



## Reflexiones sobre las prácticas matemáticas realizadas en el contexto de los patrones y las sucesiones

Norma **Rubio** Goycochea  
 Pontificia Universidad Católica del Perú  
 Perú  
[nrubio@pucp.edu.pe](mailto:nrubio@pucp.edu.pe)

### Resumen

Sabemos que la enseñanza eficaz de las matemáticas es compleja y requiere tanto de diversos conocimientos como de competencias del profesorado que brinda experiencias de aprendizaje. El propósito de esta presentación es fomentar el diálogo en relación con las prácticas matemáticas realizadas por los profesores, frente a algunos episodios mostrados. Para ello, analizaremos los objetos ostensivos, (expresiones, símbolos, gráficos, etc.), los no ostensivos (conceptos, proposiciones, propiedades, etc.) y los procesos matemáticos que intervienen tanto en las prácticas operativas como en las discursivas, en las que la reflexión es sumamente importante. Mostraremos algunas herramientas propuestas por el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos, que nos ayudarán en el análisis. Los patrones y las sucesiones nos servirán de contexto, por ser tratados en los diferentes niveles educativos y por su riqueza en procesos, cuando son incluidos en tareas, como: resolución de problemas, argumentación, representación, conexiones y comunicación, entre otros.

*Palabras clave:* Didáctica de la Matemática; Educación; Enseñanza; Desarrollo profesional; Enfoque Ontosemiótico; Objetos y procesos; Álgebra.

### Introducción

En todos los niveles educativos, la enseñanza eficaz de las matemáticas desarrollada por los profesores es compleja y requiere no solo tener los conocimientos de la disciplina que imparten, sino también de competencias profesionales que brinden experiencias para el logro de los aprendizajes de los contenidos propuestos a los estudiantes.

En la formación inicial y continua de profesores de muchas instituciones educativas, la práctica reflexiva de los docentes es una componente importante del desarrollo profesional requerido para mejorar la calidad del proceso de enseñanza y el aprendizaje de los estudiantes. En el Perú, la reflexión sobre la práctica docente es un tema que ha sido abordado en diversas políticas y documentos educativos, tales como el Modelo del Buen Desempeño Docente (Ministerio de Educación del Perú, 2015) y el Diseño Curricular Básico Nacional de la Formación Inicial Docente Programa de estudios de Educación Secundaria, especialidad Matemática (Ministerio de Educación, 2020) publicados por el Ministerio de Educación. En estos documentos, se promueve la reflexión sobre la práctica docente como un componente importante del desarrollo profesional. Sin embargo, en ellos no se proporcionan herramientas que ayuden a los profesores en la reflexión sobre su práctica matemática de manera de sistematizarla. Por ello, es que consideramos importante conocer herramientas que ayuden en la reflexión y en un análisis sistematizado de la práctica docente.

El propósito de este Minicurso es fomentar el diálogo con los profesores participantes, que ayude a la reflexión y al análisis en relación con las prácticas matemáticas realizadas por ellos, frente a algunos episodios mostrados, tomando como contexto los patrones y las sucesiones. Se ha considerado estos objetos matemáticos, porque son tratados en los diferentes niveles educativos y porque, cuando son incluidos en actividades matemáticas, se evidencia la riqueza en el desarrollo de procesos como la resolución de problemas, el razonamiento y la prueba, la comunicación, las conexiones y la representación. Estos procesos son tomados en cuenta, para ser aprendidos, por los Principios y Estándares del Nacional Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000). Se consideran, además, los procesos tratados en las diversas investigaciones en el marco del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS) donde estos procesos son agrupados por aires de familia (Font y Rubio, 2016, 2017; Font et. al, 2008). En este Minicurso se propone analizar los objetos primarios establecidos en el EOS (Godino et. al, 2007) clasificados como ostensivos, (expresiones, símbolos, gráficos, etc.), los no ostensivos (conceptos, proposiciones, propiedades, etc.) y los procesos matemáticos que intervienen tanto en las prácticas operativas como en las discursivas, en las que la reflexión es sumamente importante.

Se presenta en este trabajo, en primer lugar, una breve descripción de algunos aspectos y herramientas del EOS que nos sirven para la reflexión y análisis de la práctica matemática realizada. Luego, se muestran la importancia de los patrones y las sucesiones con algunos episodios, los cuales serán analizados en el Minicurso haciendo uso de las herramientas propuestas por el EOS. Finalmente, se incluyen algunas reflexiones finales.

### **Análisis didáctico de prácticas, objetos y procesos matemáticos de la práctica reflexiva de los profesores**

En Godino (2009), se propone un modelo de conocimiento didáctico-matemático del profesor, basado en el EOS, en el que se consideran las diversas facetas o dimensiones (epistémica, cognitiva, afectiva, instruccional, mediacional y ecológica.) incluidas en la enseñanza y aprendizaje de contenidos específicos, así como diversos niveles de conocimiento en cada una de dichas facetas. En este modelo se propone un sistema de categorías del conocimiento didáctico-matemático (CDM) que permiten realizar un análisis global de los

procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y un análisis detallado de cada uno de los tipos de conocimiento que se ponen en juego para una enseñanza efectiva de las matemáticas. Hay varias investigaciones que dan cuenta de la utilidad de este modelo como las de Giacomone et.al, 2016; Pino et.al, 2022; Pino et.al, 2015 y Rubio, 2012, entre otras.

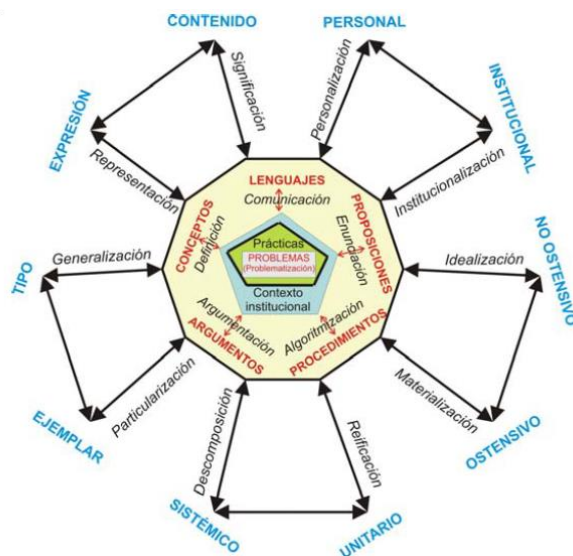


Figura 1. Prácticas, objetos y procesos matemáticos.  
Tomada de Godino (2009, p.22)

En relación con el análisis didáctico de prácticas, objetos y procesos (ver Figura 1), considerado en el EOS como “un estudio sistemático de los factores que determinan los procesos de enseñanza y aprendizaje de un contenido curricular o de aspectos parciales de los mismos”. En Godino (2009) se toman en cuenta cuatro niveles:

1. Prácticas matemáticas y didácticas en las que se describen las acciones realizadas para resolver las tareas matemáticas propuestas para contextualizar los contenidos y promover el aprendizaje; además de describir las líneas generales de actuación del docente y de los estudiantes.
2. Configuraciones de objetos y procesos (matemáticos y didácticos). En las cuales se describen de objetos y de procesos matemáticos que intervienen en el desarrollo de las prácticas, así como los objetos y los procesos que emergen de ellas. La finalidad de este nivel es describir la complejidad de objetos y significados de las prácticas matemáticas y didácticas como factor explicativo de los conflictos en su realización y de la progresión del aprendizaje.
3. Normas y metanormas. En este nivel se describen el conjunto de reglas, hábitos, normas que condicionan y hacen posible el proceso de estudio, y que afectan a cada faceta y sus interacciones.
4. Idoneidad. Es el nivel en el que se identifican de potenciales mejoras del proceso de estudio que incrementen la idoneidad didáctica.

En este Minicurso haremos hincapié en los dos primeros niveles de análisis didáctico.


### Contexto de reflexión. Patrones y sucesiones

Una de las formas en que se describen las matemáticas ha sido como el estudio de los patrones. Estos patrones los encontramos en muchos lugares, como, por ejemplo, en los mosaicos, azulejos o mayólicas de pared o pisos, los papeles decorativos de pared, hexágonos en los paneles de abejas y en cáscaras de piñas, las simetrías, etc. En diversas áreas, se estudian los patrones, entre ellas: botánica, química, biología, finanzas, estadística, psicología y en otros campos ajenos a las matemáticas, ciencias naturales, o ciencias sociales, como en la investigación policial, etc.

Además, los patrones y las sucesiones son tratados en los diferentes niveles educativos y, cuando son estudiados, se evidencia la riqueza con la que se pueden desarrollar los procesos como la resolución de problemas, el razonamiento y la prueba, la comunicación, las conexiones y la representación. La búsqueda de patrones debe ayudar a que los estudiantes empiecen, en sus primeros años, relacionando patrones visuales con los numéricos, luego estos con los algebraicos, formular conjeturas hasta llegar a ser capaces, de acuerdo al nivel educativo en el que se encuentren, a generalizar y a demostrar, desarrollando el pensamiento inductivo y deductivo. Por otra parte, los patrones y las sucesiones matemáticas son temas fundamentales en muchos cursos universitarios avanzados, como matemáticas, física y estadística.

A manera de ejemplo, se presenta a los profesores participantes en este Minicurso algunos episodios para ser analizados, como el siguiente:

Una profesora muestra a sus estudiantes la figura siguiente:



Luego, les pregunta: Si continuamos con el mismo patrón, ¿qué figura continúa un triángulo o un pentágono?, a lo que María contesta: *sigue un pentágono* y Luis responde: *sigue un triángulo*. ¿Quién tiene la razón y por qué?

Figura 2. Episodio sobre patrones

Otro episodio que se muestra a los profesores es el siguiente:

En una sesión de clase de secundaria, un profesor pide a sus estudiantes que completen el patrón numérico siguiente:

1    2    4    \_\_\_\_\_

¿Hay una única respuesta?  
 ¿Está mal formulada la pregunta?  
 ¿Qué cree que se propone el profesor al formular esta pregunta?

Figura 3. Episodio sobre patrón numérico. Sucesión de números

El objetivo de presentar estos episodios es analizar los objetos matemáticos presentes en la resolución de las tareas y todos los procesos que se pueden activar cuando son discutidos con sus colegas y que sus estudiantes pueden desarrollar, ya que deben para dar respuestas, deben comunicar sus ideas, justificarlas, conectarlas con otros temas, representar y formular problemas.

Además, se pretende que los participantes reconozcan los errores comunes en relación con los patrones, cuando no es claro el núcleo a considerar en dichos patrones y cuando se proporcionan pocos números, en el caso de las sucesiones de números.

Asimismo, se propone trabajar con la sucesión de los primeros  $n$  números enteros positivos, en diferentes contextos (aritmético, algebraico, geométrico) y diversos niveles educativos mostrando otros procesos como el de particularización y generalización propuestos en el EOS, entre otros procesos.

### Reflexiones finales

Estamos de acuerdo en que enseñar matemáticas es una labor compleja que requiere no solo saber matemáticas, sino que además se debe conocer a los estudiantes y lo que ellos saben, disponer de estrategias pedagógicas y cuándo usarlas, conocer de tecnologías y cuándo utilizarlas y, además, conocer cómo las matemáticas se conectan con otras áreas y con ella misma, lo que en el EOS se conoce como conocimiento común, conocimiento especializado y conocimiento profundo que debe tener un profesor. Es evidente, que no es suficiente con la formación inicial que se brinda a los profesores, porque mucho del conocimiento que se adquiere proviene propiamente de la experiencia en el aula. Por ejemplo, se ha tratado de mostrar, en relación con la suma de los primeros  $n$  números enteros positivos desarrollada en este Minicurso que, de acuerdo a los conocimientos que el profesor tenga sobre sus estudiantes, esta tarea podría ser presentada desde la historia o como una anécdota, resolviéndola dentro del contexto aritmético o algebraico, con diversas estrategias y llegando a plantear un problema que involucre el tema de combinatoria. Además, se trata de promover el desarrollo de diferentes procesos como la comunicación, representación, argumentación, conexiones, generalización y resolución de problemas, entre otros. Para ello, el profesor debe saber organizar la secuencia de las actividades propuestas en clase, saber preguntar y saber qué conocimientos previos deben tener sus estudiantes para resolverlas.

Por otro lado, para lograr que los estudiantes aprendan y, con ello, consideremos que el proceso de enseñanza ha sido eficaz, se requiere que se reflexione y analice las prácticas realizadas, en la que se tome en cuenta las respuestas de los estudiantes frente a las preguntas formuladas, por ejemplo, de manera de tomar decisiones sobre cómo corregir el error o añadirlo en la siguiente oportunidad para discutirlo con los propios estudiantes y el lograr los aprendizajes propuestos.

Asimismo, aunque en muchos de los casos la reflexión y el análisis de nuestras prácticas matemáticas las realizamos de manera individual, se pueden enriquecer los mismos procesos compartiendo las experiencias vividas en estas prácticas con nuestros colegas.

### Referencias y bibliografía

- Font, V. y Rubio, N. (2016). Procesos en matemáticas. Una perspectiva ontosemiótica. *La Matematica e la sua didattica*, 24 (1-2), 97-123.
- Font, V. y Rubio, N. (2017). Procesos matemáticos en el enfoque ontosemiótico. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso*

*International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.*  
Disponible en, [enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html](http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html)

- Font, V., Rubio, N y Contreras, A. (2008). Procesos en matemáticas. Una perspectiva ontosemiótica. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 21* (pp. 706-715). México D. F.: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.
- Giacomone, B., Godino, J. D., Wilhelmi, M. R. y Blanco, T. F. (2016). Reconocimiento de prácticas, objetos y proceso en la resolución de tareas matemáticas: una competencia del profesor de matemáticas. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 269-277). Málaga: SEIEM.
- Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20*, 13-31.
- Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39* (1-2), 127-135.
- Ministerio de Educación del Perú. (2015). *Marco del Buen Desempeño Docente*. Lima-Perú.
- Ministerio de Educación. (2020). *Diseño Curricular Básico Nacional de la Formación Inicial Docente Programa de estudios de Educación Secundaria, especialidad Matemática*. Lima-Perú.
- NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM
- Pino-Fan, L., Assis, A., & Castro, W. F. (2015). Towards a methodology for the characterization of teachers' didactic-mathematical knowledge. *EURASIA Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 11*(6), 1429-1456. doi: 10.12973/eurasia.2015.1403a
- Pino-Fan, L.R., Castro, W.F. & Moll, V.F. (2022). A Macro Tool to Characterize and Develop Key Competencies for the Mathematics Teacher' Practice. *International Journal of Science and Mathematics Education*. <https://doi.org/10.1007/s10763-022-10301-6>
- Rubio, N. (2012). Competencia del profesorado en el análisis didáctico de prácticas, objetos y procesos matemáticos (Tesis doctoral). Universitat de Barcelona, España. <http://www.tdx.cat/handle/10803/294031>