



Análise Combinatória na perspectiva do ensino exploratório

Raquel Carneiro **Dörr**

Departamento de Matemática, Universidade de Brasília
Brasil

raqueldorr@unb.br

Elisângela Fernandes **Cerqueira**

Departamento de Matemática, Universidade de Brasília
Brasil

eliselis1903@gmail.com

Marcio Lucas de **Freitas**

Departamento de Matemática, Universidade de Brasília
Brasil

marciodlf@gmail.com

Resumo

Esta comunicação científica apresenta uma pesquisa qualitativa feita no âmbito do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional e descreve a realização de uma atividade de contagem, na perspectiva do ensino exploratório para uma turma da 3ª série do Ensino Médio da rede pública de ensino, na modalidade Educação de Jovens e Adultos, com o objetivo de desenvolver uma experiência de ensino na perspectiva do ensino exploratório. Para tanto, foi criada uma tarefa matemática sobre o tema e colocada em prática pela professora regente, que expôs aos alunos a proposta e como ela se desenvolveria. Um dos diferenciais evidenciados pelo método exploratório foi a presença de um segundo professor, chamado de “professor-observador”. Entre os resultados obtidos, destaca-se que os estudantes se engajaram na resolução das atividades propostas e conseguiram realizar uma discussão matemática sobre o tema da Análise Combinatória.

Palavras-chave: Educação Matemática; Ensino exploratório; Resolução de problemas; Análise Combinatória; EJA.

Introdução

O estudo da Análise Combinatória apresenta desafios na maioria das salas de aula brasileiras (Lós et al., 2019), seja na apresentação desse conteúdo, quanto na aprendizagem dos estudantes. Contudo, buscando contornar essa situação e cooperar para o ensino e a aprendizagem desse assunto, ele foi apresentado na perspectiva do ensino exploratório, por meio de uma tarefa matemática com vistas a promover o engajamento e a imersão dos alunos no tema, em conexão com o seu cotidiano.

Para tanto, alicerçados nos estudos de Canavarro (2011) acerca do ensino exploratório, foi criada uma tarefa matemática sequenciada em etapas, na qual os estudantes foram organizados em pequenos grupos para juntos, procurarem as informações necessárias para a resolução da atividade proposta a partir do enunciado. Ainda foram orientados a buscarem junto ao grupo a construção e o desenvolvimento dos raciocínios necessários para a resolução da tarefa. A atividade foi orientada e monitorada pela professora regente da turma e teve um outro professor como observador. Esse último teve o papel de auxiliar a regente nas anotações das falas e registros dos estudantes nos grupos, sem intervir na mediação da tarefa.

Desta forma, esta comunicação científica apresenta a tarefa, discorre a respeito do referencial teórico que fundamenta a escolha do tipo de tarefa e os conceitos agregados a tal escolha; a metodologia implementada na realização da tarefa; o seu planejamento; a descrição de como se desenvolveu essa tarefa; a análise dos resultados e as considerações finais a respeito do que foi observado.

Referencial teórico

A Base Nacional Curricular Comum, documento que norteia a educação brasileira, preconiza, em suas competências gerais, que os estudantes tenham uma formação integral comprometida com a “construção intencional de processos educativos que promovam aprendizagens sintonizadas com as necessidades, as possibilidades e os interesses dos estudantes e, também, com os desafios da sociedade contemporânea” (Brasil, 2018, p. 14). Logo, para que esses processos sejam efetivos, faz-se necessário, segundo Oliveira, Araman e Trevisan (2022), saber quais ações e práticas pedagógicas contribuem para o desenvolvimento do raciocínio do estudante. Nesse cenário, é possível que sejam desenvolvidas tarefas matemáticas em sala de aula que viabilizem o desenvolvimento do raciocínio matemático.

Em que consiste uma atividade matemática? E qual sua diferença ante uma tarefa? Christiansen e Walther (1986) consideram que ambas se constituem em categorias didáticas básicas, mas distintas. Para esses autores, uma atividade pode incluir, mas não se limitar, à execução de numerosas tarefas e pode ser física ou mental. Por outro lado, eles afirmam que a tarefa apenas corresponde ao objetivo de cada uma das ações em que a atividade se desdobra.

Neste contexto, há que se distinguir as tipologias de tarefas que podem ser aplicadas. Ponte (2005) considera que existem duas dimensões fundamentais por elas apresentadas: o seu grau de desafio matemático – que depende da percepção de dificuldade da questão, sendo “reduzido” ou “elevado” – e o seu grau de estrutura – que pode variar entre os polos “aberto” e “fechado”. Diante deste cenário, uma tarefa exploratória pode ser considerada uma tarefa aberta e acessível à

maioria dos alunos. Ainda segundo Ponte (2014), ela deve possibilitar a todos eles um elevado grau de sucesso e o desenvolvimento de autoconfiança.

Para que este cenário se concretize, Stein et al. (2008) afirmam que devem ser seguidas de perto cinco práticas que proporcionam ao professor melhores condições para concluir boas discussões matemáticas no âmbito de uma tarefa exploratória. São elas: Antecipar: prever a interpretação e o envolvimento dos alunos na tarefa, bem como elencar estratégias – sejam corretas ou incorretas – que os alunos podem seguir, de modo a antever como reagir diante de questionamentos; Monitorizar: observar e ouvir os alunos, avaliando a validade das ideias e resoluções aplicadas. Nesta etapa, o professor consegue perceber as barreiras encontradas pelos alunos e decidir em quais aspectos focar na discussão subsequente; Selecionar: diante da monitorização dos grupos, o professor pode identificar quais resoluções e ideias são importantes partilhar com todo o grupo, a fim de direcionar a discussão para o objetivo final da atividade; Sequenciar: simultaneamente à anterior, nesta etapa o professor deve decidir qual percurso de exploração das ideias dos alunos deve ser seguido, a fim de iniciar de forma mais acessível e direcionar progressivamente para resoluções que permitam generalizar os conceitos; Estabelecer conexões: nessa etapa, o professor deve incentivar os alunos a analisar as resoluções apresentadas, identificar o que deve ser priorizado e balizar quais conexões devem ser estabelecidas para consolidação do aprendizado.

Por isso, Stein et al. (2008) afirmam que o ensino exploratório da Matemática é uma atividade complexa e pode ser considerada difícil de ser colocada em prática por muitos professores. São variadas as etapas de preparação prévia e acompanhamento das atividades para se obter sucesso na aplicação de uma tarefa exploratória. No entanto, nessa abordagem, “em que a comunicação se sustenta em processos de discussão e negociação” (Guerreiro et al., 2015, p. 280), as oportunidades de discussão e consolidação do aprendizado coletivo são destacadamente superiores ao modelo de tarefas fechadas tradicionais, cujas etapas são apenas a resolução por parte do aluno e a correção por parte do professor.

A Análise Combinatória promove um pensar hipotético-dedutivo que permite ao estudante levantar hipóteses e possibilidades para que se efetue uma determinada contagem em problemas de natureza matemática, ou de outras áreas do conhecimento, de maneira contextualizada. De acordo com Morgado e Carvalho (2015), não se deve fazer uso demasiado de fórmulas no ensino da Análise Combinatória, mas sim desenvolver o conteúdo com o princípio básico de contagem.

Metodologia

A investigação acerca da criação e desenvolvimento da tarefa matemática aqui apresentada está baseada na pesquisa qualitativa de estudo de caso, com caráter interpretativo. A tarefa matemática e sua aplicação foram trabalhados ao longo de um semestre na disciplina de Tópicos de Matemática, do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat) da Universidade de Brasília (UnB), no segundo semestre de 2022.

Ela foi desenvolvida em uma escola pública da Secretaria de Estado da Educação do Distrito Federal (SEEDF) que oferece turmas de anos finais – 6º, 7º, 8º e 9º, Ensino Médio e

Educação de Jovens Adultos (EJA). A escola é composta de 20 salas de aulas, todas equipadas com um televisor de 32 polegadas, o qual foi utilizado para sistematizar a tarefa. Os registros de prática foram coletados por meio da entrega do material escrito pelos alunos, da resolução da atividade; áudio gravado pelo celular do professor-observador sobre os acontecimentos que se desencadearam no desenvolvimento da tarefa matemática; anotações pontuais em relação às dúvidas dos estudantes feitas ao final da aula e imagem da sistematização da tarefa matemática no aparelho televisor da sala de aula. Os registros serão ilustrados por meio de uma das imagens contidas nos materiais entregues pelos alunos.

Planejamento da tarefa matemática

Inicialmente, a proposta consistia em uma tarefa matemática fechada, inspirada em uma questão típica de um material didático, porém, verificou-se a necessidade de reestruturar a proposta inicial de modo a possibilitar que os estudantes pudessem expressar a construção e a sistematização do raciocínio matemático. Assim, optou-se por transformá-la em uma tarefa aberta, buscando aproximá-la de uma atividades exploratória. As etapas da tarefa e o tempo necessário para a implementação foram assim definidos:

1. Formação dos grupos; (5 minutos)
2. Leitura e interpretação do texto introdutório; (5 minutos)
3. Apresentação da situação-problema; (5 minutos)
4. Simulação da situação-problema; (10 minutos)
5. Questionamentos a partir do situação-problema; (10 minutos)
6. Resolução da situação-problema; (25 minutos)
7. Análise das estratégias apresentadas; (10 minutos)
8. Conclusão (10 minutos).

Desenvolvimento da tarefa matemática em sala de aula

A tarefa foi aplicada no dia 22 de agosto de 2022, em uma escola pública da região metropolitana de Brasília, no turno noturno. Participaram do desenvolvimento da atividade, 22 estudantes de uma turma da 3ª etapa do 3º segmento da EJA, dos quais 16 são do gênero feminino e 6 do masculino, com idades entre 19 e 66 anos; 91% da turma possuíam trabalho permanente ou temporário no diurno e frequentavam a escola no período noturno. Aproximadamente 14% dos estudantes não frequentavam a escola há mais de 5 anos e retornaram naquele semestre. A turma contava com um estudante com deficiência motora leve que não necessitava de um monitor de gestão educacional para acompanhá-lo.

Inicialmente, foi entregue o roteiro da atividade matemática para cada um dos estudantes presentes. A seguir, foi disponibilizado um tempo suficiente para que fosse realizada a leitura individual do texto introdutório retirado de um artigo de jornal sobre um acidente de trânsito ocorrido na cidade semana antes. Logo após, houve uma discussão sobre o texto com perguntas sobre a legislação de trânsito vigente e sobre as impressões dos estudantes sobre a necessidade das leis para a segurança do trânsito. Esse momento foi importante, pois trouxe à luz o tema da tarefa matemática a ser realizada.

Em seguida, foi solicitada a formação de quatro grupos com os estudantes presentes, seguida da leitura individual da tarefa matemática descrita abaixo. Originalmente, a questão fazia parte de uma prova de um curso preparatório para o ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio), porém, pelo fato do grau de dificuldade ter sido considerado muito alto para a turma em que seria aplicada, a questão foi adaptada pelos autores, tendo a versão final ficado como a seguir:

Uma família irá viajar daqui a quatro semanas em um carro de sete lugares, sendo dois bancos dianteiros - um deles, o do motorista - e cinco bancos traseiros. Na família há um pai e uma mãe, ambos habilitados a dirigir, além de quatro filhos que, atualmente, têm as seguintes idades: 7, 13, 17 e 21 anos. Nesta família, assim que completam 18 anos, os filhos iniciam o curso de direção na autoescola, e após 3 meses estão aptos a dirigir. Sabe-se ainda que os dois filhos mais velhos farão aniversário na semana anterior à viagem e que o banco dianteiro destinado ao passageiro deve, necessariamente, estar ocupado. Sendo assim, de quantas maneiras diferentes essa família pode se acomodar no veículo para a realização dessa viagem?.

Após a leitura, foi realizada a simulação da situação-problema com as cadeiras da sala de aula como os bancos do carro e os próprios estudantes como os ocupantes do veículo. O objetivo da simulação foi tornar mais clara a compreensão dos estudantes acerca da atividade e das possibilidades existentes na hora de ocupar cada banco do veículo.

Após a simulação, os estudantes começaram a discutir a tarefa e a solicitar a presença da professora, que passava nos grupos, para fazerem alguns questionamentos. Nessa fase de aplicação, que durou cerca de 40 minutos, os estudantes demonstraram grande interesse e envolvimento, debateram, sugeriram, trocaram ideias acerca da resolução do problema. Notou-se que houve, a princípio, grande dificuldade de compreensão por parte dos estudantes, todavia, após a simulação e as intervenções da professora, que, sem dar as respostas, ajudava com questionamentos pontuais, os estudantes compreenderam a situação e se empenharam em apresentar um resultado.

Os estudantes registraram e entregaram os resultados obtidos após a fase de discussões. Para ilustrar, apresentamos a seguir, na Figura 1, um dos registros dos grupos.

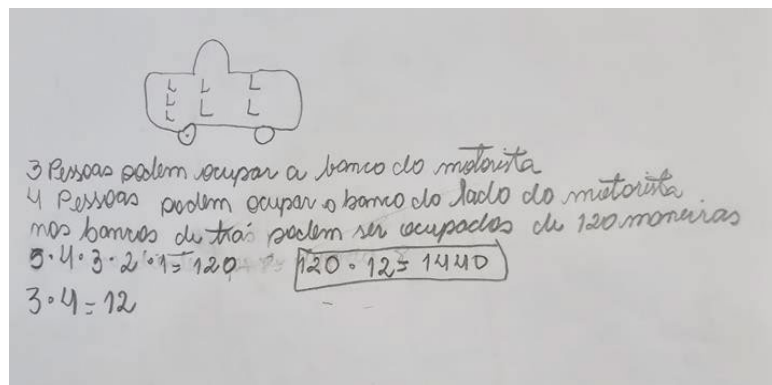


Figura 1. Exemplo de resposta

Análise dos resultados

Dois grupos optaram pela construção de uma figura para ajudar na resolução da questão; um deles foi o da Figura 1. Acreditamos que essa foi uma consequência oportunizada pela

abordagem exploratória que se mostrou de grande utilidade pois, a partir daí, juntamente com a discussão matemática que ocorreu intensamente nos grupos, os estudantes elaboraram conjecturas matemáticas válidas quanto ao número de opções para ocupar o banco do motorista. Da mesma forma, para o banco dos passageiros, o que evidenciou a familiaridade e a compreensão dos integrantes dos grupos com a aplicação do Princípio Fundamental da Contagem.

Um dos grupos utilizou traços, como um recurso, para representar os bancos do carro, nomeados com as letras (A, B, C, D e E) e F_1 , F_2 , F_3 e F_4 para designar os filhos. Abaixo dessa representação, escreveu a quantidade de maneiras como cada filho poderia escolher os bancos traseiros. Apesar da sintaxe matemática não estar totalmente correta, o raciocínio matemático estava em consonância com a quantidade de maneiras de se tomar uma decisão aplicada ao Princípio Fundamental da Contagem. Portanto, acreditamos que a escolha dessa estratégia esteve ligada diretamente à abordagem na perspectiva do ensino exploratório.

Um dos grupos apresentou bastante dificuldade inicialmente, de forma que praticamente todo o tempo foi gasto tentando criar uma estratégia, mesmo assim, seus integrantes conseguiram desenvolver uma alternativa que calculou corretamente a forma de ocupar os assentos do veículo.

Considerações finais

A partir do relato da professora, que identificava no grupo de estudantes dificuldades de compreensão e envolvimento da turma em alguns conteúdos matemáticos, foi realizada uma experiência de como o ensino exploratório pode ser um meio de criar ambientes de aprendizagem apoiados em tarefas matemáticas, desenvolvidas por meio de ações investigativas que buscam proporcionar aos estudantes uma aprendizagem significativa, e não apenas treino de procedimentos e aplicação de fórmulas, processo consolidado pelo método tradicional de ensino.

A abordagem didática consolidada por meio da aula exploratória revelou que, apesar dos estudantes apresentarem estágios diferentes de aprendizagem, eles conseguiram elaborar conjecturas matemáticas, através da discussão coletiva, as quais se aproximavam do padrão de resposta sistematizado no final da aula. O aprendizado ficou ainda evidenciado por meio das frases faladas por eles ao final da simulação com a turma, tais como: “*Ah, então era isso? É tão fácil, ‘a gente’ é que complica*”. A experiência evidenciou ainda que a aula desenvolvida na perspectiva do ensino exploratório se mostrou como uma alternativa interessante para o ensino tradicional ao viabilizar o envolvimento e o interesse por parte dos estudantes. Além disso, a experiência apresentou uma possibilidade de construção do conhecimento matemático em paralelo com a solução de problemas cotidianos; uma iniciação à compreensão de conhecimentos de análise combinatória; e ainda amenizou a resistência demonstrada nas aulas de Matemática. Acrescenta-se a isso, a experiência de se ter o apoio do professor-observador, uma vez que essa perspectiva incomum da sala de aula, tornou possível constatar as diversas reações dos estudantes, o que normalmente é difícil, ou mesmo impossível, quando se é o único regente da classe: reações vocais, comportamentais e inclusive faciais.

Para a continuação da pesquisa, serão feitas atividades diagnósticas antes e depois da aplicação da tarefa, buscando mensurar, de forma mais sólida, a aprendizagem dos estudantes; e,

além disso, desenvolver a tarefa em escolas diferentes, para que seja possível verificar elementos do pensamento matemático e das atitudes frente à resolução de problemas em ambientes escolares diferentes.

Referências e bibliografia

- Brasil. (2018). Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*.
http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_-versaofinal_site.pdf
- Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da matemática: Prática e desafios. *Educação e Matemática*, (115), 11–27. <https://em.apm.pt/index.php/em/issue/view/117/119>
- Christiansen, B., & Walther, G. (1986). Task and activity. In: Christiansen, B., Howson, A.G., & Otte, M. (Eds.), *Perspectives on Mathematics Education* (Mathematics Education Library, vol 2.). Springer, Dordrecht.
https://doi.org/10.1007/978-94-009-4504-3_7
- Guerreiro, A., Tomás Ferreira, R., Menezes, L., & Martinho, M. H. (2015). Comunicação na sala de aula: A perspectiva do ensino exploratório da matemática. *Zetetiké*, 23(4), 279–295.
- Lós, D. E. D. S. (2019). *CombEsq: Uma proposta de objeto de aprendizagem para o ensino e aprendizagem de análise combinatória* [Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Alagoas]. Repositório da UFAL.
<https://bitly.com/Ux4HP>
- Morgado, A. C., y Carvalho, P. C. (2015). *Matemática discreta* (2. ed., Coleção PROFMAT). Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática.
- Oliveira, L. S. de, Araman, E. M. de O., & Trevisan, A. L. (2022). Processos de raciocínio matemático em uma tarefa exploratória. *Paradigma*, 43(1), 1–21.
- Ponte, J. P. D. (2005). Gestão curricular em Matemática. In Grupo de Trabalho de Investigação da Associação de Professores de Matemática (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). GTI/APM.
- Ponte, J. P. (2014). Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. In Ponte, J. P. (Ed.), *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (pp. 13–27). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.
- Stein, M. K., et al. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical thinking and learning*, 10(4), 313–340.