido originadas en la concepción de estas dos simples obras.

Hemos procurado sintetizar dialécticamente las facetas lógica, histórica y cognitiva del tema y, en definitiva, a continuación, compartimos nuestras ideas antes expuestas en otras publicaciones (p. e. en Sánchez, 2016 o en Sánchez y Valdés, 2017) ilustradas aquí con el tratamiento particular de algunas propiedades relacionadas con cinco grandes tipos de números reales: naturales, fraccionarios, racionales, irracionales algebraicos e irracionales trascendentes.

I. Números naturales

Desde muy remota época aparecen los números naturales, es decir, los enteros positivos (sin el cero). Pero son los pitagóricos con su filosofía numerológica quienes aportan más casos atractivos. Los números figurados: triangulares, cuadrados, cubos, pentagonales, etc. Los números primos y su distribución tan irregular, con subconjuntos todavía más erráticos como los primos gemelos o los primos trillizos, son algunos más o menos conocidos. Sin buscar extravagancias, el mismo teorema de Pitágoras nos introduce en el famoso problema de la descomposición en sumas de cuadrados, que va a ser tratado en diferentes momentos por destacados matemáticos como: *Diofanto* de Alejandría, Pierre de *Fermat*, Leonhard *Euler* y Jean-Louis *Lagrange*. A fines del siglo XVIII se probó que todo número natural se puede representar como suma de cuatro cuadrados, pero no todos se descomponen en la suma de dos cuadrados. A los números que se pueden representar como suma de dos cuadrados les llamamos *números hipotenúsicos* y tienen una fértil historia que merece ser conocida y divulgada (Sánchez y Roldán, 2012, pp. 40-49).

Otro tema atractivo, no tan fértil, aunque motivador a la reflexión, es el tema de los *números perfectos*. En *"Los Elementos"* de Euclides se define como *número perfecto* a aquel que es la suma de sus divisores propios. Es Euclides quien nos presenta la relación existente entre los números perfectos y los números primos, al demostrar que si el número $2^n - 1$ es primo, entonces el número $2^{n-1}(2^n - 1)$ es un número perfecto. Es muy fácil demostrar que a menos que n sea primo, $(2^n–1)$ es compuesto. Pero, no nos dejemos engañar por esta aparente sencillez, pues $2^{11} - 1 = 2947 = 23 \cdot 89$ es compuesto, aunque 11 es primo (esto se descubrió en 1536). Los números primos de la forma $(2^n–1)$ son conocidos como *números primos de Mersenne*, pues fue el monje francés Marín Mersenne (1548-1648), quien primero publicó una larga lista de ese tipo de números en el año 1644, exponiendo los que suponía eran los primeros 11 números primos de este tipo. Mersenne cometió sólo 5 errores, lo cual es un gran mérito, teniendo en cuenta que en su época no existían aún las calculadoras…. Material sobre los números perfectos, además de los mencionados de Euclides y Mersenne, se encuentra en la obra de Nicómaco de Gerasa, Leonhard Euler o en libros de referencia más modernos como (Sándor y Cristici, 2004, pp. 15–98). Es interesante señalar que permanece abierta la pregunta sobre si existen o no infinitos números primos de Mersenne. Sin embargo, la fórmula $2^p - 1$ para números primos p sigue siendo hoy una de las más (si no es la más) utilizada en la generación de números primos y en trabajos de Criptografía. En libros de historia de la teoría de números como el seductor (Burger, 2007) se encuentran, con paciencia, muchos asuntos que pueden motivar a los jóvenes.

II. Números fraccionarios

Las fracciones, como todos los descubrimientos matemáticos, surgieron motivados por las necesidades de los hombres, en este caso, la de expresar resultados a los cuales no se podían asociar números enteros. Los egipcios, mucho antes de la construcción de las pirámides, crearon "un sistema" que tenía como base la interpretación de las *fracciones alícuotas*, es decir, de la forma $\frac{1}{n}$, y algunas particulares como $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$, expresadas, lógicamente, mediante los jeroglíficos correspondientes a su sistema de numeración. A tales fracciones se les acostumbra llamar *fracciones egipcias*. Toda fracción de la forma $\frac{p}{q}$ (p y q enteros positivos, $q \neq 1$) debía expresarse mediante la suma de fracciones egipcias. Debemos advertir que la elección de los sumandos no es unívoca, por ejemplo, se tiene el caso de $\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$ y $\frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15}$.

Resultó necesario el uso de diferentes fórmulas para realizar las representaciones de las fracciones no alícuotas, una de estas fórmulas es $\frac{2}{3k}=\frac{1}{k}+\frac{1}{6k}$, otra fórmula, al parecer más compleja, utilizada para construir las tablas es $\frac{2}{pq}=\frac{1}{pr}+\frac{1}{qr}$, en la cual $r=\frac{1}{2}(p+q)$

El periodo comprendido entre los siglos V-XII de d. C., se considera el de mayor desarrollo y significación en la matemática en la India. Durante este tiempo se destacaron los trabajos con fracciones desarrollados por eminentes matemáticos como: Brahmagupta (s. VII), Mahavira (siglo IX) y Bhaskará (siglo XII). Revisando la obra de estos y otros matemáticos, se encuentran notables problemas de descomposición aditiva y representación de números complicados por fracciones más simples de diferentes tipos.

El famoso matemático húngaro Paul Erdös (1913-1996) planteó varias conjeturas sobre números fraccionarios, pero la más popular es la formulada junto al germano Ernest Gabor Strauss (1922-1983) a fines de los años 40's y sugiere simplemente que todo número fraccionario de la forma $4/n$ puede descomponerse como la suma de tres fracciones egipcias. Esta conjetura permanece abierta, pero en la búsqueda de su solución se han encontrado notables resultados (ver p. e. Guy, 2004)

Tomando en consideración que las operaciones con números fraccionarios siempre han sido un obstáculo cognitivo en nuestras aulas de primaria, nos parece estimulante mezclar la descomposición en fracciones egipcias -que son más fáciles de manipular- con las operaciones adición y multiplicación de números fraccionarios (recomendamos los amenos libros de Crilly, 2011 y Stewart, 2008)

III. Números racionales

Cuando hablamos de números racionales, consideramos no solo los enteros y los fraccionarios positivos, sino también a los negativos y, además, al número más singular y espinoso para su manipulación: *el cero*. Tanto los números negativos, llamados *falsos* durante muchos siglos, como el cero, denominado *sifr* en el mundo árabe islámico que quiere decir "vacío", demoraron en ser aceptados dentro del universo de los números, simplemente porque el concepto número se asociaba íntimamente al concepto magnitud y las propiedades aritméticas con las magnitudes no dejaban oportunidad de desarrollo a estos números "plebeyos" que carecen de los privilegios manipulativos de los enteros o fraccionarios positivos. Por ejemplo, ¿quién argumenta fácilmente por qué el producto de dos números negativos es positivo? Además ¿cómo hallar el cociente de un número cualquiera entre cero?

En América, los mayas idearon un sistema posicional de base 20 con el 5 como base auxiliar. Aunque al principio este sistema puede parecer aditivo es, realmente, un sistema posicional que se escribe de arriba abajo, empezando por el orden de magnitud mayor. Al tener cada cifra un valor relativo de acuerdo con el lugar que ocupa, se hace imprescindible la presencia de un signo para el cero, con el cual indicar la ausencia de unidades de algún orden, y los mayas lo usaron, aunque no parece haberles interesado el concepto de cantidad nula; lo usaron como hicieron antes los babilonios, simplemente, para indicar la ausencia de otro número.

Alrededor del siglo VII d. C. el cero se incorpora a la matemática india. Los documentos revisados señalan que el primer matemático indio célebre que hizo uso aritmético del signo 0 fue Brahma Gupta alrededor del año 620.

Aunque es cierto que el número racional más singular es el cero, la propiedad más delicada de los racionales está relacionada con el orden total que disfrutan y es su *densidad*: entre dos números racionales cualesquiera (tanto positivos como negativos) se encuentran infinitos números alojados entre estos dos (Bergé, 2010). Esta propiedad produce, más tarde, un conflicto cognitivo cuándo se dice que debemos llenar los "huecos" entre números racionales para completarlo y construir los números reales como base de todo el análisis matemático. El estudiante piensa: *Si ya me hicieron creer que estos racionales son densos y con estos puedo hacer todas las mediciones y cuentas posibles ¿para qué introducir más números no racionales y complicar mi vida?* Para poder responder a esta honesta inquietud usamos la historia y damos a conocer cómo aparecieron los primeros números "inconmensurables" o "inexpresables" y cómo se han hecho, poco a poco, imprescindibles, a la vez, que nuestro conocimiento del concepto *número* crecía hasta lograr independencia del concepto *magnitud* (Sánchez y González, 2013 o Sánchez y González, 2015). No deberíamos luchar contra estos conflictos cognitivos, sino aprovecharlos para desarrollarnos intelectualmente y ampliar nuestra cultura aritmética (ver p. e. Güveli, Bakri y Güveli, 2022).

IV. Números irracionales algebraicos

Los números irracionales pueden ser de dos tipos principales: *algebraicos* si existe algún polinomio que anulan (p. e. $\sqrt{2}$) y *trascendentes*, aquellos para los que no es posible encontrar una ecuación algebraica que los tenga como raíz (p. e. π). Los algebraicos aparecieron primero en los problemas de medición de magnitudes físicas o geométricas, posiblemente antes de que los pitagóricos se convirtieran en los sabios más duchos en las especulaciones esotéricas con los números. Los helenos los denominaron "inconmensurables" porque no se podían comparar con una unidad dada para medir, o "inexpresables" porque no podían expresarse como cociente de dos números enteros positivos.

El pitagórico Teodoro de Cirene (s. V a. C.), famoso geómetra, uno de los maestros de Platón, fue de los primeros en plantear una teoría de números irracionales algebraicos que será recogida en los "Elementos" de Euclides. En particular demostró que los lados de los cuadrados cuyas áreas miden un número primo son inconmensurables con el lado del cuadrado de área unidad. Teodoro, también, fue el autor de la conocida espiral que representa longitudes irracionales $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, .., \sqrt{17}$ como hipotenusas de triángulos rectángulos de catetos 1 y 1, 1 y $\sqrt{2}$; 1 y $\sqrt{4} = 2$, y así hasta llegar a representar $\sqrt{17}$.

Posiblemente, después de las raíces cuadradas de 2 y 3, el número irracional algebraico más popular y utilizado sea el "número de oro" $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Este es un número que posee muchas propiedades interesantes y que fue descubierto en la antigüedad, no como *unidad de medida* sino como una relación o proporción entre magnitudes y ahora conocida como *razón áurea*. Esta proporción se encuentra tanto en algunas figuras geométricas como en la naturaleza en elementos tales como caracoles, flores, hojas y tallos de algunas plantas, el cuerpo humano, etc.

Asimismo, se atribuye un carácter estético especial a los objetos que siguen la proporción áurea y algunos pueblos hasta le han otorgado una importancia mística. A lo largo de la historia, se le ha atribuido significado en diversas obras de arquitectura y otras artes, aunque algunos de estos casos han sido refutados por escasa argumentación científica.

Desde el punto de vista puramente matemático es notable por estar entre los números que se expresan por proporciones entre magnitudes geométricas, a la vez son raíces de ecuaciones algebraicas y, no obstante, no es posible representarlos como cociente de dos números enteros.

Se conoce una sucesión de números enteros que posee asombrosas propiedades aritméticas y tiene lazos familiares con el número de oro. Se trata de la *sucesión de Fibonacci* F_n, introducida en el siglo XIII por el matemático Leonardo de Pisa, hijo del comerciante Bonacci de ahí el sobrenombre de *figlio de Bonacci,* o más breve, *Fibonacci*).

Lo maravilloso es que si formamos el cociente de dos términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci $\frac{F_{n+1}}{F_n}$, su valor numérico oscila siendo alternativamente menor y mayor que la razón áurea y cada vez más cerca de Φ. Más formalmente, el número de oro es el límite de la sucesión $\frac{F_{n+1}}{F_n}$. Este resultado fue descubierto empíricamente por el astrónomo y matemático alemán Johannes Kepler en el siglo XVII y pasaron más de 100 años hasta que pudiera demostrarse rigurosamente.

Una de las formas de desarrollar la matemática es con la investigación de la generalización de las relaciones cuantitativas y sus propiedades. En el siglo XX se han estudiado otros números irracionales que por la forma como se definen constituyen generalizaciones del número de oro. Son los llamados *números metálicos*, determinados por la fórmula:

$\delta_N = \frac{N+\sqrt{N^2+4}}{2}$, dónde N es un número natural; si N=1 obtenemos el número de oro.

Cuando N=2, $\delta_2 = 1+\sqrt{2} \approx 2,4142135624$ y es costumbre llamarle *número de plata*.

Para N=3, $\delta_3 = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \approx 2,36602540378$ es conocido como *número de bronce*.

Se prueba que el número de oro es la raíz positiva de la ecuación x^2- x-1= 0. Entonces, otra generalización del número de oro se realiza cambiando la ecuación cuadrática que lo define por la ecuación cúbica similar, es decir, x^3-x-1= 0. La única raíz real (irracional) de esta ecuación es denominada *número plástico*. Se comprueba que el valor del número plástico *pl* es

$$pl = \sqrt[3]{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} \approx 1,324718...$$

El concepto de número plástico fue descrito primeramente por el monje holandés Hans van der Laan (1904-1991) en 1928 cuando era un novicio aficionado a la arquitectura. Posteriormente fue estudiado más profundamente por el arquitecto inglés Richard Padovan (n. 1935). Como en el caso de la razón áurea, el número plástico aparece como el límite de la razón de los elementos contiguos de la *sucesión de Padovan* definida de forma similar a como se determina la sucesión de Fibonacci asociada al número de oro:

$$P_{(n+1)} = P_{(n-1)} + P_{(n-2)},\ \ P_{(0)} = P_{(1)} = P_{(2)} = 1$$

sus elementos son llamados *números de Padovan:*

1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, 21, 28, 37, 48, ...

Esta sucesión crece mucho más lentamente que la sucesión de Fibonacci asociada al número de oro. Algunos números son comunes en ambas sucesiones, como *3, 5 y 21*, sin embargo, no se sabe si existen infinitas concurrencias o son solo una cantidad finita de coincidencias. Como en casos anteriores, existe una vasta bibliografía sobre estos números (ver p. e. Sánchez, 2019 o Sánchez y Roldán, 2012, pp. 58-64]

V. Números irracionales trascendentes

Los dos números irracionales más conocidos y que no son algebraicos son la constante de Arquímedes "π" y la base de los logaritmos neperianos "*e*". La constante de Arquímedes aparece ligada a uno de los célebres problemas de la antigüedad: el *problema de la cuadratura del círculo*, es decir, a la búsqueda de un cuadrado con la misma área de un círculo dado. La constante de Neper *e* aparece implícitamente vinculada a los logaritmos y al interés compuesto, como fuera tratada en la obra de Jacobo Bernoulli, se encuentra de forma más explícita y con toda su fortaleza en la obra de Euler. Por eso algunos, con razón, la llaman *número de Euler*, en lugar de número de Neper (o de Bernoulli).

La determinación del área de un círculo o la longitud de su circunferencia son problemas que aparecen en casi todas las grandes civilizaciones antiguas. Resulta natural que los matemáticos intentaran encontrar relaciones métricas en el círculo que, posteriormente, les facilitara la construcción con regla y compás de un cuadrado equivalente al círculo. En los *Elementos* de Euclides aparece demostrado que el área del círculo *C* es proporcional al cuadrado de su radio, así como la proporcionalidad entre la longitud de la circunferencia y su diámetro:

$$\frac{Área(C)}{r^2} = k_1\ ,\ \frac{Perímetro(C)}{d} = k_2\ ,\ \text{donde } k_1 \text{ y } k_2 \text{ son constantes.}$$

Fue el gran sabio de la antigüedad, Arquímedes de Siracusa, en un breve tratado titulado *Sobre la medida del círculo*, quien iluminó el camino que habría de seguirse. Lo primero que hizo fue probar una relación entre el área del círculo y la longitud de su circunferencia, para reducir un problema al otro. Luego, igualó las dos constantes de proporcionalidad k_1 y k_2 -asociadas al área y a la longitud, respectivamente- a una única constante universal, así surge la constante que desde el siglo XVIII se acostumbra denotar por la primera letra griega de la palabra *perímetro* π. El siracusano se esmeró en encontrar un valor aproximado de la constante π mejor que las aproximaciones usadas en las culturas prehelénicas. En este proceder original de Arquímedes se une, magistralmente, el razonamiento euclidiano con la aritmética práctica y la lógica con la logística. Es sorprendente este trabajo minucioso de Arquímedes. A pesar de los limitados recursos de cálculo de su época, Arquímedes se las ingenió para hallar el perímetro de los polígonos de hasta 96 lados inscritos y circunscritos a un círculo, y encontrar que la longitud de la circunferencia unidad, es decir, la constante π, satisface la relación: $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ o, en notación decimal: $3{,}140845 < \pi < 3{,}142857$. Si se toma la media aritmética de sus cotas superior e inferior, se obtiene $\pi \approx 3{,}1418535$, aproximación mucho mejor que las usadas por egipcios y babilonios, puesto que tiene tres cifras decimales exactas.

Arquímedes en esta obra *Sobre la medida del círculo*, en definitiva, llega al resultado genial que hoy podemos enunciar: "El área de todo círculo es igual al área de un triángulo rectángulo con un cateto igual al radio y el otro cateto igual al perímetro" (recomendamos la lectura del interesante libro González Urbaneja (2008) dónde se presentan estas y otras de las maravillas heurísticas de la obra de Arquímedes)

¿Pero cuándo se demostró que tanto π como e eran irracionales y trascendentes? La demostración de su irracionalidad fue dada en el siglo XVIII en la obra de Euler, perfeccionada por Johan Lambert. Ambos utilizaron una herramienta introducida en Europa a fines del s. XVI: *la representación por fracciones continuas*. Euler probó que si un número es racional su representación por fracciones continuas es finita, mientras que si el número es irracional entonces esa forma de representación es infinita. Seguidamente demostró que la representación de π así como la de e, eran fracciones continuas no finitas.

Tanto Euler como Lambert sospecharon que no existían polinomios $p_1(x)$ y $p_2(x)$ con coeficientes racionales tales que $p_1(\pi)=0$ y $p_2(e)=0$, pero no pudieron probar esa conjetura. Por primera vez se demostró en 1873 por el francés Charles Hermite que e era trascendente, generalizando las fracciones continuas numéricas a las funciones. Casi diez años más tarde, en 1882, el alemán Lindemann, perfeccionó la herramienta usada por Hermite y probó que e^{γ} es trascendente si γ es algebraico no nulo. A partir de este resultado, usó la famosa y bella identidad de Euler y probó que, como $e^{i\pi} = -1$, entonces $i\pi$ es trascendente. Pero i es algebraico (raíz del polinomio $p(x) = x^2 + 1$), luego π es trascendente: ¡maravilloso!

Poco tiempo después se conjeturó que, si la base es algebraica, diferente de 0 y de 1, y si el exponente es también algebraico, pero no racional, entonces el resultado es trascendente, por ejemplo, ¿será $2^{\sqrt{2}}$ trascendente? Ese enigma es el séptimo de los 23 problemas planteados por David Hilbert en 1900, como los problemas principales a resolver en el emergente siglo XX. Hubo que esperar a 1934 para que aparecieran dos artículos con las demostraciones independientes de esta conjetura: una del ruso Aleksandr Gelfond y otra del alemán Theodor Schneider. Con este resultado se comprobó que e^{π} es trascendente, ya que:

$$e^{\pi} = e^{(i\pi)^{-i}} = (-1)^{-i} \ (\approx 23,140\,692\,632\,779\,269)$$

Pero hasta ahora (25 de marzo de 2023) no se sabe si

$$\pi^{e} \ (\approx 22,459\,157\,718\,361\,045)$$

es algebraico o trascendente, aunque nadie crea que es algebraico**.** Existen muchos otros enigmas trascendentes y aunque este tema es más de estudios universitarios, con una correcta orientación, puede haber estudiantes de secundaria con interés y talento suficiente para encontrar algo interesante en la extensa bibliografía (p. e. el clásico Baker, 2022; o el moderno Natarajan y Thangadurai, 2020)

Para reflexionar y compartir

Hemos mostrado una cantidad infinitesimal de maravillas aritméticas que podemos encontrar con la ayuda de la Historia de la Matemática. Seguro que un maestro motivado y motivador encuentra muchos más. Se me ocurre que un tal maestro podría interesarse en los *números computables*, (ver p. e. Weihrauch, 2000) o sobre los números transfinitos (Sánchez y Valdés, 2010), que no fueron tratados aquí, porque ambos temas exceden nuestros objetivos. Pero, algo dentro de nuestros objetivos aún no tratado es ¿en qué momento del periodo de enseñanza podemos introducir unos u otros? Y ¿por qué? Los dominios numéricos constituyen en Cuba y me atrevo aseverar que en la totalidad de nuestros países americanos, una de las principales líneas directrices en la enseñanza de la Matemática en todos los niveles -primario, secundario, terciario-, se consideran como un eje transversal que permea todo con conocimientos, habilidades y formas de pensamiento matemático. Pero, ¿realmente los exponemos de una forma amena, seductora?, o simplemente, cumplimos un programa y nos ceñimos a repetir año tras año cómo operar con los números, cómo usarlos en mediciones. ¿Es que nos preocupamos por comprender las maravillas del universo aritmético?, ¿sufrimos la decepción de ver tanta apatía y hasta rechazo de muchos alumnos por la “vida y prodigios” de los diferentes dominios numéricos? Nos gustaría dialogar un poco, como colofón de esta charla, o quizás mejor, después de una reflexión, sentarnos sosegados, con un traguito de pisco o un cafecito, a compartir criterios sobre estos temas tan universales.

Referencias y bibliografía

Baker, A. (2022). *Transcendental number theory*, paperback edition. [Ed. Original, 1975] Cambridge Un. Press. Cambridge.

Bergé, A. (2010). Students’ perceptions of the completeness property of the set of real numbers. *Int. Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 41(2), 217–227.

Bishop, A. (1999). *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Trad. Genís Sánchez Barberán. Ed. Paidós. España.

Burger, E. B. (2007). *Zero to infinity: a history of numbers*. The Teaching Company. Chantilly, Virginia.

Crilly, T. (2011). *50 cosas que hay que saber sobre matemáticas*. Ed. Ariel. Barcelona

D'Ambrosio, U. (2002). *Etnomatemática. Elo entre as tradições e a modernidade*. 2da. Ed. Autêntica. Belo Horizonte

González, P. M. (2008). *Arquímedes y los orígenes del cálculo integral*. Nivola. Libros y ediciones. Madrid. España.

Guy, R. K. (2004). *Unsolved problems in number theory.* Springer, New York.

Güveli, H., Bakri, A. y Güveli, E. (2022). The impact of the cognitive conflict approach on the elimination of the misconception in square root numbers. *Education Quarterly Reviews*, Vol.5 Special Issue 2: Current Education Research in Turkey, 39-52.

Natarajan, S. Y Thangaduri, R. (2020). *Pillars of trascendental number theory*. Springer. N. Y.

Sánchez, C. (2016). Temas fértiles para la cultura matemática *Cuadernos de investigación y formación en Educación Matemática*, Año 11, #15, 169-185.

Sánchez, C. (2019). La fértil sencillez de las irracionalidades enteras y el uso de las prácticas argumentativas en el aula Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. Año 14 # 18

Sánchez, C. y González, L. G. (2013). La emancipación conceptual de número real de la idea de magnitud: una mirada germánica. *Ciencias Mat.* Vol. 27, nº1. 53-63.

Sánchez, C. y González, L. G. (2015). *Dedekind. El arquitecto de los números*. Nivola. Libros y ediciones. Madrid. España.

Sánchez, C. y Roldán, R. (2012). *Paseo por el universo de los números*. Editorial Academia. Ciudad de La Habana. Cuba.

Sánchez, C. y Valdés, C. (2010). *El entrañable encanto de las matemáticas*. Ed. Félix Varela. La Habana.

Sánchez, C. y Valdés, C. (2017). Problematización histórica de temas matemáticos fértiles *UNIÓN Revista Iberoamericana de Educ. Mat.* Vol.46, junio, 09-32.

Sándor, J. y Cristici, B. (2004). *Handbook of number theory II*. Kluwer Academic, Dordrecht.

Stewart, I. (2008). *Historia de las matemáticas en los últimos 10 000 años*. Crítica. ISBN 978-84-8432-369-3.

Weihrauch, K. (2000). *Computable analysis*, Texts in theoretical computer science, Springer. New York.