



## Educación Matemática y Tecnologías Digitales: Planeamiento de tareas de investigación centradas en el aprendizaje de los estudiantes

Claudia Lisete Oliveira **Groenwald**  
 Universidade Luterana do Brasil  
 Brasil  
[claudiag@ulbra.br](mailto:claudiag@ulbra.br)

### Resumen

Este curso tiene como objetivo presentar, discutir y reflexionar sobre la importancia de las actividades investigativas en el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. La atención se centrará en el aprendizaje de los estudiantes y cómo estas tareas pueden ayudar a los profesores en su planificación didáctica. Los objetos de aprendizaje fueron desarrollados con el software GeoGebra planeados en el ámbito del Grupo de Estudios Curriculares en Educación Matemática (GECEM) formado con investigadores y estudiantes del Programa de Posgrado en Enseñanza de Ciencias y Matemáticas de la Universidad Luterana de Brasil.

*Palabras clave:* Tecnologías Digitales; Tareas de investigación; Demanda cognitiva; Aprendizaje; GeoGebra.

### Introducción

En este curso se presentarán los resultados de investigación del Grupo de Estudios Curriculares de Educación Matemática (GECEM), del programa de posgrado en Enseñanza de Ciencias y Matemáticas (PPGECIM) de la Universidad Luterana de Brasil (ULBRA), en el municipio de Canoas, en el estado de Rio Grande do Sul/Brasil, en el que se aborda el uso de las Tecnologías Digitales y el desarrollo de tareas de investigación que se consideran de alta demanda cognitiva.

Teniendo en cuenta que las tareas matemáticas pueden influir, estructurar y comandar la forma en que los profesores organizan sus clases y cómo los estudiantes perciben y aprenden matemáticas, entendemos la importancia de las investigaciones en la planificación y

organización de tareas de alta demanda cognitiva (procesos de pensamiento), dado que la relevancia de la relación entre el proceso de pensamiento (nivel de requerimiento cognitivo) y las tareas matemáticas es la principal imagen de las investigaciones de GECEM.

Así, se percibe que en entornos de aprendizaje es interesante combinar la investigación Matemática con softwares educativos, como el software GeoGebra, que puede brindar oportunidades para la creación, manipulación, exploración de situaciones, análisis, elaboración de conjeturas, verificación de regularidades, discusión de resultados y generalización. En este sentido, es necesario diseñar tareas que puedan ser el punto de partida de las investigaciones y exploraciones matemáticas de los alumnos y discutir cómo se pueden trabajar en el aula (Homa y Groenwald, 2016a). Las tecnologías pueden hacer una contribución significativa a esto. Se presentarán ejemplos de tareas utilizando objetos de aprendizaje desarrollados por el GECEM, que son tareas de investigación que, a nuestro entender, llevan a los estudiantes a realizar investigaciones en matemáticas.

### **Tareas matemáticas**

Las tareas matemáticas pueden variar desde un conjunto de ejercicios de rutina hasta un problema complejo y desafiante que centra la atención de los estudiantes en una idea matemática en particular (NCTM, 2014; NCTM 2015). Las tareas son los proyectos, preguntas, problemas, construcciones, aplicaciones y ejercicios en los que los estudiantes participan con el fin de desarrollar el pensamiento matemático, proporcionando los contextos intelectuales para el desarrollo matemático de los estudiantes. (NCTM, 1994).

Stein, Grover y Henningsen (1996, p. 460) definen una tarea como "una actividad de clase cuyo objetivo es centrar la atención de los estudiantes en un tema en particular". Según el documento NCTM (2014), la enseñanza efectiva utiliza las tareas como una forma de motivar el aprendizaje de los estudiantes para ayudarlos a construir nuevos conocimientos matemáticos a través de la resolución de problemas.

La reflexión sobre el papel de la tarea y su relevancia para el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje puede ayudar al profesor a comprender cómo la elección de la tarea puede influir en el aprendizaje de los estudiantes (Jesus, Cyrino y Oliveira (2018).

Se entiende que por la forma en que se presentan, interpretan, exploran y resuelven en las clases, las tareas matemáticas son un punto clave del aprendizaje de los estudiantes y, en este sentido, se valora la planificación de tareas que sean significativas y que los estudiantes requieran reflexiones que involucren conceptos matemáticos y habilidades de pensamiento matemático.

Según Penalva y Llinares (2011) es posible establecer un vínculo entre el aprendizaje de los estudiantes y la gestión de las tareas, siempre que les permitan seguir un camino claro hacia la comprensión del contenido matemático, los conceptos y los procedimientos involucrados.

Para Ponte (2004), hay diferentes tipos de tareas, como se muestra en la Tabla 1.

Tabla 1

*Comparación de diferentes tipos de tareas*

<b>Características de la tarea</b>	<b>Ejemplos</b>	<b>Potencialidades</b>
Naturaleza cerrada	Ejercicios, problemas	Importante para el desarrollo del razonamiento matemático del alumno, caracterizado por una estrecha y rigurosa relación entre datos y resultados.
Naturaleza más accesible	Exploraciones, ejercicios	Dar al estudiante un alto grado de éxito y desarrollo de confianza en sí mismo
Naturaleza más desafiante	Investigaciones, problemas	Indispensable para que los alumnos vivan una experiencia matemática efectiva.
En contextos reales	Tareas de investigación y modelado	Es importante que los estudiantes se den cuenta de cómo se usan las matemáticas en muchos contextos y que aprovechen el conocimiento de estos contextos.
Formulado en contextos matemáticos	Investigaciones, problemas, exploraciones.	Permiten al alumno darse cuenta de cómo se desarrolla la actividad matemática de los matemáticos profesionales.

*Fuente:* Ponte (2004)

Se entiende que, en la práctica profesional los docentes deben seleccionar las tareas que cumplan con los objetivos trazados, ajustando el nivel de requerimiento en cada situación, y el ajuste debe realizarse considerando el nivel cognitivo requerido de los estudiantes en la realización de la tarea. Según Penalva y Llinares (2011), el término Demanda Cognitiva se ocupa de la clase y el nivel de pensamiento requerido por los estudiantes para resolver la tarea, señalando lo que se alcanza y lo que se aprende en cada nivel. La demanda cognitiva de una tarea se refiere a los procesos del pensamiento, como la naturaleza del razonamiento, entendido en y para su resolución (Doyle, 1988).

Smith e Stein (1998) califican los niveles de demanda cognitiva en cuatro niveles: Nivel 1 - tareas que requieren memorización; Nivel 2 - tareas que utilizan procedimientos sin conexión; Nivel 3 - tareas que utilizan procedimientos con conexión; Nivel 4 - tareas que requieren "hacer matemáticas". Smith e Stein (1998) definen los niveles 1 y 2 como demandas de bajo nivel y los niveles 3 y 4 como demandas de alto nivel.

Las tareas de nivel 1 son de memorización, implican la reproducción de fórmulas, reglas, hechos o definiciones previamente aprendidas o ya establecidas; no se pueden resolver mediante procedimientos, porque no existen o por el tiempo dado para resolverlos; la tarea es breve para emplear el procedimiento; no son ambiguos, ya que implican reproducir exactamente algo visto

anteriormente y lo que debe reproducirse está establecido de manera clara y directa; no tienen relación con los conceptos o significados que subyacen a los hechos, reglas, fórmulas o definiciones aprendidas o reproducidas.

Las tareas del nivel 2 son de procedimientos sin conexión, son algorítmicas, porque utilizan procedimientos que se reclaman específicamente o su uso es obvio en función de la información que se encuentra en la tarea planificada; exigen un requerimiento cognitivo limitado para llevarlas a cabo con éxito; hay poca ambigüedad en lo que hay que hacer y cómo hacerlo; no tienen relación con conceptos o significados subyacentes al procedimiento utilizado; se centran en producir respuestas correctas en lugar de desarrollar la comprensión matemática; no requieren explicaciones, o sólo explicaciones centradas en describir el procedimiento utilizado.

Las tareas de nivel 3 son procedimientos con conexión, que centran la atención del estudiante en el uso de procedimientos para desarrollar una comprensión de los conceptos e ideas matemáticas; siguen formas (explícita o implícitamente) que son procedimientos generales, que tienen una estrecha relación con las ideas conceptuales, en lugar de algoritmos que no están claros en relación con los conceptos subyacentes. Por lo general, se representan de varias maneras (diagramas visuales, gráficos, material concreto, símbolos, situaciones problemáticas); hay conexiones entre múltiples representaciones, ayudando a desarrollar el significado matemático; requieren un cierto grado de esfuerzo cognitivo; aunque es posible seguir procedimientos generales, no se pueden usar sin pensar, porque los estudiantes necesitan comprometerse con las ideas conceptuales detrás de los procedimientos para realizar con éxito, la tarea.

Las tareas de nivel 4 necesitan hacer matemáticas porque requieren: un pensamiento complejo y no algorítmico (no hay aproximación con caminos ya recorridos en otras tareas, que se pueden recordar o un camino que es explícitamente sugerido por la tarea o instrucción previa); requiere que los estudiantes exploren y comprendan conceptos matemáticos, así como procesos y sus relaciones; implican autoverificación o autorregulación de los procesos cognitivos; ameritan que los estudiantes encuentren una respuesta que requiera la comprensión conceptual de la noción matemática, verificando y explicando la respuesta producida; les exige que accedan a conocimientos o experiencias relevantes y hagan un uso adecuado de ellos en el desarrollo de la tarea; esfuerzo cognitivo considerable y puede implicar un cierto nivel de ansiedad en los estudiantes debido a la naturaleza imprevisible del proceso de resolución requerido.

Las tareas deben llevar a los estudiantes a pensar en hacer Matemáticas, superando la memorización simple y los procedimientos sueltos, valorando los conocimientos previos aportados por ellos y permitiéndoles avanzar en la comprensión de los conceptos y el uso de los procedimientos matemáticos. Entendemos que es importante, en el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje, todo tipo de tareas, por lo que es relevante que el docente busque presentar las tareas de alta demanda cognitiva (tareas de nivel 4).

### **Ejemplo de una tarea de investigación**

Los objetos de aprendizaje presentados fueron desarrollados en GeoGebra y están disponibles en el repositorio digital del Laboratorio de Matemáticas del Programa de Posgrado

en Ciencias y Enseñanza de las Matemáticas de la Universidad Luterana de Brasil:  
<http://ppgecim.ulbra.br/laboratorio>.

En la Figura 1, el Objeto de Aprendizaje Diagonal del Polígono permite al estudiante definir el polígono por el número de sus lados y observar las diagonales asociadas a cada vértice y todas las diagonales simultáneamente, y así hacer sus hipótesis y deducir el modelo matemático para el número de diagonales de un polígono de  $n$  lados.

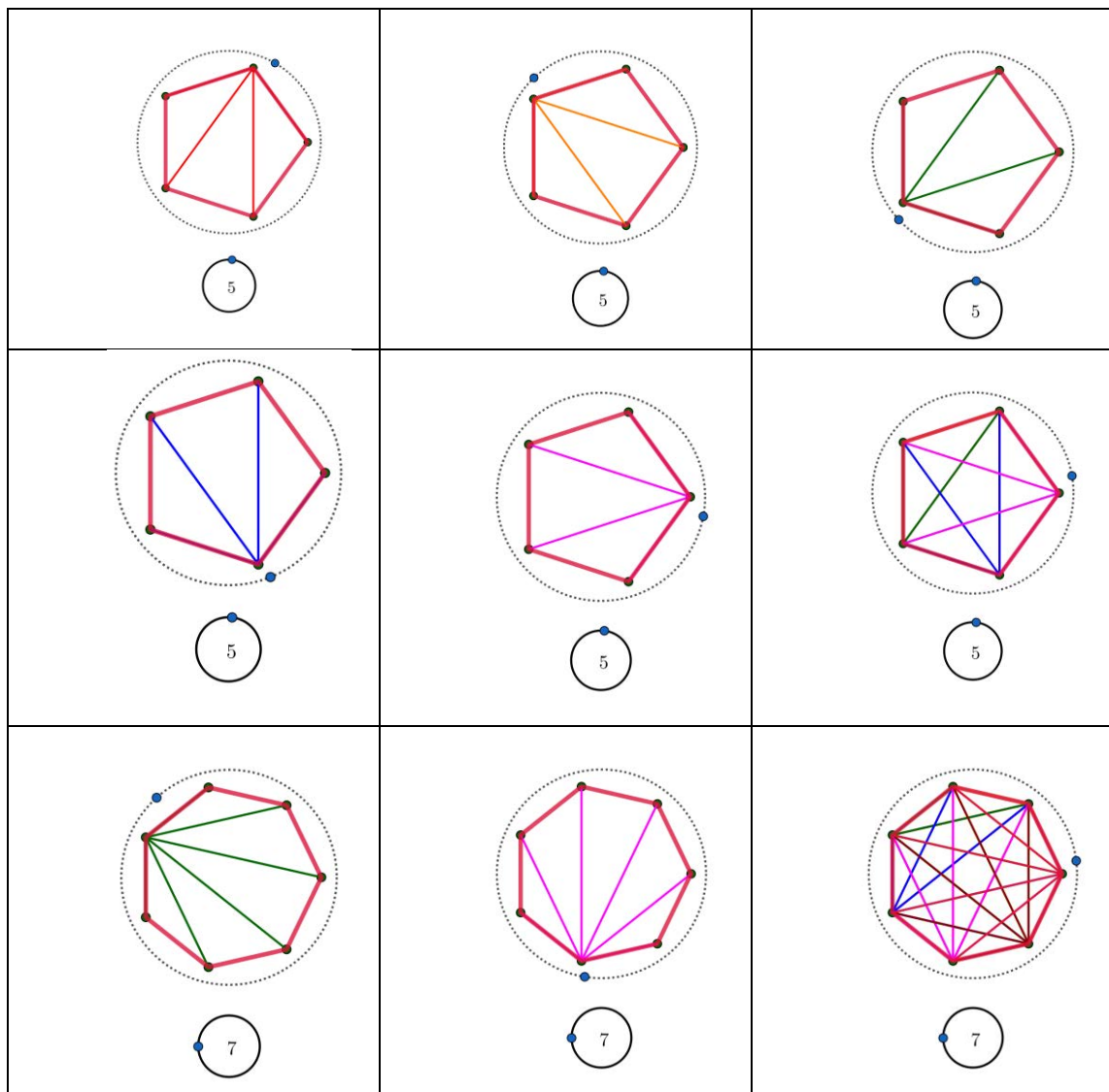


Figura 1. Posibles interacciones de polígonos de cinco y siete lados  
 Fuente: <http://ppgecim.ulbra.br/laboratorio>.

Al observar las interacciones es posible verificar que cada vértice se conecta a todos los demás vértices, pero las conexiones con los adyacentes no cuentan como diagonal. Por lo tanto, el número de diagonales por vértice viene dado por  $(d)(n)$ :  $d(n) = n(n - 3)$ .

Para un polígono de cinco lados totalizarían 10 diagonales, pero en la representación de todas las diagonales están presentes solo 5 diagonales. Para el desarrollo del pensamiento matemático se debe trabajar la actividad de manera que el alumno identifique la razón por la que las diagonales totales son la mitad, que, en el caso, cada diagonal se cuenta dos veces. Por lo tanto, la hipótesis para  $n$  lados es:  $d(n) = \frac{n(n-3)}{2}$ .

Por ejemplo, para un polígono de cinco lados, tenemos:  $d(5) = \frac{5(5-3)}{2}$ .

Para verificar esta hipótesis, el estudiante selecciona otros polígonos y comprende el número total de diagonales calculado con el número contado, partiendo de la hipótesis a una generalización. En la representación del polígono de 7 lados, se verifica que el número calculado de diagonales es el mismo que el representado en el objeto educativo:  $d(7) = \frac{7(7-3)}{2} = 14$ .

Para facilitar el recuento de las diagonales, el objeto de aprendizaje las muestra en diferentes colores. A medida que las diagonales se superponen, el recuento (en el polígono de 7 lados) en el sentido de las agujas del reloj muestra 4 rojos, 4 marrones, 3 rosas, 2 azules y 1 verde, totalizando las 14 diagonales.

### Consideraciones finales

Finalmente, se enfatiza que el docente debe estar preparado para insertar estos recursos en el aula, pero no debe apuntar a utilizar la tecnología solo por uso, sin una intención clara, definida y conocida por los estudiantes.

También es destacable que el software Geogebra es adecuado para el desarrollo de actividades interactivas, no siendo necesario el conocimiento de programación avanzada porque cuenta con interfaz intuitiva, recursos gráficos animados, además de ser multiplataforma, y poder ser utilizado en computadoras, tabletas y teléfonos móviles. Es importante destacar que los objetos desarrollados no deben ser presentados aisladamente, pues se basan en el conocimiento matemático de los conceptos involucrados, por lo tanto, se enfatiza la importancia de construir una secuencia didáctica que presente los objetos encadenados, para que permitan la visualización, la generación de hipótesis, el desarrollo de conjeturas y la generalización por parte de los estudiantes.

### Referencias y bibliografía

- Doyle, W. (1988). Work in mathematics classes: The context of students' thinking during instruction. *Educational Psychologist*, 23(2), 167–180.
- Homa, A. I. R. y Groenwald, C. L. O. (2016a). Incluyendo tecnologías no currículo de matemática: planeando aulas con o recurso dos tablets. *Revista Unión*, 48, 22–40.
- Homa, A. I. R. y Groenwald, C. L. O. (2016b). Área de figuras planas com objetos de aprendizagem no Geogebra. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, 9, 123–147.

- Jesus, C. C. De; Cyrino, M. C. Da y C. T.; Oliveira, H. M. De. (2018). Análise de tarefas cognitivamente desafiadoras em um processo de formação de professores de Matemática. *Educação Matemática Pesquisa*, 20(2). 21–46.
- NCTM. (1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática*. Lisboa: APM e IIE.
- NCTM. (2014). *Principles to actions: ensuring mathematical success for all*. Reston: National Council of Teachers of Mathematics.
- NCTM. (2015). *De los principios a la acción – para garantizar el éxito matemático para todos*. México: Editando libros S.A.
- Penalva, M. C. y Llinares, S. C. (2011). Tareas Matemáticas en la Educación Secundaria. In: GOÑI, J. M.; COLL, C. (Eds.). *Didáctica de las Matemáticas/Formación y Desarrollo Profesional del Profesorado*. 12 (II). Madrid: Graó, (pp. 27–51).
- Ponte, J. P. DA. (2004). Problemas e investigaciones en la actividad matemática de los alumnos. In: Giménez, J.; Santos, L.; Ponte, J. P. (Eds.). *La actividad matemática en el aula*. Barcelona: Graó, (pp. 25–34).
- Smith, M. S. y Stein, M. K. (1998). Selecting and Creating Mathematical Tasks: For Research to Practice. *Mathematics Teaching in the Middle Scholl*, 3, 344–350.
- Stein, M. K.; Grover, B. W.; Henningsen, M. (1996). Building Student Capacity for Mathematical Thinking and Reasoning: An Analysis of Mathematical Tasks Used in Reform Classrooms. *American Educational Research Journal*, 33(2), 455–488.