Actividades con GeoGebra y material lúdico para construir el concepto de fractal

José Carlos **León**
Universidad de Lima
Perú
jleonr@ulima.edu.pe
Isabel Torres **Céspedes**
Universidad de Lima
Perú
iztorres@ ulima.edu.pe

Resumen

El taller está dirigido a docentes de matemática de educación básica regular con el fin de enriquecer las estrategias metodológicas de la enseñanza de las matemáticas. El objetivo es analizar el conocimiento que tiene el profesor de matemática de los contenidos matemáticos como disciplina científica y como conocimiento de enseñanza y aprendizaje en la construcción de fractales. Para realizar el análisis se aplicará el modelo del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK). El trabajo es colaborativo ya que las actividades están diseñadas con material concreto, de esta forma los participantes podrán interactuar de manera individual y colectiva. Además, se hará uso del aplicativo GeoGebra 6, para vincular con la práctica docente y construir alguno de los fractales elaborados como la curva de Koch. En el taller, se espera generar evidencias del conocimiento de los profesores de los dos dominios del MTSK cuando identifiquen relaciones y patrones de regularidad en los fractales.

Palabras clave: Educación Matemática; Fractal; Curva de Koch; Triángulo de Sierpinsky, GeoGebra, Modelo del conocimiento especializado del profesor de Matemática.

Modelo del conocimiento especializado del profesor de Matemáticas

Usamos para el taller el modelo Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) propuesto por Carrillo et al. (2018), donde se considera al conocimiento del profesor especializado puesto que es útil el ejercicio de su práctica.

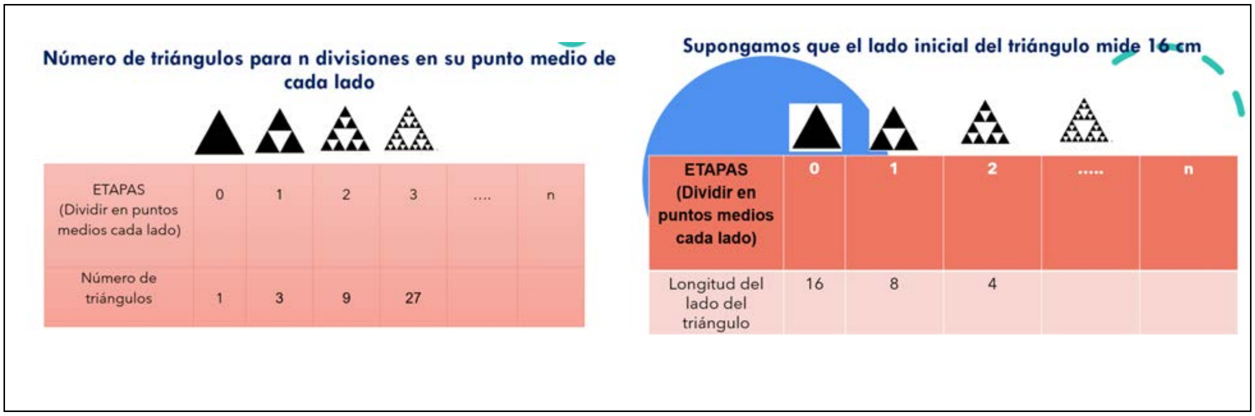
El MTSK es un modelo analítico que permite estudiar el conocimiento del profesor de matemáticas desde tres dominios: conocimiento matemático (MK), conocimiento didáctico del contenido (PCK) y dominio afectivo que permea todo el conocimiento del profesor. En nuestro trabajo no profundizaremos en el último dominio.

El dominio MK comprende tres subdominios: conocimiento de los temas (KoT), conocimiento de la Estructura Matemática (KSM) y conocimiento de la práctica matemática (KPM). El KoT comprende las siguientes categorías: procedimientos; definiciones, propiedades y sus fundamentos; registros de representación; y fenomenología y aplicaciones relacionados con el tema. El KSM incluye el conocimiento que el profesor posee sobre las conexiones entre elementos matemáticos. Se compone de cuatro categorías: conexiones de complejización, conexiones de simplificación, conexiones transversales y conexiones auxiliares. El KPM tiene que ver con un conocimiento relacionado a las reglas de construcción de un nuevo conocimiento matemático. Se contempla el conocimiento sobre la jerarquización y planificación como forma de proceder en la resolución de problemas matemáticos, las formas de validación y demostración, el papel de los símbolos y uso del lenguaje formal, los procesos asociados a la resolución de problemas como forma de producción matemática, las prácticas particulares del quehacer matemático y las condiciones necesarias y suficientes para generar un nuevo conocimiento.

El dominio PCK considera el conocimiento de la matemática desde la mirada puesta en la enseñanza y aprendizaje. Se divide en tres subdominios: el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT), el conocimiento de las características del aprendizaje matemático (KFLM) y el conocimiento de los estándares de aprendizaje matemático (KMLS). El KMT toma en cuenta el conocimiento de teorías sobre la enseñanza del contenido, conocimiento de recursos materiales y virtuales, y conocimiento de diversas estrategias, técnicas, tareas y ejemplos. Inspirados en este subdominio hemos planteado el siguiente taller. El KFLM considera el conocimiento que debe tener todo profesor acerca de cómo se aprende el contenido y comprende 4 categorías: teorías de aprendizaje personales e institucionalizadas, fortalezas y dificultades, formas de interacción con un contenido matemático y aspectos emocionales. El KMLS considera el conocimiento que el profesor posee sobre las orientaciones dadas por autoridades de diversos niveles acerca de qué debe aprender un alumno en cierto momento. Este subdominio incluye tres categorías: expectativas de aprendizaje, nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado y secuenciación con temas anteriores y posteriores.

Actividades con el triángulo de Sierpinsky

El matemático polaco Waclaw Sierpinski (1882-1969) es célebre por sus importantes aportaciones a la teoría de conjuntos, la topología y la teoría de números. Entre las actividades que se realizarán con la construcción del triángulo de Sierpinsky será completar las tablas que se muestran en la figura1 y deducir los patrones matemáticos que se presenten.



Número de triángulos para n divisiones en su punto medio de cada lado

ETAPAS (Dividir en puntos medios cada lado)	0	1	2	3	....	n
Número de triángulos	1	3	9	27		

Supongamos que el lado inicial del triángulo mide 16 cm

ETAPAS (Dividir en puntos medios cada lado)	0	1	2	.....	n
Longitud del lado del triángulo	16	8	4		

Figura 1. Tablas para encontrar el patrón matemático

En la figura 2, se muestra la construcción del triángulo de Sierpinsky usando la técnica del kirigami. Esta actividad será interactiva y permitirá deducir patrones adicionales de regularidad.

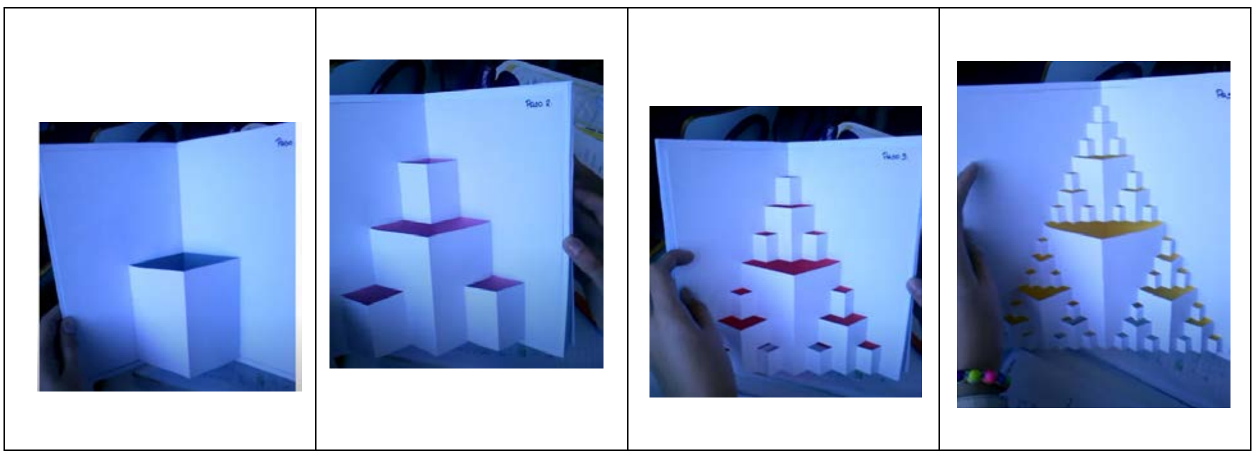


Figura 2. Fases de la construcción del triángulo de Sierpinski usando la técnica del Kirigami.

Actividades con GeoGebra

El taller está dirigido a docentes de matemática de educación básica regular con el fin de enriquecer las estrategias metodológicas de la enseñanza de las matemáticas mediante el uso de la integración de la tecnología de información y comunicación (TIC) en el aprendizaje de los patrones matemáticos

Para modelar la curva de koch, las actividades incluirán una secuencia de pasos gráficos (ver figura 3), las cuales se detallan a continuación:

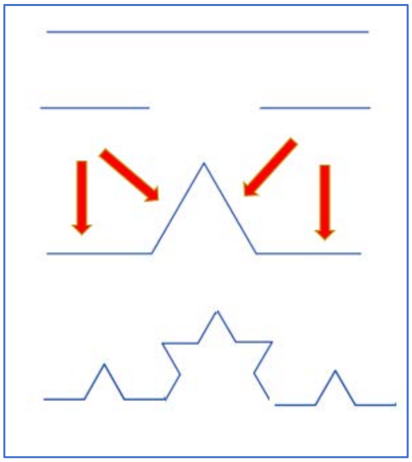


Figura 3. Secuencia gráfica: Curva koch

1. Trace un segmento.

2. Divida el segmento en tres tramos iguales y oculte el segmento central.

3. Trace un triángulo equilátero cuya base sea el segmento que ocultó.

4. Los tres pasos anteriores se repiten de manera recursiva en los segmentos visibles.

En el paso 1, se usará la herramienta $Segmento$ del GeoGebra para trazar el segmento AB no necesariamente paralelo al eje de abscisas. En el paso 2, se dividirá dicho segmento en tres tramos iguales haciendo uso del $Teorema\ de\ Thales$ (ver figura 4), o mediante el comando $Traslada$ del GeoGebra (ver figura 5), para este fin el vector AB será el medio por el cual se determina la posición de los puntos restantes, haciendo uso de escalares que permiten modificar el tamaño del vector y por consiguiente localizar los puntos C y D desde un punto dado.

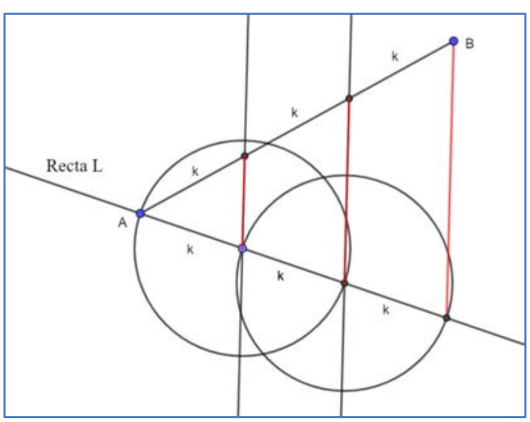


Figura 4. Thales para dividir segmento AB

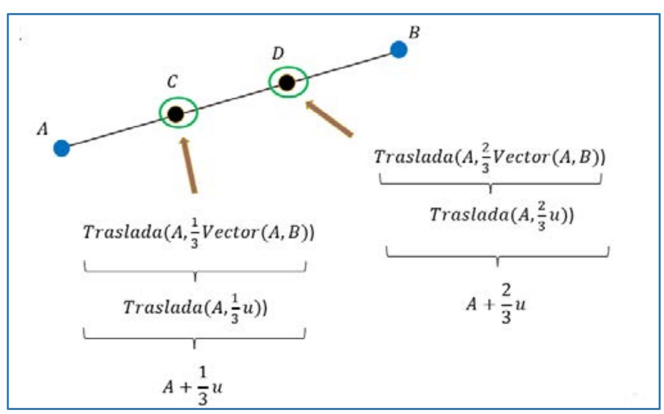


Figura 5. Comando Traslada para dividir segmento AB

En el paso 3, se traza el triángulo equilátero CED a partir de dos de sus vértices (C y D). Para determinar el tercer vértice (E), se hace uso del comando $Rota$ con el cual se podrá modificar la dirección y sentido del vector AB, tal como se observa en la figura 6. Es importante distinguir si el ángulo de rotación que se digitará es antihorario u horario, ya que el GeoGebra considera que cuando el ángulo tiene signo positivo la rotación del objeto es antihoraria y cuando es de signo negativo la rotación es horaria. También será posible hallar el vértice (E), haciendo uso de la propiedad de la mediatriz del segmento CD, pues dicho vértice equidista de los extremos (C y D), tal como se observa en la figura 7.

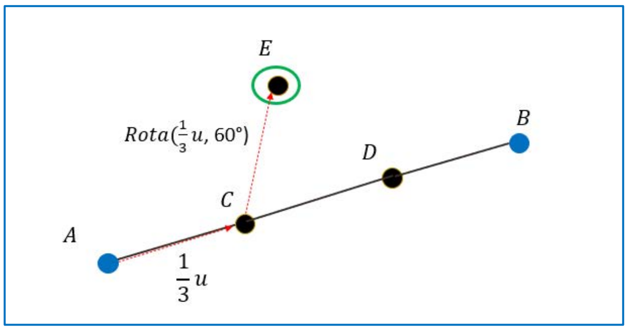


Figura 6. Comando Rota para determinar el vértice *E*

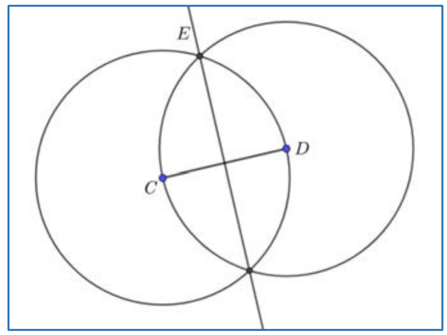


Figura 7. Mediatriz para determinar el vértice *E*

Luego, se traza la línea poligonal por los puntos A, C, E, D y B para formar la curva de Koch. La automatización de los pasos descritos se consolidará en una sola herramienta, con la $Creación\ de\ una\ nueva\ herramienta$ del GeoGebra. Se tomarán como elementos de entrada los puntos A y B, y como elementos de salida los puntos C, E y D, la línea poligonal y el segmento CD que es un segmento de color blanco con una capa de nivel superior al resto de elementos para ocultar el segmento de inicio (ver figura 8).

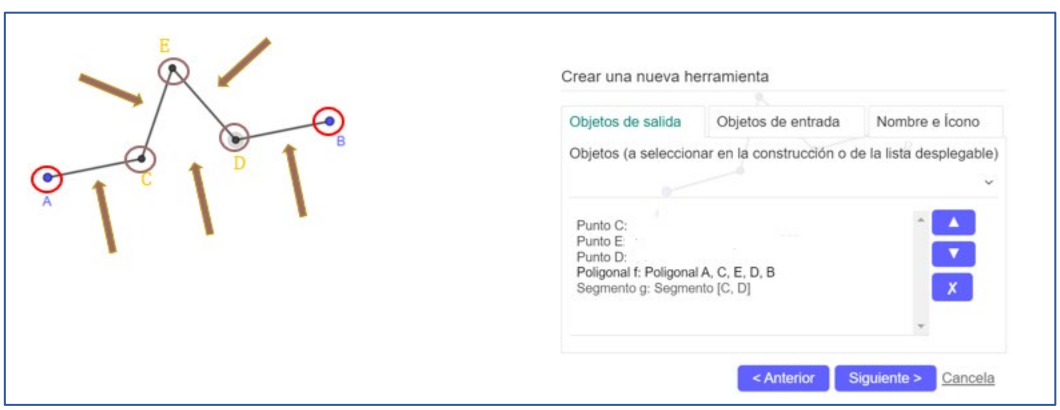


Figura 8. Creación de la herramienta Curva de Koch

Finalmente, una vez creada la herramienta Curva de Koch, se le seleccionará con el puntero o se le digitará en la barra de entrada para formar estructuras irregulares y fragmentadas.

Al concluir el taller, creemos que los profesores presentarán evidencias del conocimiento los dos dominios del MTSK. En ese análisis, el conocimiento del profesor en el dominio (KoT) se hará visible cuando movilice algunos temas o contenidos matemáticos, como el teorema de thales, vectores, mediatriz de un segmento, propiedades de un triángulo, proporcionalidad. El segundo dominio (PCK), referido al conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT), se visualizará cuando cada docente haga uso de los recursos materiales, virtuales y del conocimiento de las estrategias subordinadas a sus prácticas. De igual manera, creemos que habrá una presencia del subdominio KFLM por las fortalezas y dificultades en la interacción con el programa GeoGebra. Este análisis se complementará luego de finalizado el taller.

Referencias y bibliografía

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The Mathematics Teacher’s Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in* Mathematics *Education*, *20*(3), 236-253.

Fuse, T. (2022). The Complete Book of Origami Polyhedra: 64 Ingenious Geometric Paper Models. Tuttle Publishing.