Aplicación práctica de la función coseno

Carlos Díaz Serruche
Universidad de Ciencias y Humanidades.
Perú
cardiaz_27@yahoo.es
Gilder Samuel Vargas Vargas
Universidad de Ciencias y Humanidades.
Perú
gvargas@uch.edu.pe

Resumen

El objetivo de este estudio fue analizar la relación entre los dominios conceptuales y las aplicaciones de la función coseno, mediante la mediación del GeoGebra, en estudiantes de un primer curso de Matemáticas en la Facultad de Ingeniería de una universidad privada de Lima. En esta investigación se ha considerado como soporte metodológico algunos elementos de la Teoría de Situaciones Didácticas de Guy Brousseau. Con la ayuda del software GeoGebra se logró que la mayoría de estudiantes ubicaran correctamente los puntos en el plano cartesiano y visualicen la construcción del gráfico inicial. A partir de dicha gráfica se calcularon la amplitud, el periodo, el desplazamiento vertical, el desface y la regla de correspondencia asociada a la función coseno.

Palabras clave: Aprendizaje de la matemática; Aprendizaje por descubrimiento; Situaciones Didácticas; Función coseno.

Introducción

En relación a la enseñanza y aprendizaje de las funciones trigonométricas en el nivel superior encontramos trabajos como los de Santos (2021) quien propone enfoques metodológicos para el estudio de las funciones trigonométricas e hiperbólicas. En dicho trabajo se presenta un estudio teórico de estos dos tipos de funciones a partir de herramientas metodológicas alternativas para su aprendizaje, con la finalidad de buscar un aprendizaje más efectivo, a través de recursos tecnológicos como softwares, aplicaciones para celulares, tabletas gráficas y lenguajes de programación. Dentro de los softwares recomendados por el investigador se tiene al GeoGebra, el cual es tomado en cuenta para el desarrollo del presente trabajo.

La modelización, visualización y programación, son tres características esenciales de GeoGebra que la convierten en una herramienta efectiva para la enseñanza de las funciones trigonométricas. Asimismo, la integración de GeoGebra con esquemas de aprendizaje puede ayudar a mejorar las habilidades y conocimientos en los estudiantes universitarios, tal como lo mencionan Ziatdinov y Valles (2022).

Considerando que el estudio de las funciones trigonométricas requiere un alto grado de abstracción, se propone una situación didáctica desde la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) donde el estudiante con la ayuda del GeoGebra pueda visualizar y movilizar diferentes significados y a su vez, logre aplicarlos a una situación real.

El aprendizaje de la matemática

En el enfoque estructuralista se considera que el aprendizaje es un proceso de restructuración cognitiva que se da en el sujeto cuando este se enfrenta a situaciones o problemas nuevos, que son significativos, y que le exigen utilizar los conocimientos y razonamientos adquiridos previamente. Si el problema nuevo no puede ser resuelto con los recursos que maneja hasta entonces, el sujeto se ve en la necesidad de reestructurar su esquema cognitivo, incorporando nuevos conocimientos y razonamientos a los que ya tiene, tal como lo menciona Piaget (1983). Al enfrentase a nuevos problemas del entorno social, el sujeto los relaciona con las experiencias previas. La primera tendencia es interpretar estos problemas y buscar soluciones por medio de las estructuras y conocimientos previos.

La asimilación, según Piaget, es el proceso de comprensión e interpretación de la realidad, motivo por el cual cuando estas estructuras cognitivas previas que posee el sujeto, no son suficientes para explicar la nueva situación o resolver el nuevo problema, el sujeto en cuestión, se ve obligado a reestructurar o reajustar las estructuras cognitivas que posee; es decir, incorpora nuevas ideas y conceptos, cambia, complementa o corrige los conocimientos que ya tenía. Este proceso de cambio de estructuras es conocido por Piaget como acomodación, y a los procesos de asimilación-acomodación lo denomina proceso de equilibrio.

Si el aprendizaje de la matemática es un proceso continuo de asimilación-acomodación y equilibrio cognitivo, entonces es necesario organizar e implementar escenarios donde los estudiantes pongan a prueba sus habilidades, capacidades cognitivas y logren así incorporar nuevos conocimientos y razonamientos que le permitan comprender los diferentes campos temáticos de la matemática.

El aprendizaje de la matemática por descubrimiento

En el aprendizaje por descubrimiento los estudiantes tienen un rol activo y participativo. En ese sentido, el aprendizaje de la matemática por descubrimiento tiene por intención la comprensión antes que la memorización. Para esto, el desarrollo de actividades es fundamental y se convierte en un factor indispensable del proceso de enseñanza-aprendizaje, donde el docente asume como función el acompañamiento en su rol de guía y motivador de los aprendizajes.

El acompañamiento debe promover la atención y concentración, de modo que el estudiante logre conectar sus saberes previos con las nuevas relaciones que va descubriendo, solo así se podrá estructurar un sistema lógico y coherente, tal como lo menciona Bruner (1986) "la enseñanza del descubrimiento, en general, no implica tanto el proceso de guiar a los estudiantes para que descubran lo que está allí fuera, sino, en realidad, el descubrimiento de lo que hay dentro de sus propias mentes" (p. 85). Por ello, en el proceso de acompañamiento que realiza el docente, es recomendable que se presente a los estudiantes ejemplos y contraejemplos a partir de las relaciones que estudian y de aquellas que van descubriendo en las actividades.

Las situaciones didácticas

Las situaciones didácticas son una construcción artificial modelada por el docente, para visibilizar y comprender las interacciones entre los estudiantes y los saberes matemáticos que se proponen en una clase (Brousseau, 2007). Esta construcción es intencional, donde la convergencia de estudiantes y docentes en un determinado espacio físico, encierra una finalidad que se expresa en los saberes que se pretende que se apropien y se asimilen. De lo anterior, se desprende que todo docente que busca promover aprendizajes significativos y duraderos debe plantearse ciertas interrogantes como, ¿Qué actividad deben realizar los estudiantes, para que surja la necesidad de apropiarse de las funciones trigonométricas?, ¿Qué actividad deben realizar los estudiantes, para adquirir las nociones de la función coseno?, responder estas preguntas representa todo un desafío para los docentes. Veamos algunos elementos de la TSD propuestas por Brousseau (2007):

- *La situación acción*. Los estudiantes son expuestos a problemas, actividades lúdicas que representen un desafío cognitivo, procedimental y/o manual, en esta etapa el estudiante se familiariza con las reglas de la actividad, y gracias a la recurrencia y la toma de decisiones le permitirán formular una estrategia para enfrentar el desafío propuesto.
- *La situación de formulación.* Los estudiantes comparten sus valoraciones y sus primeras intuiciones, sobre cómo enfrentar de forma exitosa la actividad propuesta. Esto es posible gracias a la interacción entre el sujeto y los dispositivos didácticos.
- *La situación de validación.* Los estudiantes proponen enunciados que sirven de forma directa en la solución del problema o actividad propuesta, estos enunciados tienen que ser demostrados para ser aceptados como tal. También se puede encontrar que un enunciado propuesto por algún otro estudiante es falso, en consecuencia, el enunciado es descartado.
- *La situación de institucionalización.* Los conocimientos ya validados, requieren ser organizados y jerarquizados, en ese proceso se generan los saberes, previamente se despojan de su particularidad, adquieren rigurosidad y generalidad, de este modo su comunicación y su utilización como herramienta matemática llega a ser confiable y segura, en otras palabras los conocimientos se constituyen en saberes que tienen una connotación científica y por lo que pueden ser aplicados en diferentes contextos, en este proceso la participación del docente es fundamental.

Implementación

La actividad se desarrolló a través de la plataforma Zoom, con estudiantes del primer ciclo de la Facultad de Ingeniería de los primeros ciclos del semestre académicos 2022-II en el curso de Matemática Básica.

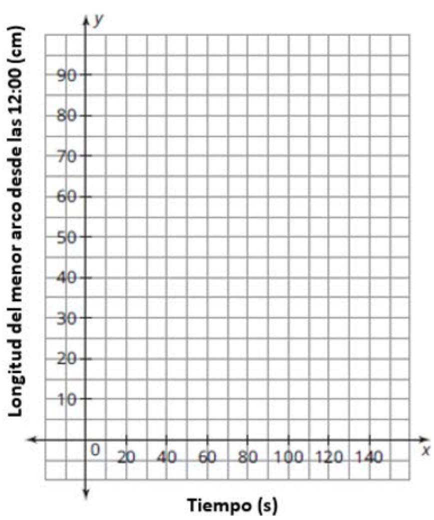
A continuación, mostramos la situación didáctica que desarrollaron los estudiantes.

Situación didáctica

Si la longitud del segundero y el radio de la circunferencia del reloj son iguales y miden 30 cm cada uno. Supongamos que el segundero comienza su movimiento exactamente a las 12:00 de la noche.

1. Completa la tabla para describir el tiempo en segundos y la longitud del menor arco entre el extremo del segundero y su posición inicial a las 12:00, en centímetros. Para cada vuelta completa, considere que la longitud inicial es 0. Luego, elabora un gráfico que relacione el tiempo (s) y la longitud del menor arco (cm).

Tiempo (s)	Longitud del menor arco desde las 12:00 (cm)
0	0
10	
20	
30	
40	
50	
60	0
70	
80	
90	
100	
110	
120	0



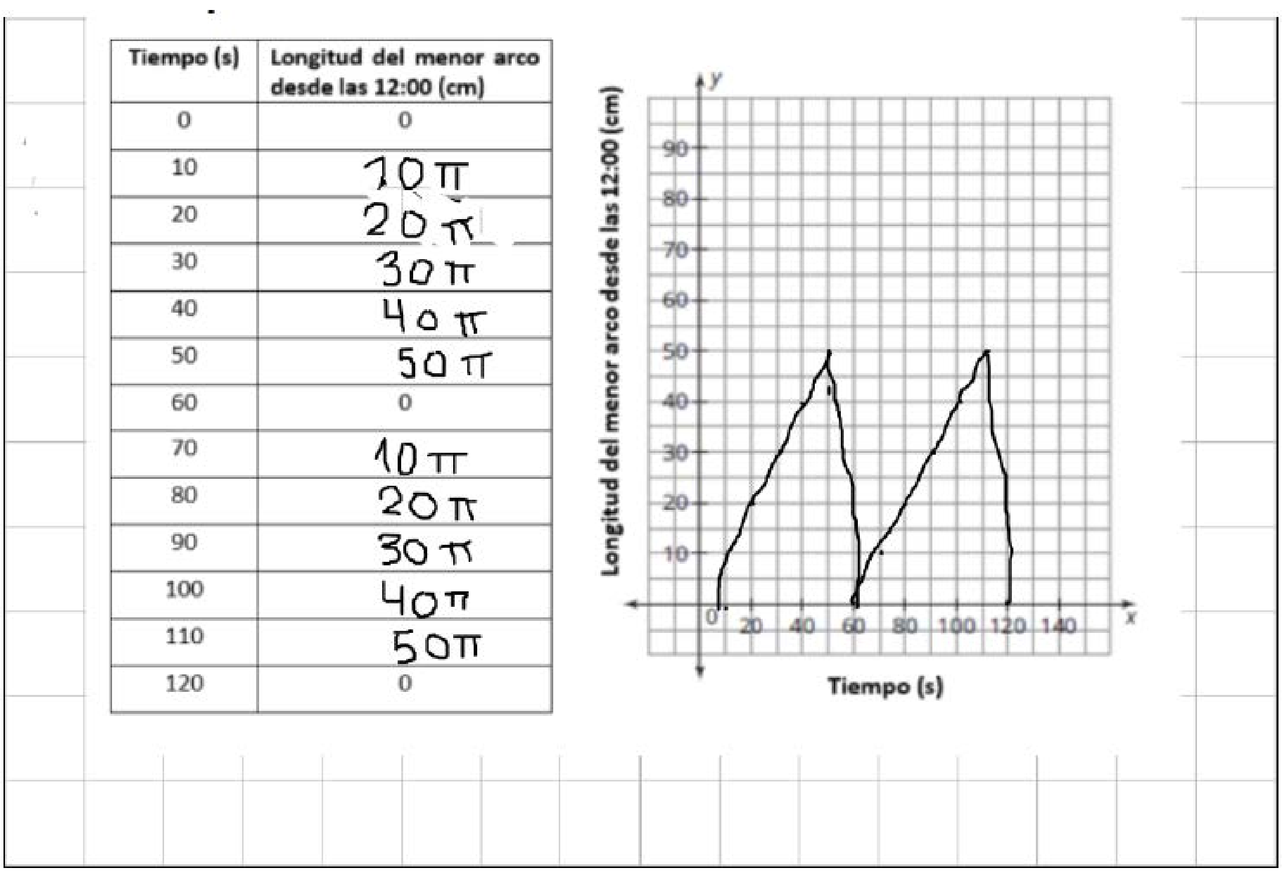
2. Con la ayuda del software GeoGebra comprueba la solución obtenida en la pregunta 1. La gráfica obtenida al unir los puntos ¿A qué función trigonométrica se asemeja? ¿Cuál sería su regla de correspondencia?
3. A partir de la gráfica obtenida:
    1. ¿Cuál es el valor máximo y mínimo que puede tomar Y?
    2. Si la Amplitud se puede obtener como $|A| = \frac{Y_{máx} - Y_{min}}{2}$. Calcule dicha amplitud.
    3. Calcule el periodo de la función.
    4. Si el desplazamiento vertical se define como $D = \frac{Y_{máx} + Y_{min}}{2}$. Halle el valor para D.
    5. Halle la regla de correspondencia y grafique la función con el GeoGebra.

Figura 1. Pregunta sobre la función coseno.

A partir de esta la situación se plantearon las siguientes cuestiones: ¿En qué sentido giran las agujas de un reloj?, ¿Cuál es el ángulo recorrido por el horario en una hora?, ¿Cuál es el ángulo recorrido por el minutero en una hora? ¿Cuál es el ángulo que recorre el segundero en un minuto?, ¿Existe alguna relación entre los ángulos recorridos, la aguja del segundero y la longitud recorrida por su extremo? y ¿Cómo se pude calcular dicha longitud?

Para el desarrollo de la pregunta 1 se formaron 9 grupos de forma aleatoria mediante la herramienta del Zoom y se les asignó 20 minutos para que puedan completar la tabla y ubicar los puntos en el plano cartesiano.

Los grupos enviaron sus resoluciones a través de la plataforma Whiteboard. En la figura 2 se observa la resolución enviada por el grupo 5.



Tiempo (s)	Longitud del menor arco desde las 12:00 (cm)
0	0
10	10π
20	20π
30	30π
40	40π
50	50π
60	0
70	10π
80	20π
90	30π
100	40π
110	50π
120	0

Figura 2. Respuesta del grupo 5.

El grupo 5 no calculó de forma correcta las longitudes de los arcos esto debido a que no tuvieron en cuenta el menor arco entre el minutero y su posición inicial. Asimismo, al momento de ubicar los puntos no consideraron las escalas.

El grupo 2, como se observa en la figura 3, logró encontrar los valores correspondientes y utilizó una aproximación. Sin embargo, no llegó a ubicar los puntos.

Tiempo (s)	Longitud del menor arco desde las 12:00 (cm)
0	0
10	31.4
20	62.8
30	94.2
40	62.8
50	31.4
60	0
70	31.4
80	62.8
90	94.2
100	62.8
110	31.4
120	0

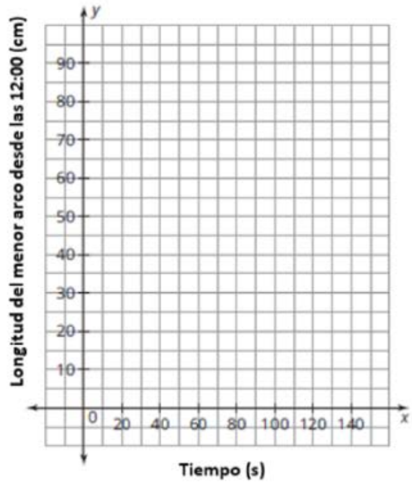


Figura 3. Respuesta del grupo 2.

Luego que todos los grupos enviaron su resolución se les pidió que se unieran a la sala principal del Zoom para socializar las resoluciones encontradas.

En la resolución de la pregunta 2 se utilizó el GeoGebra y los grupos compitieron sus construcciones, como se observa en la figura 4.

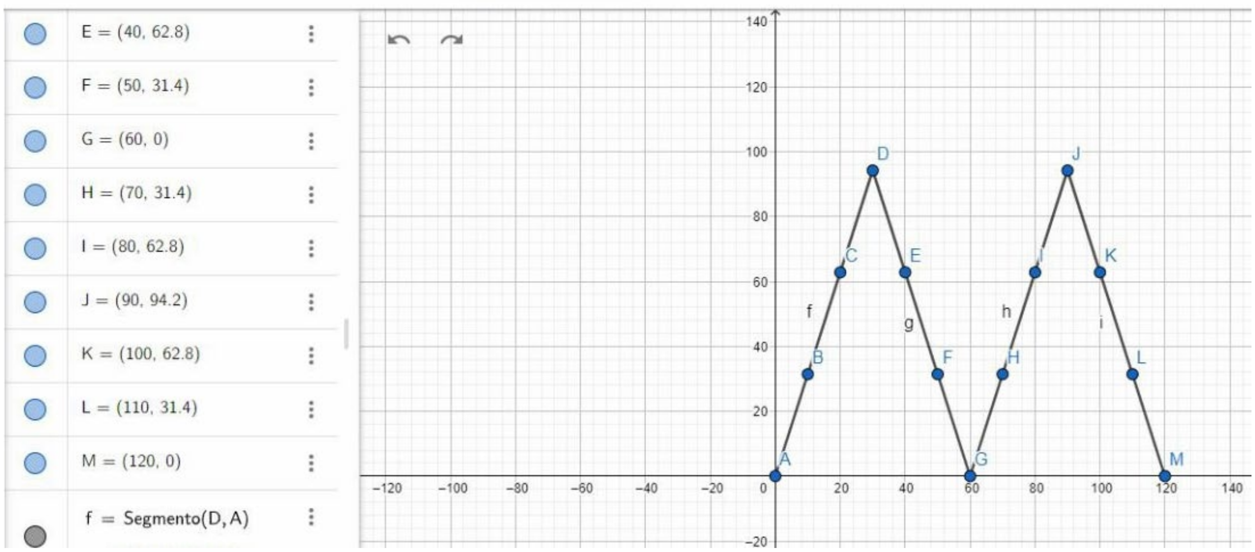


Figura 4. Respuesta del grupo 1.

La gráfica obtenida al unir los puntos generó interés en los estudiantes por conocer su regla de correspondencia y seguir desarrollando las demás preguntas.

En la justificación de la pregunta 3e los estudiantes usaron el GeoGebra y lograron visualizar la gráfica de la función coseno, figura 5.

Aplicación práctica de la función coseno.

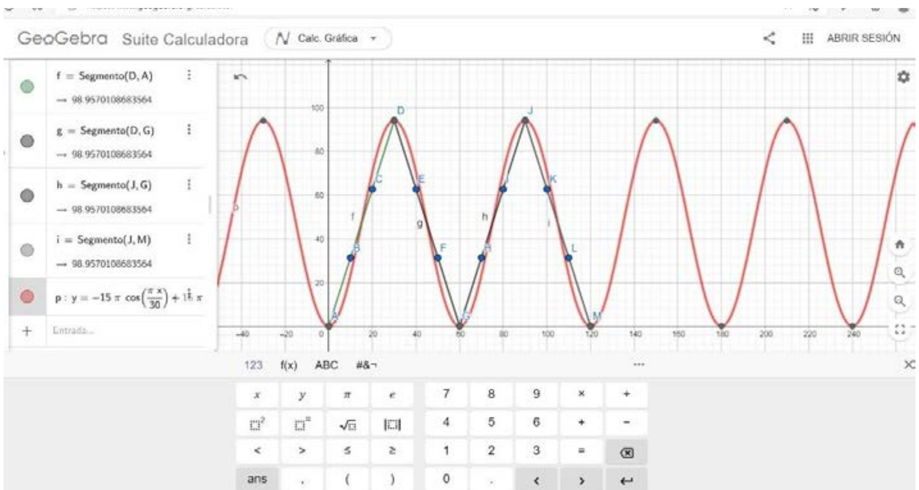


Figura 5. Respuesta del grupo 2.

Con la ayuda de las fórmulas los grupos lograron encontrar la regla de correspondencia y los demás elementos de la gráfica como el periodo, la amplitud y los desplazamientos.

Algunos resultados

Los estudiantes, en un inicio, al enfrentarse a la situación planteada encontraron diferentes resoluciones. Una de las principales dificultades que se observó en la mayoría de las resoluciones fue el no haber tenido en cuenta la menor longitud de arco formado por el extremo inicial y el extremo final del segundero.

Algunos de los grupos mostraron cierto dominio de conceptos asociados a la longitud de arco, los sistemas de conversión y el plano cartesiano. Sin embargo, no lograron construir la gráfica de la función inicial.

Con la ayuda del software GeoGebra la mayoría de grupos logró ubicar correctamente los puntos en el plano cartesiano y visualizar la construcción del gráfico inicial. A partir de dicha gráfica se calcularon la amplitud, el periodo, los desplazamientos y la regla de correspondencia de la función coseno.

Referencias y bibliografía

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al Estudio de las Situaciones Didácticas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Bruner, J. (1986). *Juego, pensamiento y lenguaje*. Perpectivas. Infancia. https://www.observatoriodelainfancia.es/ficherosoia/documentos/1742_d_juego_pensamiento_lenguaje.pdf

Piaget, J. (1983). *Psicología y pedagogía*. Barcelona: Editorial Ariel

Santos, D. R. D. (2021). Estratégias metodológicas para o estudo das funções trigonométricas e funções hiperbólicas.

Taylor, H. y Wade, T. (1981). *Cálculo diferencial e integral.* D.F.: Limusa.

Ziatdinov, R., & Valles, J. R. (2022). Synthesis of modeling, visualization, and programming in GeoGebra as an effective approach for teaching and learning STEM topics. *Mathematics*, *10*(3), 398.