XVI CIAEM
Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference of Mathematics Education
UNIVERSIDAD DE LIMA
Lima - Perú
30 julio - 4 agosto 2023
xvi.ciaem-iacme.org

Articulación de los pensamientos matemáticos bajo la situación de aprendizaje “un juego justo”

Oscar J. **González Pinilla**
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia
oscarmateud@gmail.com
Camilo **Arévalo** Vanegas
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia
Kmilo741a@gmail.com
Mónica A. **Diaz** Guarín
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia
Andreadg_323@gmail.com
Liz P. **Acero** Molina
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia
lianllely@gmail.com

Resumen

Una de las competencias que debe desarrollar un profesor de matemáticas en ejercicio de su profesión, es la de planificar; en la que debe tener la habilidad de diseñar tareas y crear actividades capaces de llamar la atención de los estudiantes en su objetivo de enseñar la disciplina. La presente comunicación se centra precisamente en mostrar mediante una experiencia didáctica en el aula, sobre la posibilidad real de diseñar situaciones de aprendizaje congruentes con los fundamentos teóricos curriculares, es decir, situaciones de aprendizaje y en particular de situaciones problema que integren los diferentes pensamientos matemáticos y que, a la vez, posibilitan que los procesos de aprendizaje, se enfoquen en la construcción de un conocimiento matemático general; evitando así caer en el error pedagógico de involucrar a los estudiantes en escenarios de aprendizaje ligados a la construcción de un único concepto, tópico o tema en particular.

Palabras clave: Planificar; Articular; Competencia matemática; Pensamiento matemático; Situaciones de aprendizaje.

Introducción

En los procesos de enseñanza-aprendizaje, el enfoque sistémico, donde se concibe al conocimiento como un conjunto sistematizado y articulado de saberes es claramente necesario, pues éste se aplica en tres tipos distintos de contexto: a) en el sistema de enseñanza de las matemáticas en su conjunto; b) en el conocimiento como un conjunto de sistemas conceptuales; y c) en los sistemas didácticos materializados en una clase, cuyos subsistemas principales son: el profesor, los alumnos y el saber enseñado (Godino, 2004). Sin embargo, actualmente parece una tarea difícil para los profesores en su tarea de planificar situaciones de aprendizaje, donde se vea claramente la integración de varios de los pensamientos matemáticos en pro de la construcción de conocimiento.

Es por ello que, esta experiencia de aula enmarcada en la construcción de conocimiento matemático general, evoca la necesidad de mejorar las prácticas pedagógicas en el aula de clase, especialmente la de planificación, con el propósito de contribuir al desarrollo de competencias matemáticas generales de los estudiantes con particular énfasis en su componente práctico, en la que se aprende matemáticas haciendo matemáticas, en la que además, se haga evidente una articulación entre los saberes y conocimientos (pensamientos) que se convocan durante la enseñanza aprendizaje de las matemáticas.

Currículo y estándares en matemáticas para Colombia

Con el fin de potenciar el pensamiento matemático en Colombia, se propone el trabajo por competencias, que se generan gracias a la planificación de ambientes de aprendizaje enriquecidos por situaciones problema significativos y comprensivos, que posibiliten avanzar a niveles de comprensión mayores y más complejos. En este sentido se hace indispensable pensar la matemática como un compilado de saberes donde se diferencie el conocimiento conceptual y procedimental enmarcados en cinco pensamientos:

1. Pensamiento numérico y sistemas de numeración
2. Pensamiento espacial y sistemas geométricos
3. Pensamiento métrico y sistemas de medición
4. Pensamiento variacional y sistemas algebraicos
5. Pensamiento aleatorio y sistemas de datos

A pesar de que los lineamientos en matemáticas son claros al afirmar que, "Los cinco tipos de pensamiento matemático tienen elementos conceptuales comunes que permiten el diseño de situaciones de aprendizaje y en particular de situaciones problema que integren los diferentes pensamientos y que, a la vez, posibilitan que los procesos de aprendizaje de las matemáticas se den a partir de la construcción de formas generales y articuladas de esos mismos tipos de pensamiento matemático" (MEN, 1999. Pág. 69), aún persiste una clara dificultad para el profesor de matemáticas en su proceso de planificación, lograr ligar y relacionar los cinco tipos de pensamiento matemático en una situación de aprendizaje que propenda por el desarrollo de más que un concepto o tópico, lo que llamaríamos una red de conocimientos.

A continuación, se presenta la planificación de una actividad orientada al desarrollo de los pensamientos matemáticos, enmarcados en una situación de aprendizaje llamada "Un juego Justo", reconociendo el papel de "las situaciones en contexto" como medio y espacio para la enseñanza-aprendizaje de la matemática, donde se pueda establecer implícitamente una relación entre los diferentes conceptos y saberes involucrados en la situación y que permitan resolver el problema. Es importante aclarar que la situación problema debe apuntar siempre a distintos contenidos y hacia diversas estructuras matemáticas, pero éstos no deben ser evidentes en sí mismos, sino que tienen que ser interpretados activamente por los estudiantes, por tal razón la situación problema será presentada a los estudiantes a manera de reto o juego.

Situación de aprendizaje "Un juego justo"

El juego consiste en que usted y sus amigos dibujan en el suelo la imagen que se muestra en la figura 1. Luego lanzan canicas desde una distancia acordada con el objetivo de que ésta quede dentro de la figura. Determine las reglas y consideraciones que debe tener el juego para lograr obtener un ganador.

La figura consiste en un triángulo equilátero con dos figuras internas inscritas, un círculo y un cuadrado respectivamente.

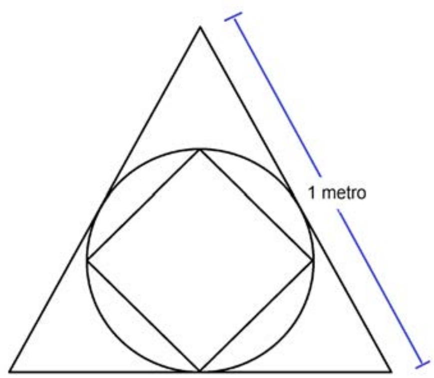


Figura1. Representación geométrica que deben dibujar los estudiantes para iniciar el juego.

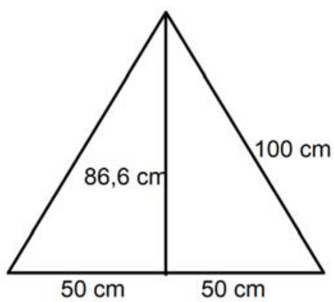
Inicialmente los estudiantes realizan la exploración del juego, haciendo lanzamientos al azar y verificando el lugar en el cuál quedaban las canicas; deciden entonces trabajar la dinámica bajo la modalidad de puntajes y ciertas reglas que ellos mismos establecieron y acordaron con forme se desarrollaba el juego. A continuación, se enumeran las reglas acordadas por el grupo y la relación de dicho acuerdo con el pensamiento matemático que se iba desarrollando a medida que la dinámica avanzaba:

Regla 1 – Pensamiento espacial, aleatorio y variacional: *Si la canica cae en el interior de la figura, se otorgará un puntaje dependiendo del lugar geométrico que ocupe la canica.*

Los estudiantes no tardan en darse cuenta de que existe una relación entre el puntaje que debería obtenerse y el lugar geométrico en el cual cae la canica; tal que si la canica cae en una región de área menor el puntaje ha de ser mayor, porque es menos probable que la canica caiga en áreas menores y viceversa; es decir, la proporción entre el área de la figura donde cae la canica y el puntaje obtenido debe ser inversa.

Vemos entonces en lo anterior, que la dinámica del juego hace que salgan a flote de manera implícita dos tópicos bastante importantes en los pensamientos espacial y variacional, ya que deben jugar con el área de figuras planas y la respectiva relación inversa con el puntaje obtenido. Para ello, los estudiantes con ayuda del profesor logran obtener el área de las respectivas regiones de las figuras y le otorgan un puntaje.

En primer lugar el área del triángulo equilátero viene dada por la expresión:

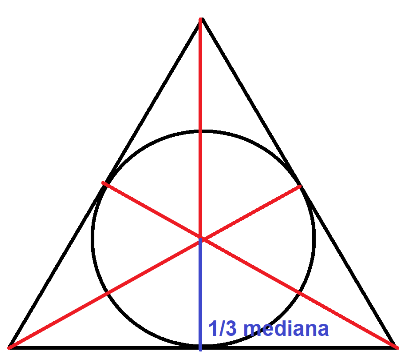


$$C^2 = h^2 - C^2$$
$$C^2 = 100^2 - 50^2$$
$$C^2 = 10000 - 2500$$
$$C = \sqrt{7500} = 86{,}6$$

$$Area\ \Delta = \frac{100cm * 86{,}6\ cm}{2} = 4330\ cm^2$$

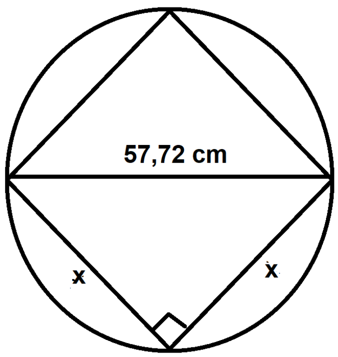
Donde 100 cm representa la base del triángulo y 86,6 la altura, que se puede obtener fácilmente usando el teorema de Pitágoras.

Por otro lado, el área del círculo está dada por la expresión $AO = \pi r^2$, donde el radio r equivale a la tercera parte de las medianas del triángulo equilátero (teorema del baricentro); es decir, en el triángulo equilátero las medianas corresponden a la altura del triángulo y el punto de corte de sus tres medianas coincide con el centro del círculo, De allí que podamos decir que el radio r del círculo equivale a la tercera parte de la mediana del triángulo, esto es $\frac{86{,}6}{3} = 28{,}86\ cm$. Luego el área del círculo es:



$$AO = \pi r^2$$
$$AO = (3{,}1416) * (28{,}86)^2$$
$$AO = (3{,}1416) * (832.9)$$
$$AO = 2616.64\ cm^2$$

Posteriormente, para hallar el área del cuadrado inscrito en la circunferencia sabemos que la diagonal del cuadro equivale a dos veces el radio del círculo, es decir 57,72 cm, y que dicha diagonal divide al cuadrado en dos triángulos rectángulos congruentes; de tal forma que es sencillo averiguar la longitud del lado del cuadrado usando nuevamente teorema de Pitágoras y así su área:



$$C^2 = h^2 - C^2$$
$$57{,}72^2 = x^2 + x^2$$
$$57{,}72^2 = 2x^2$$
$$\frac{3331.6}{2} = x^2$$
$$x = \sqrt{1665{,}8}$$
$$x = 40.81$$

$$A■ = 40.81^2$$
$$A■ = 1665{,}8\ cm^2$$

Finalmente, sabemos que la figura de la que trata el juego es una figura compuesta, en la que las áreas de una figura menor hacen parte de una mayor, por ello procedemos a calcular el área de cada región usando los cálculos y resultados hallados en los procesos anteriores (Ver figura 2):

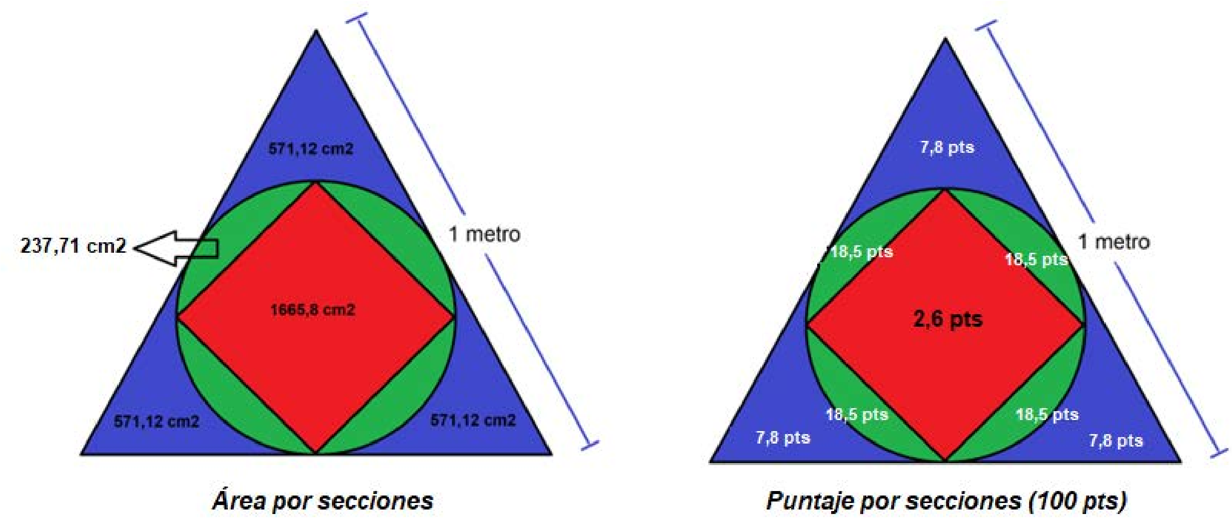


Figura 2. Correspondencia del área con el puntaje por sección en la figura.

$$Área\ roja = A■ = 1665{,}8\ cm^2$$
$$Área\ verde = A\text{O} - \text{A}■ = 2616.64\ cm^2 - 1665{,}8\ cm^2 = 950.84\ cm^2$$
$$Área\ azul = A\Delta - A\text{O} = 4330\ cm^2 - 2616.64\ cm^2 = 1713{,}36\ cm^2$$

Como se puede ver el área verde y el área azul corresponden a cuatro y tres regiones diferentes respectivamente, entonces cada región sería la cuarta y tercera parte del área de cada color:

$$Área\ cada\ región\ verde = \frac{950.84\ cm^2}{4} = 237{,}71\ cm^2$$

$$\acute{A}rea\ cada\ regi\acute{o}n\ azul = \frac{1713{,}36\ cm^2}{3} = 571.12\ cm^2$$

Al reconocer que la relación que se presenta entre el área de la sección en la que cae la canica y el puntaje que debe asignarse, es inversamente proporcional a la probabilidad de ocurrencia, se les pide a los estudiantes que asignen a cada sección un puntaje entre 0 y 100 y para ello hacen uso de la regla de tres inversa y reglas básicas de probabilidad.

Tabla 1
Correlación del área de la figura con el puntaje obtenido.

Región	**Área**		**Probabilidad P** $\left(\frac{\acute{a}rea\ de\ la\ secci\acute{o}n}{\acute{a}rea\ total}\right)$		**Inversa de la probabilidad** $\frac{1}{P}$	
	Sección	*Color*	*Sección*	*Color*	*Puntaje por Sección*	*Puntaje por Color*
Roja	1665,8	X 1= 1665,8	0,38	X 1 = 0,38	2,6	X 1 = 2,6
Verde	237,71	X 4 = 950,84	0,054	X 4 = 0,22	18,5	X 4 = 74,0
Azul	571,12	X 3 = 1713.36	0,132	X 3 = 0,39	7,8	X 3 = 23,4
Total	2553,87	4330	0,566	1	28,9	100

Desde esta perspectiva, el juego y en particular la forma en que platean la regla para asignar puntaje a cada región geométrica a partir de su relación inversa, es una clara alusión al desarrollo del pensamiento espacial y variacional donde se privilegia el estudio del concepto de área y las propiedades de cuerpos geométricos bidimensionales junto con el reconocimiento y caracterización de la variación y el cambio así como con su descripción, modelación y representación en distintos registros simbólicos, en este caso el gráfico.

Regla 2 – Pensamiento numérico y sistemas de numeración: *Si una canica lanzada desplaza a otra que ya está en la figura hacia el exterior de esta, el jugador duplicará el puntaje de la región en la cual caiga y el perdedor disminuirá su puntaje acumulado en la mitad (Ver figura 3).*

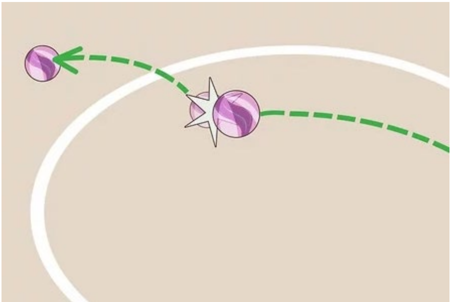


Figura 3. Regla 2, Desplazamiento entre canicas.

Está regla obliga a los estudiantes a recurrir a estrategias de calculo constante para llevar cuentas; y en tanto los puntajes de cada sección en la figura corresponden a números decimales (racionales), el rigor matemático que requieren para sumar o restar puntajes será mayor, ya que las cantidades en cuestión los obligan a trabajar el concepto de número más allá de la acción de contar con unidades discretas (Números naturales), para ampliar su universo numéricos hacia las cantidades continuas. Estas extensiones de los conjuntos numéricos se convierten en fuertes obstáculos de aprendizaje para los estudiantes y una serie de dificultades didácticas para docentes, las cuales logran ser resueltas en gran medida cuando estas nociones son trabajadas bajo una situación de aprendizaje y como en este caso cuando el estudiante se ve involucrado de manera lúdica a un juego que pretende ganar. Algo similar ocurre cuando la dinámica del juego conlleva también al posible trabajo con la operatividad de cantidades negativas.

Regla 3 – Pensamiento métrico: *Si una canica lanzada queda al interior de la figura y a menos de dos cuarta de otra canica, la primera robará el puntaje obtenido por la segunda.*

Figura 4. Regla 3, Distancia entre canicas usando un patrón no estandarizado de medición (la cuarta).

Esta regla creada por los estudiantes, muestra una clara alusión a la posibilidad que tiene el juego y su dinámica en el desarrollo de pensamiento métrico, donde la estimación de medidas y la apreciación de los rangos entre los cuales puedan ubicarse esas medidas, trascienden el tratamiento exclusivamente numérico y propenden por la estimación y aproximación de longitudes a partir de patrones de medidas no estandarizados y señalan la estimación como puente de relaciones entre las matemáticas y el mundo de la vida cotidiana, en contextos en los que no se requiere establecer una medida numérica exacta para tomar decisiones. Es de precisar que está competencia dentro del pensamiento métrico, históricamente se ha perfeccionado gracias a la estandarización de patrones de medida tomadas al comienzo de partes del cuerpo, es decir, se está comprendiendo el conceto de medición a partir de su génesis y desde un principio empírico.

Conclusiones de la experiencia

La articulación de los diferentes pensamientos en matemáticas que sugieren la formación de individuos verdaderamente competentes debe contemplar que se hace necesario involucrar a los estudiantes en situaciones de aprendizaje significativas, que despierten el interés y curiosidad de estos por descubrir. Si bien esta tarea está directamente asignada a la labor docente como agente didactizador y creador de contextos significativos, no resulta ser tarea fácil, ya que debe en primer lugar reconocer entre otras cosas, las siguientes premisas:

- Debe existir una relación de conocimientos a enseñar, donde una situación de aprendizaje se preste para lograr articular y crear redes de conocimientos en los estudiantes. No se trata de enseñar conceptos o contenidos sino de hacer de las situaciones de aprendizaje una posibilidad de crear conocimientos generales. En este sentido, la NCTM (2000) es clara al decir que: "En un currículo coherente, las ideas matemáticas están ligadas y se construyen unas sobre otras, para que así profundice la comprensión y el conocimiento del alumnado y aumente su habilidad para aplicarlas. Su buena articulación incentiva a los estudiantes para ir aprendiendo ideas matemáticas cada vez más complejas a medida que avanzan en sus estudios" (NCTM, 2000, p.15).

- En las situaciones de aprendizaje que surjan en la labor de planificación de los docentes, los estudiantes, por sí mismos, deben tener la capacidad de relacionar los conocimientos aprendidos, ya que "Las matemáticas no son una colección de apartados o niveles separados, aunque con frecuencia se dividen y presentan así; constituyen más bien un campo integrado de estudio. Viendo las matemáticas como un todo, resalta la necesidad de estudiar sus conexiones internas y pensar sobre ellas, tanto en las existentes en el currículo de un determinado nivel como en las que se dan entre niveles" (NCTM, 2000, p.68).

- Una situación de aprendizaje significativa debe garantizar el avance gradual de los estudiantes por los diversos pensamientos matemáticos con miras a la sofisticación del conocimiento y a la creación de individuos competentes, pues solo de esta manera es posible que "los estudiantes pueden conectar ideas matemáticas, con una comprensión más profunda y duradera. Pueden ver conexiones matemáticas en la rica interacción entre los temas matemáticos, en contextos que relacionan las matemáticas con sus propios intereses y experiencias. A través de una enseñanza que resalte la interrelación de las ideas matemáticas, no sólo aprenden la asignatura, sino que también se dan cuenta de su utilidad." (NCTM, 2000, p.68).

Referencias y bibliografía

Chaves, E. (2019). Capacidades superiores matemáticas en la enseñanza de la Probabilidad. *Memorias del XV CIAEM*. Medellín, Colombia.

Godino, J. D., (2004). "Perspectiva de la Didáctica de las Matemáticas como Disciplina Científica". (URL: http://www.ugr.es/~jgodino/fundamentos-teoricos/01_PerspectivaDM.pdf). Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. España. Fecha de consulta: 10 de febrero de 2022.

Ministerio de Educación Nacional (1998). Matemáticas. Lineamientos curriculares. MEN. Bogotá. (Hay una edición del mismo año en la Cooperativa Editorial Magisterio. Bogotá).

Ministerio de Educación Nacional (1999). Nuevas tecnologías y currículo de matemática. Serie Lineamientos Curriculares. Punto EXE Editores. Bogotá

NCTM (The Nacional Council of Teachers of Mathematics). (2000). *Principios y estándares de la educación matemática.* Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. Sevilla, España