Épsilon - *Revista de Educación Matemática* **2022, nº 111, 7-28**

Errores del alumnado de Educación Secundaria al manejar y resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

Laura Muñiz-Rodríguez
Universidad de Oviedo. Asturias, España.
0000-0001-7487-5588
Luis J. Rodríguez-Muñiz
Universidad de Oviedo. Asturias, España.
0000-0001-8702-8361
Alba Abella Rodríguez
Colegio La Inmaculada. Ponferrada, León. España.

Resumen: *Se analizan los errores del alumnado de segundo curso de Educación Secundaria Obligatoria (13-14 años) al manejar y resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y se indaga sobre sus posibles causas. Se identifican tres tipos de errores: los motivados por una incorrecta utilización del lenguaje verbal y matemático, los de tipo técnico, y los derivados de aplicaciones incorrectas de definiciones, propiedades y teoremas. Algunos errores son similares a los identificados para ecuaciones, pero se detectan dos nuevos tipos de error característicos de los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas: la incorrecta comprensión del concepto de solución de un sistema de ecuaciones (tanto gráfica como algebraicamente) y la imposibilidad de identificar el significado aritmético del método de resolución por reducción. Finalmente, se aportan sugerencias para el trabajo de aula para intentar minimizar los errores más frecuentes.*

Palabras clave: *álgebra; ecuaciones; educación matemática; educación secundaria; sistemas de ecuaciones lineales.*

Secondary education students' errors while handling and solving systems of two lineal equations with two unknowns

Abstract: *Second-year secondary education (13-14 years old) students' errors while handling and solving systems of two linear equations with two unknowns are analyzed and their possible causes are discussed. Three types of errors are identified: those derived from an incorrect use of both mathematical and verbal language, technical errors, and those derived from incorrect applications of definitions, properties, and theorems. Some of them are similar to those identified for linear equations, but two new types of mistakes are detected, that are typical from systems of two linear equations with two unknowns: the incorrect interpretation of the concept of solution of a system (both graphic and algebraic), and the impossibility of identifying the arithmetic meaning of the solving method by reduction. Finally, suggestions for classroom practice are provided, oriented to minimize the presence of the most frequent errors.*
Keywords: *algebra; equations; mathematics education; secondary education; systems of linear equations.*

1. INTRODUCCIÓN

El análisis de errores es una línea clásica en la investigación en educación matemática. Clasificarlos y comprender sus causas es el primer paso hacia el diseño de intervenciones didácticas (García Suárez, 2018; Götte y Mantica, 2021). Aunque existe literatura sobre los errores en el manejo de ecuaciones de primer grado, son menos numerosos los estudios publicados sobre los sistemas de ecuaciones lineales en Secundaria. En este trabajo se plantea un estudio exploratorio que ahonda en el conocimiento sobre los errores cometidos por estudiantes de Secundaria en el manejo y resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, identificando nuevas asociaciones de errores.

El trabajo consta de una primera sección en la que se analiza el estado del arte sobre el concepto de error en educación matemática y se exponen distintas clasificaciones de errores célebres en la literatura. Posteriormente, se explica el diseño metodológico, se describe la muestra y se recogen los resultados. Finalmente, se relacionan los resultados con investigaciones previas y se elevan unas conclusiones vinculadas a la práctica docente.

2. MARCO CONCEPTUAL

2.1 Concepto de error y sus causas

En matemáticas un error es una expresión incompleta o deficiente de conocimiento, resultado de concepciones inadecuadas, la aplicación correcta de un procedimiento imperfecto, o la aplicación incorrecta de un procedimiento adecuado (Kilpatrick et al., 1998). Socas (1997) señala que hasta el alumnado con una actitud aparentemente satisfactoria en matemáticas podría ocultar errores conceptuales, incluso graves, que dificultarían su aprendizaje y que el error va más allá de la falta de conocimiento o la distracción, y puede ser entendido como "la presencia en el alumno de un esquema cognitivo inadecuado" (Socas, 1997, p. 124).

Rico (1992) sostiene que el estudio de los errores en matemáticas se remonta a Weiner en 1922, e identifica tres núcleos de interés: el análisis de los errores en la resolución de problemas como un método para estudiar el pensamiento matemático en términos del procesamiento de la información, el estudio de los patrones de error como un recurso de apoyo en la tarea del profesorado, y la enseñanza correctiva mediante métodos de diagnóstico y propuestas alternativas de trabajo para los estudiantes.

2.2. Clasificación de los errores

Entre las clasificaciones más habitualmente utilizadas se encuentra la de Radatz (1979), quien establece cinco categorías, basándose en las teorías sobre el procesamiento de la información, siendo una de ellas la que atribuye el error a un aprendizaje deficiente de requisitos, habilidades, hechos o conceptos previos. A pesar de la gran importancia de esta clasificación, se ha señalado (González-García et al., 2018; Rodríguez-Muñiz y Candás, 2017) que confiere mucho peso a los errores por aprendizaje deficiente previo, lo que puede llegar a distorsionar el estudio del tema en cuestión. Que la mayoría de los errores se agrupen en esta categoría del modelo de Radatz o bien pone la lupa sobre la propia clasificación utilizada o bien revela una situación que conlleva cuestionar seriamente tanto el contenido como la estructura del currículo impartido (González-García et al., 2018).

La clasificación propuesta por Movshovitz-Hadar et al. (1987) distingue seis categorías:

- Categoría 1: Datos mal utilizados. Discrepancia entre los datos proporcionados y la utilización que el alumnado hace de ellos.
- Categoría 2: Lenguaje malinterpretado. Traducción incorrecta de hechos matemáticos al cambiar de lenguaje.
- Categoría 3: Inferencias inválidas. Están vinculados a un uso incorrecto del razonamiento lógico.
- Categoría 4: Teoremas o definiciones deformados o aplicados incorrectamente.
- Categoría 5: Solución no verificada, incluso cuando los pasos seguidos sean correctos.
- Categoría 6: Errores técnicos: de cálculo, al seleccionar datos de una tabla, de manipulación algebraica, errores cometidos al ejecutar algoritmos conocidos, etc.

2.3. Estudios previos

Debido a la íntima relación entre ambos contenidos del currículo, se mencionan brevemente en primer lugar algunos trabajos en el ámbito de las ecuaciones de primer grado y, posteriormente, se hace un repaso por la literatura dedicada a los sistemas de ecuaciones. Esta última está menos presente en revistas científicas así que, por su relevancia para la presente investigación, también incluiremos trabajos académicos no publicados y congresos nacionales e internacionales.

Aunque no se pretenda realizar un catálogo exhaustivo, es ineludible citar la obra de Kieran (1989, 1996) por la identificación de los ámbitos de potencial dificultad del álgebra, en general, y de las ecuaciones, en particular. En Kieran (2006) encontramos una detallada revisión del estado del arte, hasta aquel momento. En Egodawatte (2011) se propone una clasificación de los errores en cuatro categorías conceptuales: los relativos a la comprensión de las variables, en el manejo de las expresiones algebraicas, a la hora de resolver ecuaciones, y en la resolución de problemas verbales. También en Castro (2012) se realiza un compendio de las dificultades del alumnado de Secundaria con el álgebra, identificando los problemas derivados de la transición de la aritmética al álgebra y del álgebra como lenguaje. Gran parte de la literatura clásica señala que una de las principales dificultades radica en los cambios de representación y, específicamente, en la traducción del lenguaje verbal al algebraico (Wagner y Parker, 1999).

Por las repercusiones para esta investigación, mencionaremos más detenidamente dos trabajos recientes. Molina et al. (2017) analizan dos grupos de estudiantes de segundo y cuarto curso de Secundaria, observando los errores que más persisten mediante un instrumento de dominó algebraico, fuera del contexto de la resolución de problemas. Clasifican los errores en tres categorías: la relacionada con la completitud de la expresión (expresiones incompletas o con información redundante), la procedente de la aritmética (confusiones entre división y producto, potencia y producto, suma y producto y división y potencia), y la procedente de las características simbólicas del álgebra (errores de generalización, de particularización, de uso de las letras y de complicación estructural). Concretamente, Molina et al. (2017) señalan las dificultades en la traducción del lenguaje verbal al algebraico y los problemas derivados de la imprecisión en la definición de la variable.

Pérez et al. (2019) analizan los errores en la resolución de ecuaciones lineales con una incógnita en un estudio con una muestra de alumnado de Secundaria. El estudio refleja que los errores cometidos están relacionados con operaciones aritméticas y errores algebraicos propios de las ecuaciones. Además, Pérez et al. (2019) subrayan la importancia de no restringir el estudio de errores a su clasificación, sino ahondar en la detección de su origen o causa para poder proporcionar estrategias de intervención al profesorado.

Entre los estudios más significativos que han analizado los errores cometidos por el alumnado de Secundaria en los sistemas de ecuaciones lineales cabe citar los trabajos de Filloy et al. (2003, 2010). Estos autores, que habían identificado un "corte didáctico" entre la aritmética y el álgebra cuando la variable x está a ambos lados de la desigualdad y deja de ser fácilmente identificable con un número, identifican en el caso de sistemas de ecuaciones un segundo "corte", surgido cuando se opera con una variable en términos de otra, como sucede en los métodos de igualación y sustitución.

Panizza et al. (1999) entrevistaron a seis estudiantes respecto al manejo de sistemas de ecuaciones. Determinaron que los estudiantes estaban muy influidos por la idea de solución única, lo que les impedía apreciar el sistema de ecuaciones como posible definidor de un conjunto infinito de soluciones.

En la investigación sobre los errores en sistemas de ecuaciones lineales hay una gran influencia de la teoría de registros de representación semiótica (Duval, 1999). El trabajo de Segura (2004) al analizar los errores que cometen estudiantes argentinos al resolver sistemas de ecuaciones lineales, indica que muchos surgen al cambiar de registro, entre el verbal y el algebraico, y también al pasar a la representación gráfica. También Oktaç y Trigueros (2010) señalan las dificultades para identificar gráficamente el concepto de solución de un sistema.

Ramírez et al. (2005) recomiendan discutir sistemas con infinitas soluciones, tanto gráfica como algebraicamente, mientras que Arellano y Oktaç (2009) subrayan la importancia de trabajar el cambio de representación no sólo de lo algebraico a lo gráfico, sino también de lo gráfico a lo algebraico. Bozzalla y García (2014), estudiando alumnado argentino de enseñanza media, insisten en esta falta de conexión entre las ideas de recta y su representación gráfica y la idea algebraica de sistema de ecuaciones lineales. La necesidad de trabajar con diferentes registros la subrayan también Campos y Parráguez (2019) tras analizar los errores cometidos por una muestra de estudiantes chilenos de Secundaria. También se encuentran propuestas de secuencias didácticas basadas en el uso de software de geometría dinámica para reforzar la conexión entre representaciones (Pérez y Vargas, 2019). Este tipo de estudios vinculando los softwares de representación gráfica y las expresiones algebraicas ya se iniciaron tiempo atrás (v.g., Engler et al., 2001).

Hariati y Septiadi (2019) estudiaron a seis estudiantes con respecto a su manejo de sistemas de ecuaciones lineales con tres incógnitas, y clasificaron los errores en varias categorías: comprensión del problema, transformación algebraica, procesado o manipulación, y escritura de la solución, observando diferencias según el nivel cognitivo del alumnado. Rodríguez Jara et al. (2019) realizan una construcción del conjunto de soluciones de un sistema lineal bajo el marco teórico APOE, señalando dificultades para conectar la geometría y el álgebra. Por su parte, Widada et al. (2020) proponen una aproximación en la etnomatemática para reducir los obstáculos al construir el sistema.

Aunque es más abundante la literatura sobre sistemas de ecuaciones lineales en el nivel universitario, no se ha considerado aquí porque a ese nivel se manejan los sistemas de ecuaciones desde el cálculo matricial lo que añade un elemento adicional de complejidad que no concurre en la etapa aquí analizada.

3. MÉTODO

3.1 Población y muestra

La población la constituye el conjunto de estudiantes de segundo de Educación Secundaria Obligatoria (ESO). La muestra consta de 20 alumnos de ese nivel educativo en un centro urbano de la ciudad de Oviedo (España), seleccionada mediante un muestreo por conveniencia, al ser el grupo al que se tuvo acceso.

Académicamente, el alumnado participante no tenía buenos resultados, la mayoría había suspendido matemáticas en la primera evaluación y dos personas repetían curso. Aunque era un grupo inquieto que se distraía con facilidad, se mostró receptivo y colaborador con la actividad. El método empleado era el de instrucción directa, con una aproximación deductiva, partiendo de definiciones, procedimientos y, posteriormente, ejercitando la práctica de resolución.

3.2. Instrumento

El instrumento fue diseñado por el equipo investigador, tras lo cual su contenido fue validado con la docente del grupo donde se iba a aplicar. Se trata de un cuadernillo que consta de seis problemas (Anexo I). Para su diseño se tuvieron en cuenta distintos referentes y criterios que describimos a continuación. En primer lugar, tras un análisis de todos los contenidos de la unidad didáctica se decidió centrarse en el método de reducción para resolver los sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas (también denominado suma-resta), así como en el método gráfico, por su capacidad de conexión con otros ámbitos de las matemáticas y porque, tras las observaciones iniciales realizadas en el aula, parecían ser los métodos en los que el alumnado presentaba más dificultades. Además, la literatura analizada también señalaba mayores dificultades en los cambios de representación y en las conexiones, por lo que el instrumento así definido nos permitió indagar precisamente sobre estos aspectos.

Para elaborar los problemas se consideraron los niveles de demanda cognitiva definidos por Krathwohl (cit. por Blanco et al., 2015). Los problemas incluidos son de rango cognitivo medio y alto según la clasificación de Krathwohl: los de rango cognitivo medio requieren establecer relaciones entre los conceptos y los datos, y los de rango cognitivo alto requieren el uso integrado de distintos conceptos interrelacionados. Se redujo al mínimo imprescindible el número de tareas que fueran exclusivamente de bajo rango cognitivo, ya que se consideraban suficientemente cubiertas con el trabajo realizado en el aula. Estos niveles son prácticamente coincidentes con los denominados “emplear” e “interpretar” del marco de las pruebas PISA (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos [OCDE], 2017).

Por otro lado, siguiendo los referentes para la elaboración de problemas de Blanco et al. (2015) se han buscado diferentes formas de presentación: fotografías, tablas, gráficos y texto escrito, de manera que se requiera utilizar diferentes representaciones y cambiar de unas a otras.

El primer problema está basado en los problemas de balanzas mencionados en Blanco et al. (2015) para plantear una situación realista y que suponga un reto para el alumnado. Para minimizar el abandono, se pautó la resolución en cuatro apartados: primero identificar las variables, luego las ecuaciones, después construir el sistema y, por último, comprobar si unos valores dados podían ser soluciones del sistema. El segundo problema está encaminado a la búsqueda de patrones como proceso previo para la generalización (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000; Schoenfeld, 1992) para comprender el mecanismo de resolución por reducción, en el que se insiste en el tercer ítem. El cuarto es un problema de identificación del sistema con la solución gráfica proporcionada, de este modo, se trabajan los cambios de representación del lenguaje gráfico al algebraico, pasando por el tabular, y pidiendo al alumnado una argumentación, para fomentar el proceso de comunicación (NCTM, 2000). En el problema quinto, se trabaja el cambio inverso: del lenguaje algebraico al gráfico. En el sexto problema se debe realizar un cambio de representación del lenguaje algebraico al verbal.

3.3. Recogida y análisis de datos

Se aplicó el instrumento a los 20 estudiantes durante la última sesión de la unidad didáctica referida a los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, que ocupó un total de 19 horas. La docente del grupo había utilizado una metodología mayoritariamente deductiva y expositiva, siguiendo un esquema tradicional de presentación de las nociones matemáticas que intervienen, introducción de ejemplos y planteamiento de ejercicios y problemas.

De manera exploratoria, es decir, sin hipótesis previamente establecidas respecto a los posibles resultados, se analizaron los errores en las producciones del alumnado con el objetivo de categorizarlos según la clasificación de Movshovitz-Hadar et al. (1987). Se seleccionó esta clasificación por tratarse, junto con Radatz (1979), de una de las clasificaciones generalistas más citadas. La clasificación de Radatz (1979) se descartó dado que en estudios previos (González-García et al., 2018) se observó que la categoría de errores debidos a un dominio deficiente de requisitos, habilidades, hechos o conceptos puede adquirir un peso muy grande, ya que muchos errores se pueden relacionar con un aprendizaje deficiente de conceptos previos. Si esto ocurre, se tiene poca información sobre las dificultades de la tarea en consideración, lo que dificulta una mejora en la práctica docente que permita mitigar esas dificultades. En la discusión se comparan los resultados obtenidos con otras clasificaciones de errores que, sin ajustarse al estudio realizado, son más específicas del campo del álgebra. Una vez realizada la categorización (objetivo principal del estudio), se indagó sobre las posibles causas, siguiendo a Socas (1997).

4. RESULTADOS

Tras el análisis de las respuestas del alumnado, se realiza un primer filtrado de resultados, observando en qué problemas se concentran más errores (Tabla 1). Se considera parcialmente correcto aquel problema en el que el estudiante llega a una solución válida, aunque por un método diferente al que se le pedía (ya que el método era uno de los objetos del análisis). Como se observa en la Tabla 1, casi todos los problemas, salvo el segundo, acumulan un importante número de errores, o directamente no fueron realizados. Conviene destacar el elevado número de producciones parcialmente correctas encontradas en el problema 1, fruto de haber resuelto el sistema de ecuaciones para encontrar la solución, sin comprobar su validez (Figura 1).

Tabla 1. Número de respuestas correctas, parcialmente correctas, incorrectas o en blanco en cada problema

	Problema					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Correcto	4	15	2	3	8	9
Parcialmente correcto	7	0	0	0	0	0
Incorrecto	9	5	16	15	12	5
En blanco	0	0	2	2	0	6

Utilizando solo las producciones incorrectas, la Tabla 2 resume la clasificación de los errores según el esquema de Movshovitz-Hadar et al. (1987). Téngase en cuenta que hay soluciones incorrectas que acumulan más de un tipo de error, de ahí que los totales de la Tabla 2 no siempre coincidan con el número de ejercicios incorrectos de la Tabla 1.

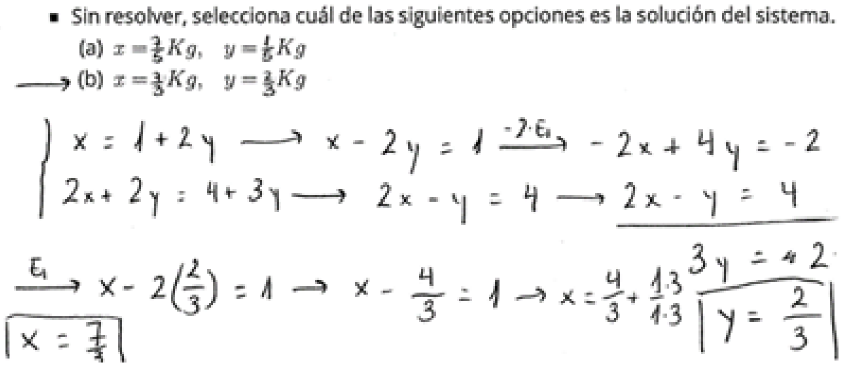


Figura 1. Ejemplo de producción del alumnado en el problema 1 con una resolución parcialmente correcta

Como se aprecia en la Tabla 2, los errores se concentran en tres de las categorías, siendo los más frecuentes los de lenguaje malinterpretado (que superan el 50 %), seguidos de errores técnicos (un tercio del total) y, finalmente, de teoremas o definiciones deformados.

Tabla 2. Número de errores encontrados en cada categoría, porcentaje de errores por problemas y total

	Problema						
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**Total**
Datos mal utilizados	- 0 %	- 0 %	- 0 %	- 0 %	- 0 %	- 0 %	0 0 %
Lenguaje malinterpretado	6 66.7 %	- 0 %	- 0 %	15 100 %	9 75 %	5 100 %	35 53.03 %
Inferencias no válidas	- 0 %	- 0 %	- 0 %	- 0 %	- 0 %	- 0 %	0 0 %
Teoremas o definiciones deformados	- 0 %	- 0 %	9 45 %	- 0 %	- 0 %	- 0 %	9 13.64 %
Solución no verificada	- 0 %	- 0 %	- 0 %	- 0 %	- 0 %	- 0 %	0 0 %
Errores técnicos	3 33.3 %	5 100 %	11 55 %	- 0 %	3 25 %	- 0%	22 33.33 %
Total	9	5	20	15	12	5	66

A continuación, se analizan ejemplos de producciones para cada problema.

4.3.1. Problema 1

Dos terceras partes de los errores en este problema se debieron al lenguaje malinterpretado, siendo el otro tercio de tipo técnico. La Figura 2 muestra un caso de mala interpretación de lenguaje, al hacer una traducción incorrecta del lenguaje pictórico al lenguaje algebraico.

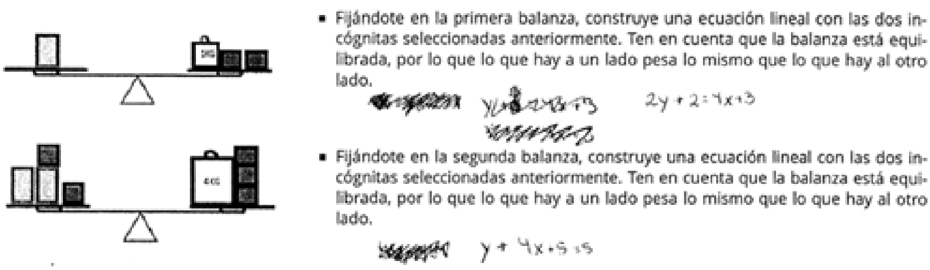


Figura 2. Ejemplo de una producción del alumnado en el problema 1 con un error de lenguaje mal interpretado

4.3.2. Problema 2

Este problema fue resuelto de manera correcta por la mayoría del alumnado, encontrándose solo cinco errores de tipo técnico. La Figura 3 muestra un ejemplo de error de este tipo. El estudiante no aplica correctamente el principio de equivalencia, pues al multiplicar por –2 la primera ecuación del sistema multiplica mal el segundo término, que pasa de –4 a 4. También conviene señalar que el segundo ítem pretendía que el alumnado buscara un patrón en la determinación de los coeficientes de la reducción, ligándolos al mínimo común múltiplo, sin embargo, nadie lo vinculó, y para realizar la reducción, los coeficientes de ambas ecuaciones se multiplican de modo cruzado, sin tener en cuenta si sería posible hacerlo con cantidades menores.

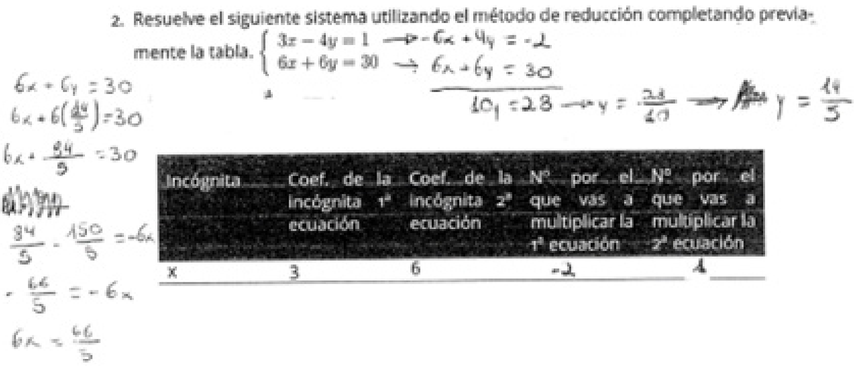


Figura 3. Ejemplo de una producción del alumnado en el problema 2 con un error técnico

4.3.3. Problema 3

Fue el problema que más errores generó. Algo más de la mitad de los errores se clasifican como técnicos, ya que suelen darse por omisiones de signos en la identificación de los coeficientes. Posiblemente, que las variables aparecieran siempre en el mismo orden en los sistemas contribuyó a que no hubiera errores de identificación. El resto de los errores pertenecen a la categoría de teoremas o definiciones deformados. Estos últimos aparecen ligados a una deformación tanto de la definición de coeficiente (que se complica cuando es literal y no numérico) como del procedimiento de reducción. En la Figura 4, en el tercer sistema del problema 3, al ser los coeficientes b y –1, se comete un error tanto en la identificación del coeficiente (error técnico, ya que se omite el signo) como en la determinación del valor (“Ninguno”) por el que es preciso multiplicar la primera ecuación (error de teoremas o definiciones deformados). Esta asignación de “Ninguno” como error asumimos que es discutible, ya que podría entenderse como que hay que dejar la ecuación sin operar (multiplicar por 1) en cuyo caso no sería un error. No obstante, entendemos que, en el contexto de la tarea y en el nivel escolar que se trabaja, habría sido más apropiado usar 1 como coeficiente, ya que “ninguno” en matemáticas puede significar 0.

De manera general, aunque no es un error, se observó que la mayoría del alumnado intenta ajustar el sistema a partir de los coeficientes de la variable x, no considerando los de y.

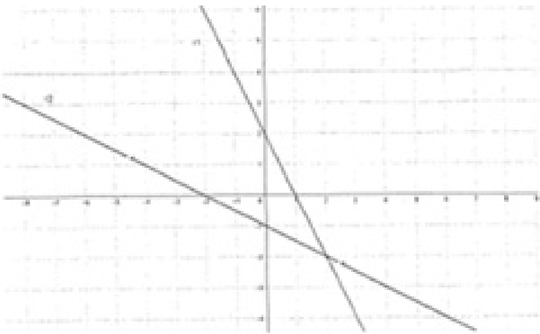
1) $\begin{cases} 3x + 7y = -1 \\ 5x - 13y = 29 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x - 11y = -17 \\ 7x - 9y = 5 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} ax + by = 5 \\ x - 1y = 9 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x + by = 0 \\ dx - 4y = 9 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} ax + by = \\ dx + fy = \end{cases}$

Sistema	Incógnita	Coef. de la incógnita 1ª ecuación	Coef. de la incógnita 2ª ecuación	Nº por el que vas a multiplicar la 1ª ecuación	Nº por el que vas a multiplicar la 2ª ecuación
1)	x	3	5	-5	3
2)	x	4	7	-7	4
3)	y	b	1	Ninguno	-a
4)	x	2	d	-d	2
5)	y	b	f	-d	a

Figura 4. Ejemplo de una producción del alumnado en el problema 3 con un error técnico y otro de la categoría de teoremas o definiciones deformados

4.3.4. Problema 4

Todos los errores cometidos se debieron a una mala interpretación del lenguaje. Parte del alumnado no pasó correctamente de la representación gráfica a la algebraica, debido a que no pudo identificar los puntos. Otra parte no supo identificar el punto de corte entre las dos rectas como la solución del sistema. Un ejemplo del primer tipo de error se ilustra en la Figura 5, donde, entre otros errores, se identifican (–1, 2) y (–2, 4) como puntos de la primera recta, a pesar de que el dato que se proporciona es (–1, 4).



r1

x	y
–1	4
-1	2
-2	4
-1	3

r2

x	y
2	–2
-1	-2
-2	-3
-8	3

Figura 5. Ejemplo de una producción del alumnado en el problema 4 con un error de lenguaje mal interpretado

4.3.5. Problema 5

Se han encontrado errores de dos categorías diferentes: mala interpretación del lenguaje y errores técnicos. Los errores que forman parte de la primera categoría se deben fundamentalmente a una incorrecta asociación entre lo representado mediante lenguaje algebraico y la representación gráfica. Los errores técnicos son, mayoritariamente, de manipulación de objetos algebraicos, como el ejemplo que se ilustra en la Figura 6, donde a partir de la ecuación –2x=0 se deduce que x=2.

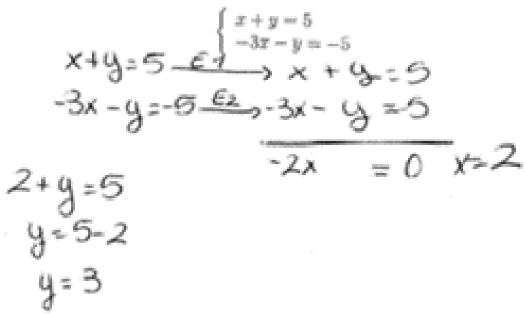


Figura 6. Ejemplo de una producción del alumnado en el problema 5 con un error técnico

4.3.6. Problema 6

Los errores encontrados corresponden a alumnado que no consiguió pasar del lenguaje algebraico al cotidiano, es decir, no se propuso un enunciado cuya traducción al lenguaje algebraico fuera precisamente el sistema dado. Vemos un ejemplo en la Figura 7, ya que el enunciado parte de valores numéricos concretos que harían innecesario el sistema.

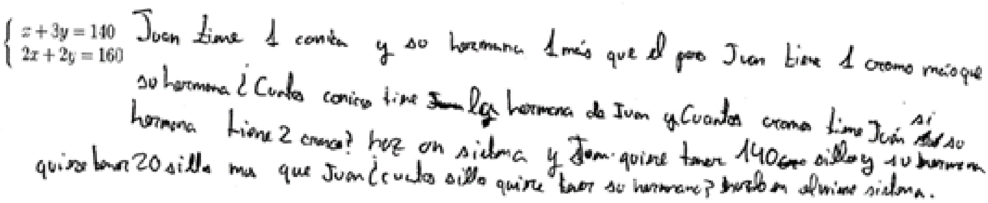


Figura 7. Ejemplo de una producción del alumnado en el problema 6 con un error de lenguaje malinterpretado

5. DISCUSIÓN

Los errores se distribuyen en tres de las categorías de la clasificación de Movshovitz-Hadar et al. (1987). La ausencia de otras categorías se puede explicar por diversos motivos. La categoría de solución no verificada agrupa aquellos errores que consisten en realizar un procedimiento que puede ser correcto pero que no proporciona una solución al problema y el estudiante no se percata por falta de comprobación de su resultado. A priori, era esperable que la categoría no tuviese una frecuencia relevante, ya que el alumnado de segundo de Secundaria aún no dispone de suficientes recursos matemáticos en el campo algebraico (Gasco-Txabarri, 2017), por lo tanto, es más habitual que no responda o que cometa algún error técnico. Además, el instrumento no estaba enfocado a analizar la capacidad de manejar distintos procedimientos, lo cual también reduce las posibilidades de aparición de este tipo de errores.

La ausencia de la categoría de datos mal utilizados podría obedecer a una advertencia realizada verbalmente, pidiendo que se detuvieran en la lectura comprensiva de los problemas. Además, el diseño del instrumento no incluye datos superfluos, lo cual reduce las posibilidades de equivocación en este sentido. También el diseño del instrumento creemos que explica la ausencia de errores en la categoría de inferencias no válidas: al separar cada problema en diferentes ítems se ha reducido notablemente la posibilidad de secuencias largas de razonamiento lógico. Estos aspectos serán retomados en las conclusiones.

Respecto a las causas de los errores observados, siguiendo a Socas (1997), parece que gran parte de los errores asociados a lenguaje malinterpretado y a teoremas y definiciones deformados tienen su origen en las dificultades asociadas a la complejidad de los objetos y a los procesos de pensamiento algebraico. La Figura 8 muestra un ejemplo de un error de lenguaje malinterpretado cuyo origen radica en una dificultad para manejar la complejidad del plano cartesiano en combinación con la expresión algebraica de una recta y con el propio significado de una recta, pues al valor x=4 no le pueden corresponder, al tiempo, los valores y=–1 e y=–4.

La complejidad de los procesos no siempre se manifiesta de esta forma. En la Figura 7 vemos lo que Molina et al. (2017) denominan "error de particularización", cuyo origen está vinculado, además de a esa complejidad, a los procesos de transición de lo aritmético a lo algebraico, entendido en este caso como lenguaje de generalización.

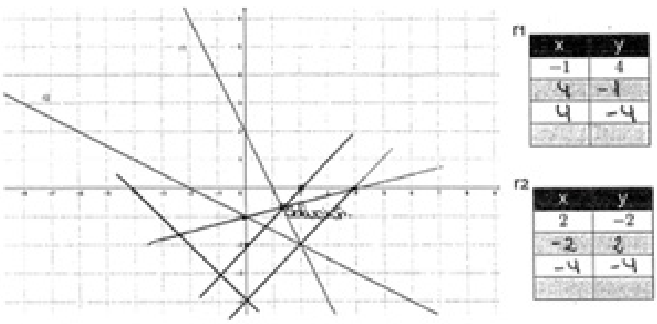


Figura 8. Ejemplo de error cuyo origen está relacionado con las dificultades asociadas a la complejidad de los objetos y a los procesos de pensamiento matemático

En cuanto a los errores técnicos, coincidimos con Pérez et al. (2019) en considerar sus causas mayoritariamente en el ámbito afectivo-emocional, según Socas (2007). El alumnado focaliza su atención en el algoritmo de resolución, descuidando operaciones algebraicas y aritméticas sencillas, que en otros casos demuestra que sabe hacer correctamente; por lo tanto, desvía la atención. La Figura 9 muestra un ejemplo de cómo el alumno o la alumna realiza correctamente todo el algoritmo hasta el paso final, en el cual descuida el signo.

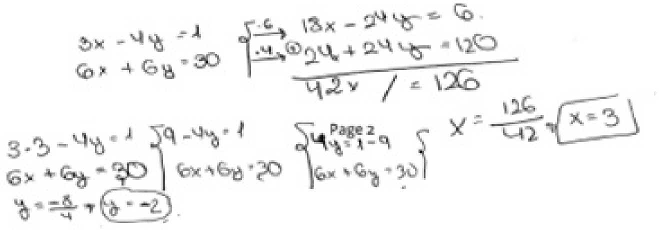


Figura 9. Ejemplo de error asociado al terreno afectivo-emocional

Más de la mitad (53 %) de los errores detectados se deben a errores de malinterpretación del lenguaje. Este tipo de errores son muy frecuentes en la literatura relativa tanto a ecuaciones de primer grado como a sistemas de ecuaciones (Castro, 2012; Segura, 2004). En este instrumento, además del manejo del lenguaje propiamente algebraico se manejan cambios del lenguaje pictórico al algebraico (en el caso del problema 1), del lenguaje gráfico y tabular al algebraico (problema 4), del algebraico al gráfico (problema 5) y del algebraico al verbal (problema 6). Se aprecia que el cambio del registro gráfico al algebraico acumula muchos de estos errores, lo cual es consistente con investigaciones previas: Bozzalla y García (2014) ya señalaban esa dificultad para identificar gráficamente la solución, como ocurre en el problema 4, que también requería el paso de la gráfica al lenguaje algebraico, algo señalado por Arellano y Oktaç (2009) como un obstáculo importante, poco ejercitado en Secundaria.

Son también abundantes los errores técnicos entre los cuales, según la clasificación de Movshovitz-Hadar et al. (1987), se incluyen los de manipulación algebraica. La Figura 10 recoge algunos de estos errores, detectados en la literatura previa, no sólo de sistemas de ecuaciones, sino de ecuaciones de primer grado en general (Molina et al., 2017; Pérez et al., 2019); son las llamadas “reglas del pasa”: “lo que está sumando, pasa restando”. El problema 3 es el que más errores de este tipo acumula, debidos mayoritariamente a la errónea identificación de coeficientes (especialmente, omitiendo signos).

Figura 10. Ejemplos de producciones de alumnado con errores técnicos en la manipulación algebraica

Una de las principales aportaciones de esta investigación es el concepto de solución. Uno de los ítems del problema 1 consistía en comprobar si un par de valores eran solución del sistema sin aplicar un método de resolución. Las respuestas a este ítem nos llevan a subrayar la necesidad de analizar detenidamente el concepto de solución de un sistema de ecuaciones y su significado algebraico. Además, en el problema 4 observamos esta misma dificultad, pero en relación con el significado gráfico del concepto de solución (Rodríguez Jara et al., 2019).

Otra aportación novedosa es la identificación de la desconexión del procedimiento de resolución mediante reducción con la aritmética de enteros, en concreto con la factorización y el mínimo común múltiplo (problema 2). Consideramos relevante reforzar esta conexión, pues advertirla reduce las cantidades involucradas en el proceso de resolución. No entendemos que se trate de una dificultad de origen aritmético, porque estas hacen referencia a la transición entre la aritmética y el álgebra como lenguaje de generalización de casos particulares. Más bien se trata de una falta de conexión entre bloques de contenido matemático que, a menudo, se estudian como compartimentos estancos, impidiendo que el alumnado advierta la relación entre un objeto aritmético y una posible aplicación en un método de resolución algebraico.

6. CONCLUSIONES

El trabajo realiza una descripción y una clasificación de los errores cometidos por un grupo de 20 estudiantes de segundo curso de Secundaria en España cuando resuelven problemas vinculados a sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. El uso de la clasificación de Movshovitz-Hadar et al. (1987) permite reducir el peso de los errores debidos a aprendizajes previos insuficientes que resultan de la clasificación de Radatz (1979). Los resultados son consistentes con la literatura específica de ecuaciones lineales puesto que se describen errores ya advertidos en trabajos previos relacionados con el deficiente paso de unos registros de representación a otros (concretamente, algebraica, gráfica, tabular y verbal), dificultades para el manejo de ecuaciones y un uso incorrecto de la sintaxis algebraica. Además, el trabajo identifica dificultades propias de los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, en concreto, los problemas para identificar tanto algebraica como gráficamente el concepto de solución del sistema, la falta de conexión con el campo aritmético para aplicar el método de reducción, y una tendencia marcada a mecanizar el procedimiento, intentando ajustar el coeficiente de x.

Estos resultados llevan necesariamente a decisiones sobre la acción de aula. Una aproximación predominantemente algebraica dificultará la conexión entre distintos registros. Por lo tanto, es necesario reforzar los cambios de representación. Contando con software de geometría dinámica y hojas de cálculo, resulta fácil fomentar los cambios entre la representación algebraica, la tabular y la gráfica. GeoGebra se ha demostrado útil y didácticamente idóneo para mejorar el rendimiento académico del alumnado (Hohenwarter y Jones, 2007; Lasa, 2016; Pérez y Vargas, 2019; Soots y Shafer, 2018; Zengin y Tatar, 2017). Situaciones como la modelización de problemas de balanza, pueden abordarse manipulativamente (física y virtualmente), mediante ejemplos con ecuaciones de primer grado fácilmente exportables a sistemas de ecuaciones (García et al., 2016; Rojano, 2010).

Consideramos fundamental el entrenamiento del alumnado en el paso del lenguaje algebraico al verbal, específicamente en ese sentido, buscando una situación verbal que se acomode a un objeto algebraico dado. Si bien el cambio del lenguaje verbal al algebraico suele ser abordado al comienzo de la instrucción en álgebra, a menudo se reduce a la aplicación de reglas simplificadas de traducción que automatizan los procesos con grandes riesgos de error (Proulx et al., 2009), y se olvida que el razonamiento informal se ha probado eficiente al modelar sistemas de ecuaciones (Van Reeuwijk, 2001). La mecanización de la traducción algebraica de lo verbal facilita una comprensión limitada del cambio de representación y provoca que la traducción en el sentido contrario (del algebraico al verbal) se vea limitada. El cambio de representación de lo algebraico a lo verbal permite dar sentido al álgebra (Koedinger et al., 2008; Pecharromán Gómez et al., 2019) y fomenta la creación de problemas que tengan significado y se alejen de patrones muy presentes en libros de texto, que se limitan a representar operaciones, pero sin darles sentido (Cañadas et al., 2018).

Algunas limitaciones de este trabajo derivan de la muestra (no aleatoria y con un tamaño limitado). Aunque no haya intención de generalizar los resultados, esta limitación afectó al estudio de validación del instrumento, que solo pudo realizarse mediante validación de contenido por parte del equipo investigador y la profesora titular. La principal limitación se deriva del diseño del instrumento que, como se señaló en la clasificación de errores, impide dar representatividad a los errores que no se han detectado, y aumenta el peso interpretativo de los investigadores. El trabajo futuro pasa por diseñar, sobre esta base, un instrumento que permita observar otros tipos de errores dentro de la clasificación de Movshovitz-Hadar et al. (1987).

7. AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen la colaboración de la profesora Carmen Alonso y del alumnado.

8. REFERENCIAS

Arellano, F., y Oktaç, A. (2009). Algunas dificultades que presentan los estudiantes al asociar ecuaciones lineales con su representación gráfica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 22*, 357-365.

Blanco, L.J., Cárdenas, J.A., y Caballero, A. (2015). *La resolución de problemas de Matemáticas en la formación inicial de profesores de Primaria.* Universidad de Extremadura.

Bozzalla, A.E., y García, S.A. (2014). Análisis gráfico como puerta de entrada hacia el aprendizaje de sistemas de ecuaciones lineales de 2x2. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 27*, 1031-1039.

Campos, S., y Parraguez, M. (2019). Entendendo sistemas de equaçoes lineares: um estudo de caso no contexto da escola no Chile. *Educaçao Matemática. Pesquisa, 21*(3), 347-368. https://doi.org/10.23925/1983-3156.2019vol21i3p347-368

Cañadas, M. C., Molina, M., y Del Río, A. (2018). Meanings given to algebraic symbolism in problem-posing. *Educational Studies in Mathematics, 98*(1), 19-37. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9797-9

Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García, y L. Ordoñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 75 - 94). SEIEM.

Duval, R. (1999). Representation, visual and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. En F. Hitt, y M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematic Education* (Vol. 1, pp. 3-26). ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics and Environmental Education.

Egodawatte, G. (2011). *Secondary school students' misconceptions in Algebra* (Tesis Doctoral no publicada). University of Toronto.

Engler, A., Vrancken, S., Müller, D., y Cadoche, L. (2001). Propuesta didáctica para estudiar sistemas de ecuaciones lineales. Sondeo de opiniones. *Educación Matemática, 13*(2), 127-139.

Filloy, E., Rojano, T., y Solares, A. (2003). Two meanings of the 'equal' sign and senses of and substitution methods. En N.A. Pateman, B. Dougherty, y J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, vol. 4* (pp. 223-229). University of Hawaii.

Filloy, E., Rojano, T., y Solares, A. (2010). Problems Dealing with Unknown Quantities and Two Different Levels of Representing Unknowns. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(1), 52- 80. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.41.1.0052

García Suárez, J. (2018). Determinación de fuentes de errores algebraicos a partir del empleo de técnicas de extrapolación algebraica. *Matemáticas, Educación y Sociedad, 1(*3), 1-14.

García, P.T., Díaz, J.L., y Vargas, J.R. (2016). El uso de manipulables para propiciar la comprensión del significado de ecuaciones lineales en la escuela secundaria. *EPISTEMUS, 10*(20), 55-61. https://doi.org/10.36790/epistemus.v10i20.23

Gasco-Txabarri, J. (2017). La resolución de problemas aritmético - algebraicos y las estrategias de aprendizaje en matemáticas. Un estudio en educación secundaria obligatoria (ESO). *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME, 20*(2), 167-192. https://doi.org/10.12802/relime.17.2022

González-García, A., Muñiz-Rodríguez, L., y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2018). Un estudio exploratorio sobre los errores y las dificultades del alumnado de Bachillerato respecto al concepto de derivada. *Aula abierta*, *47*(4), 449-462. https://doi.org/10.17811/rifie.47.4.2018.449-462

Götte, M., y Mantica, A. M. (2021). Categorización de errores en geometría 3D en estudiantes de nivel superior. *Epsilon*, 108, 47-44.

Hariati, A., y Septiadi, D. D. (2019). Analysis of students' mistakes in solving system of linear equation in three variables: A case on HOTS problems. *International Journal on Teaching and Learning Mathematics, 2*(1), 29-38. https://doi.org/10.18860/ijtlm.v2i1.7616

Hohenwarter, M., y Jones, K. (2007). Ways of linking geometry and algebra, the case of Geogebra. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 27*(3), 126-131.

Kieran, C. (1989). *The early learning of algebra: A structural perspective*. Erlbaum.

Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. En C. Alsina, J.M. Álvarez, B. Hodgs Laborde, y A. Pérez (Eds.), *Eighth International Congress on Mathematical Education: Sel lectures* (pp. 271-290). SAEM Thales.

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. En A. Gutiérrez, y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the Psychology of Mathematics Education: Past, present and future* (pp. 11-49). Sens. https://doi.org/10.1163/9789087901127_003

Kilpatrick, J., Rico, L., y Gómez, P. (1998). *Educación matemática. Errores y dificultades. Resolución de problemas. Evaluación. Historia.* Universidad de Los Andes.

Koedinger, K.R., Alibali, M.W., y Nathan, M.J. (2008). Trade-offs between grounded and abstract representations: Evidence from algebra problem solving. *Cognitive Science, 32*(2), 366-397. https://doi.org/10.1080/03640210701863933

Lasa, A. (2016). *Instrumentación del medio material GeoGebra e idoneidad didáctica en procesos de resolución de sistemas de ecuaciones* (Tesis Doctoral no publicada). Universidad Pública de Navarra.

Molina, M., Rodríguez-Domingo, S., Cañadas, M.C., y Castro, E. (2017). Secondary school students' errors in the translation of algebraic statements. *International Journal of Science and Mathematics Education, 15*(6), 1137-1156. http://dx.doi.org/10.1007/s10763-016-9739-5

Movshovitz-Hadar, N., Zaslavsky, O., e Inbar, S. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 18*(1), 3-14. http://dx.doi.org/10.2307/749532

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics.* NCTM.

Oktaç, A., y Trigueros, M. (2010). ¿Cómo se aprenden los conceptos de álgebra lineal? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(4-II), 373-385.

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (2017). *Marco de Evaluación y de Análisis de PISA para el Desarrollo: Lectura, matemáticas y ciencias.* OECD Publishing.

Panizza, M., Sadovsky, P., y Sessa, C. (1999). La ecuación lineal con dos variables: entre la unicidad y el infinito. *Enseñanza de las Ciencias, 17*(3), 453-61.

Pecharromán Gómez, C., Arce Sánchez, M. y Conejo Garrote, L. (2019). Estrategias y errores de conversión entre representaciones de intervalos de la recta real. *Enseñanza de las Ciencias, 37*(3), 169-187. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2602

Pérez, E.G., y Vargas, V. (2019). Secuencia didáctica para el aprendizaje de sistemas de ecuaciones lineales con GeoGebra. *Revista electrónica AMIUTEM, VII* (2), 88-97.

Pérez, M., Diego, J.M., Polo, I., y González, M. J. (2019). Causas de los errores en la resolución de ecuaciones lineales con una incógnita. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática, 13*(2), 84-103. https://doi.org/10.30827/pna.v13i2.7613

Proulx, J., Beisiegel, M., Miranda, H., y Simmt, E. (2009). Rethinking the teaching of systems of equations. *The Mathematics Teacher, 102*(7), 526-535.

Radatz, H. (1979). Error analysis in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 10*(3), 163-172. https://doi.org/10.2307/748804

Ramírez, M.P., Oktaç, A., y García, C. (2005). Dificultades que presentan los estudiantes en los modos geométrico y analítico de sistemas de ecuaciones lineales. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 19,* 413-418.

Rico, L. (1992). *Investigaciones sobre errores de aprendizaje en educación matemática*. Universidad de Granada.

Rodríguez Jara, M.A., Mena Lorca, A., Mena Lorca, J., Vásquez Saldias, P., y Del Valle Leo, M. E. (2019). Construcción cognitiva del conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. *Enseñanza de las Ciencias, 37*(1), 71-92. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2194

Rodríguez-Muñiz, L. J., y Candás, P. (2017). Análisis de los errores cometidos al resolver un límite en exámenes de PAU. En *Libro de Actas VIII CIBEM, Vol. 4* (pp. 309–317). FESPM.

Rojano, T. (2010). Modelación concreta en álgebra. Balanza virtual, ecuaciones y sistemas matemáticos de signos. *Números*. *Revista de Didáctica de las Matemáticas, 75*, 5-20.

Schoenfeld, A.H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. En D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). MacMillan. https://doi.org/10.1177/002205741619600202

Segura, S.M. (2004). Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 7*(1), 49-78.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Horsori.

Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. En M. Camacho, P. Flores y P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 19-52). SEIEM.

Soots, K.L., y Shafer, K.G. (2018). Engaging Students with Linear Functions and GeoGebra: An Action Research Study. *North American GeoGebra Journal, 7*(1), 53-70.

Van Reeuwijk, M. (2001). From informal to formal, progressive formalization: An example on solving systems of equations. En H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, y J. Vincent (Eds.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra, Proceedings of the 12th ICMI Study Conference* (Vol. 2, 613-620). The University of Melbourne.

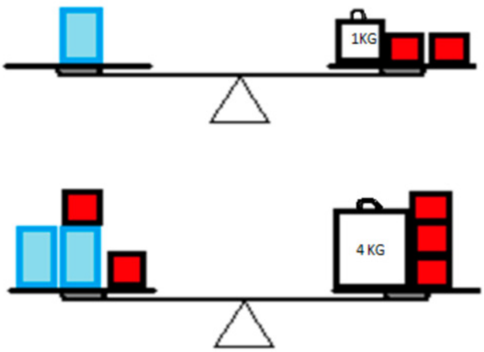
Wagner, S., y Parker, S. (1999). Advancing algebra. En B. Moses (Ed.), *Algebraic Thinking, Grades K-12* (pp. 328-340), NCTM.

Widada, W., Herawaty, D., Rahman, M.H., Yustika, D., Gusvarini, P. y Anggoro, A. F. (2020). Overcoming the difficulty of understanding systems of linear equations through learning ethnomathematics. *JPhCS, 1470*(1), 012074. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1470/1/012074

Zengin, Y., y Tatar, E. (2017). Integrating Dynamic Mathematics Software into Cooperative Learning Environments in Mathematics. *Educational Technology & Society, 20*(2), 74-88.

9. ANEXO I. INSTRUMENTO

1. Calcula el peso de un brik de leche (figura azul grande) y de un tarro de salsa de tomate (figura roja pequeña).



- Identifica las incógnitas:
  x = peso en Kg de............
  y = peso en Kg de............
- Fijándote en la primera balanza, construye una ecuación lineal con las dos incógnitas seleccionadas anteriormente. Ten en cuenta que la balanza está equilibrada, así que lo que hay a un lado pesa lo mismo que lo que hay al otro lado.
- Fijándote en la segunda balanza, construye una ecuación lineal con las dos incógnitas seleccionadas anteriormente. Ten en cuenta que la balanza está equilibrada, así que lo que hay a un lado pesa lo mismo que lo que hay al otro lado.
- Construye un sistema con las dos ecuaciones anteriores. Realiza, además, las transformaciones necesarias para dejarlo en la forma

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

  donde *a, b, c, a', b'* y *c'* sean números.
- Sin resolver, selecciona cuál de las siguientes opciones es la solución del sistema.

(a) $x = \frac{7}{5}Kg, \quad y = \frac{1}{5}Kg$ (b) $x = \frac{7}{3}Kg, \quad y = \frac{2}{3}Kg$

2. Resuelve el siguiente sistema utilizando el método de reducción completando previamente la tabla.

$$\begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ 6x + 6y = 30 \end{cases}$$

Incógnita	**Coef. de la incógnita 1ª ecuación**	**Coef. de la incógnita 2ª ecuación**	**Nº por el que vas a multiplicar la 1ª ecuación**	**Nº por el que vas a multiplicar la 2ª ecuación**
x	3	6		

¿Cómo afectaría a la resolución del sistema que el coeficiente de x en la primera ecuación fuera 8 en vez de 3?, ¿y si fuera 9?, ¿y si fuera 12? ¿Detectas algún patrón?

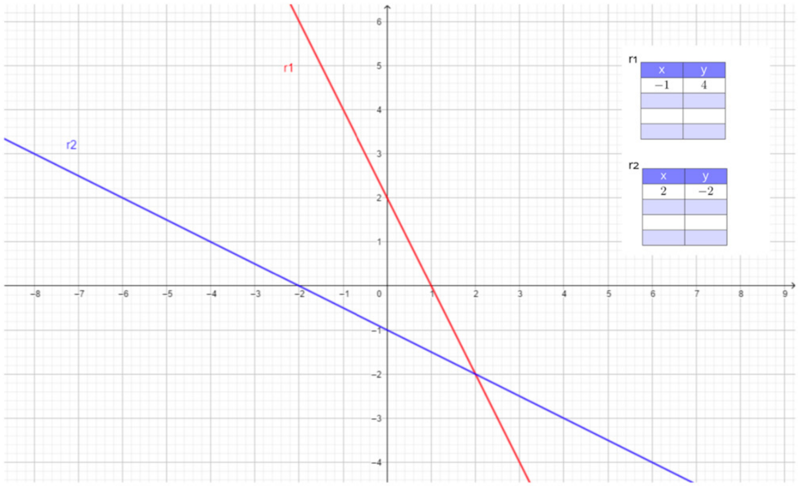
3. Completa la tabla con los siguientes sistemas de ecuaciones SIN RESOLVERLOS.

$$\begin{cases} 3x + 7y = -1 \\ 5x - 13y = 29 \end{cases} \quad 2)\begin{cases} 4x - 11y = -17 \\ 7x - 9y = 5 \end{cases}$$

$$3)\begin{cases} ax + by = 5 \\ x - 1y = 9 \end{cases} \quad 4)\begin{cases} 2x + by = 0 \\ dx - 4y = 9 \end{cases} \quad 5)\begin{cases} ax + by = 3 \\ dx + fy = 8 \end{cases}$$

Sistema	**Incógnita**	**Coef. de la incógnita 1ª ecuación**	**Coef de la incógnita 2ª ecuación**	**Nº por el que vas a multiplicar la 1ª ecuación**	**Nº por el que vas a multiplicar la 2ª ecuación**
1)	x				
2)	x				
3)	y				
4)	x				
5)	y				

4. A partir de la siguiente gráfica, completa las tablas con los puntos de las rectas r1 y r2.



Determina a qué sistema de ecuaciones corresponde la gráfica (ninguno de los sistemas es equivalente a otro).

$$\text{(a)} \begin{cases} r1 \equiv 4x + y = 0 \\ r2 \equiv -x - y = -3 \end{cases}$$

$$\text{(b)} \begin{cases} r1 \equiv y = \frac{x-1}{3} \\ r2 \equiv y = 2x + 3 \end{cases}$$

Indica qué has hecho para responder la pregunta anterior……….

5. Resuelve por el método de reducción el siguiente sistema de ecuaciones y represéntalo gráficamente:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ -3x - y = -5 \end{cases}$$

6. Diseña un enunciado para el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 3y = 140 \\ 2x + 2y = 160 \end{cases}$$