Cuadrados mágicos aditivos y multiplicativos de orden 4

Luis Barrios Calmaestra
I.E.S. José de Mora. Baza. Granada

Resumen: *En este artículo se describen procedimientos para la construcción de cuadrados mágicos aditivos de orden cuatro y, a partir de ellos, se explica la forma de construir cuadrados mágicos multiplicativos de orden cuatro con todas las propiedades de los cuadrados aditivos. También se describe la construcción de cuadrados mágicos aditivos y multiplicativos utilizando cuadrados latinos.*
Palabras clave: *cuadrado mágico aditivo, cuadrado mágico multiplicativo, cuadrado latino, divisores de un número.*

Additive and multiplicative magic squares of order 4

Abstract: *This article describes procedures for the construction of additive magic squares of order four and, from them, it is explained how to construct multiplicative magic squares of order four with all the properties of additive squares. It is also described the construction of additive and multiplicative magic squares using latin squares.*
Keywords: *additive magic square, multiplicative magic square, latin square, divisors of a number.*

1. INTRODUCCIÓN

En el artículo de Barrios (2021) se ha descrito la forma de construir infinitos cuadrados mágicos multiplicativos de orden 3, 4 y 5 utilizando todos los divisores de números de la forma $N=p^n \cdot q^n$, siendo p y q números primos. Los cuadrados de orden cuatro se construyeron formando un cuadrado de 4x4 con parejas de números (*m,n*), tomando ambas coordenadas los valores 0, 1, 2 y 3, de forma que, en cada fila, en cada columna y, en las dos diagonales, no se repitiera ni la primera ni la segunda coordenada. Ambas coordenadas se utilizaron para los exponentes de los números primos p y q.

En este artículo se describen, en primer lugar, procedimientos para la construcción de cuadrados mágicos aditivos de orden 4, intercambiando los números de filas, columnas o diagonales, o también sumando cuadrados latinos. Los cuadrados mágicos de orden 4 más conocidos se pueden obtener por algunos de estos métodos.

En segundo lugar, se describen procedimientos para la construcción de cuadrados mágicos multiplicativos de orden 4 utilizando todos los divisores de los números que tienen 16 divisores. Además de los números cuya factorización es de la forma $p^3 \cdot q^3$, con p y q números primos, existen más números con 16 divisores. A partir de los cuadrados mágicos aditivos, se pueden obtener cuadrados mágicos multiplicativos con las mismas características.

Por último, se explica la obtención de cuadrados mágicos multiplicativos de orden 4 utilizando cuadrados latinos.

2. CUADRADOS MÁGICOS ADITIVOS

Partiendo del cuadrado con los dieciséis primeros números naturales ordenados por filas, se pueden construir distintos cuadrados mágicos aditivos, de orden 4 y de constante mágica 34, intercambiando las posiciones de algunos números (S. D).

Por ejemplo, invirtiendo los números de las dos diagonales:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

El cuadrado mágico de Albert Durero se obtiene, a partir del anterior, intercambiando las dos columnas centrales (Barrios, 2020a):

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Además de las propiedades que debe tener un cuadrado para considerarse mágico, también suman 34, distintos grupos de cuatro números, entre ellos:

- Los números situados en los cuatro cuadrados centrales.
- Los números situados en las cuatro esquinas.
- Los números centrales de las primera y última filas.
- Los números centrales de las primera y última columnas.

Épsilon, 2022, nº 110, 91-103, ISSN: 2340-714X

- Los números de los cuatro cuadrados que resultan al dividir por la mitad horizontal y verticalmente.
- Las esquinas de los cuadrados de 3x3 que se pueden formar.

3. SUMA DE CUADRADOS LATINOS

Un cuadrado latino de orden n es un cuadrado de n filas y n columnas en las que se colocan n números, de forma cada número aparece n veces y que en cada fila y en cada columna aparecen los n números una sola vez. No se exige esta condición para las diagonales.

Otro procedimiento para construir cuadrados mágicos aditivos de orden 4, con los dieciséis primeros números naturales, es el siguiente.

Se expresan los números del 1 al 16 como las siguientes sumas:

$1 = 0 + 1$	$2 = 0 + 2$	$3 = 0 + 3$	$4 = 0 + 4$
$5 = 4 + 1$	$6 = 4 + 2$	$7 = 4 + 3$	$8 = 4 + 4$
$9 = 8 + 1$	$10 = 8 + 2$	$11 = 8 + 3$	$12 = 8 + 4$
$13 = 12 + 1$	$14 = 12 + 2$	$15 = 12 + 3$	$16 = 12 + 4$

En el primer sumando aparecen los números 0, 4, 8 y 12. En el segundo, los números 1, 2, 3 y 4.

Se construyen ahora dos cuadrados de cuatro filas y cuatro columnas con los dos conjuntos de números, de forma que, en cada fila, en cada columna y en las dos diagonales principales no se repita ningún número. Sumando los números de las casillas que ocupan la misma posición en ambos cuadrados se obtienen un cuadrado mágico aditivo. Hay que evitar la repetición de números en el cuadrado final.

El cuadrado mágico conocido como Chautisa Yantra, se obtiene como suma de los números de los cuadrados (Barrios, 2020b):

4	8	0	12
0	12	4	8
12	0	8	4
8	4	12	0

+

3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1
1	2	3	4

=

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

Este cuadrado tiene todas las propiedades del cuadrado de Durero y, además:

- los números situados en todos los cuadrados de 2x2 de filas y columnas consecutivas también suman 34.
- los tres números situados en las diagonales secundarias junto con el número situado en la esquina opuesta también suman 34.

Un cuadrado mágico con la propiedad anterior se dice que es un cuadrado mágico pandiagonal.

También es posible obtener un cuadrado mágico repitiendo números en filas o columnas en los dos cuadrados que se suman. Por ejemplo, el cuadrado mágico de Alberto Durero se obtiene de la siguiente forma:

12	0	0	12
4	8	8	4
8	4	4	8
0	12	12	0

+

4	3	2	1
1	2	3	4
1	2	3	4
4	3	2	1

=

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

4. CUADRADOS MÁGICOS MULTIPLICATIVOS

Un cuadrado mágico multiplicativo de orden 4, no se puede construir con los dieciséis primeros números naturales. En el artículo "Barrios, L., 2021" se ha tratado la construcción de cuadrados mágicos multiplicativos con todos los divisores de los números de la forma $N=p^3q^3$, que tienen exactamente 16 divisores.

Pero existen más números con 16 divisores. Al expresar 16, como producto de números naturales, de todas las formas posibles, se tiene:

$$16 = 16\cdot 1 = 8\cdot 2 = 4\cdot 4 = 4\cdot 2\cdot 2 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2$$

Entonces, tienen exactamente 16 divisores los números cuya factorización es de la forma:

- $N=p^{15}$, siendo p primo. Número de divisores: $15+1=16$.
- $N=p^7\cdot q$, siendo p y q números primos. Número de divisores: $8\cdot 2=16$.
- $N=p^3\cdot q^3$, siendo p y q números primos. Número de divisores: $4\cdot 4=16$.
- $N=p^3\cdot q\cdot r$, siendo p, q y r números primos. Número de divisores: $4\cdot 2\cdot 2=16$.
- $N=p\cdot q\cdot r\cdot t$, siendo p, q, r y t números primos. Número de divisores: $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=16$.

Los procedimientos que se describen a continuación para la construcción de cuadrados mágicos multiplicativos son válidos también para números que puedan expresarse de estas formas con factores no primos, aunque para estos números los cuadrados construidos solo contienen parte de sus divisores y no todos, como sucede cuando los factores son primos.

Al realizar giros o simetrías en cada uno de los cuadrados se obtiene otro cuadrado mágico con las mismas características.

5. DIVISORES DE N=p^{15}. CONSTANTE MÁGICA: p^{30}

Si p es un número primo, el número p^{15} tiene 15+1=16 divisores:

$$\mathrm{div}(p^{15}) = \{1, p, p^2, p^3, p^4, p^5, p^6, p^7, p^8, p^9, p^{10}, p^{11}, p^{12}, p^{13}, p^{14}, p^{15}\}$$

El producto de todos los divisores es p^{120}. La constante mágica es la raíz cuarta de este producto p^{30}.

Si se escoge cualquier cuadrado mágico aditivo, por ejemplo, el cuadrado Chautisa Yantra, y se sustituye el número de cada casilla por una potencia de p, con dicho número menos una unidad como exponente, se obtiene un cuadrado mágico multiplicativo con las mismas características que el cuadrado mágico aditivo y con constante mágica: p^{30}.

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

→

p^6	p^{11}	1	p^{13}
p	p^{12}	p^7	p^{10}
p^{15}	p^2	p^9	p^4
p^8	p^5	p^{14}	p^3

Ejemplo para p=2. Constante mágica: 2^{30}.

2^6	2^{11}	1	2^{13}
2	2^{12}	2^7	2^{10}
2^{15}	2^2	2^9	2^4
2^8	2^5	2^{14}	2^3

6. DIVISORES DE N=$p^7 \cdot q$. CONSTANTE MÁGICA: $p^{14} \cdot q^2$

Si p y q son dos números primos, el número p^7q tiene $(7+1)\cdot(1+1)=16$ divisores:

$$\mathrm{div}(p^7q) = \{1, p, p^2, p^3, p^4, p^5, p^6, p^7, q, pq, p^2q, p^3q, p^4q, p^5q, p^6q, p^7q\}$$

El producto de todos los divisores es $p^{56}\cdot q^8$. La constante mágica es la raíz cuarta de este producto, $p^{14}\cdot q^2$.

Se pueden distribuir los 16 divisores en un cuadrado, situando los números de la primera fila y la primera columna y, en las casillas restantes, el producto del primer elemento de la fila por el primer elemento de la columna.

1	q	p	pq
p^2	p^2q	p^3	p^3q
p^4	p^4q	p^5	p^5q
p^6	p^6q	p^7	p^7q

Si se escoge cualquier cuadrado mágico aditivo, por ejemplo, el cuadrado Chautisa Yantra, y se sustituye el número de cada casilla por el número que ocupa esa casilla en el cuadrado con los divisores, se obtiene un cuadrado mágico multiplicativo con las mismas características que el cuadrado mágico aditivo y con constante mágica: $p^{14}\cdot q^2$.

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

$\rightarrow$

p^3	p^5q	1	p^6q
q	p^6	p^3q	p^5
p^7q	p	p^4q	p^2
p^4	p^2q	p^7	pq

Ejemplo para p=2 y q=3. Constante mágica: $2^{14}\cdot 3^2=147456$.

8	96	1	192
3	64	24	32
384	2	48	4
16	12	128	6

7. DIVISORES DE $N=p^3\cdot q^3$. CONSTANTE MÁGICA: $p^6\cdot q^6$

Si p y q son dos números primos, el número p^3q^3 tiene $(3+1)\cdot(3+1)=16$ divisores:

$$\mathrm{div}(p^3q^3) = \{1, p, q, pq, p^2, q^2, pq^2, p^2q, p^2q^2, p^3, q^3, pq^3, p^3q, p^2q^3, p^3q^2, p^3q^3\}$$

El producto de todos los divisores es $p^{24}\cdot q^{24}$. La constante mágica es la raíz cuarta de este producto, $p^6\cdot q^6$.

Se pueden distribuir los 16 divisores en un cuadrado, situando los números de la primera fila y la primera columna y, en las casillas restantes, el producto del primer elemento de la fila por el primer elemento de la columna.

1	p	q	pq
p^2	p^3	p^2q	p^3q
q^2	pq^2	q^3	pq^3
p^2q^2	p^3q^2	p^2q^3	p^3q^3

Si se escoge cualquier cuadrado mágico aditivo, por ejemplo, el cuadrado Chautisa Yantra, y se sustituye el número de cada casilla por el número que ocupa esa casilla en el cuadrado con los divisores, se obtiene un cuadrado multiplicativo con las mismas características que el cuadrado mágico aditivo y con constante mágica: $p^6 \cdot q^6$.

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

→

p^2q	pq^3	1	p^3q^2
p	p^2q^2	p^3q	q^3
p^3q^3	q	pq^2	p^2
q^2	p^3	p^2q^3	pq

Ejemplo para p=2 y q=3. Constante mágica: $2^6 \cdot 3^6=46656$.

12	54	1	72
2	36	24	27
216	3	18	4
9	8	108	6

8. DIVISORES DE $N=p^3 \cdot q \cdot r$. CONSTANTE MÁGICA: $p^6 \cdot q^2 \cdot r^2$

Si p, q y r son tres números primos, el número p^3qr tiene $(3+1)\cdot(2+1)\cdot(2+1)=16$ divisores:

$$\text{div}(p^3q^3) = \{1, p, q, r, pq, pr, qr, pqr, p^2, p^2q, p^2r, p^2qr, p^3, p^3q, p^3r, p^3qr\}$$

El producto de todos los divisores es $p^{24} \cdot q^8 \cdot r^8$. La constante mágica es la raíz cuarta de este producto, $p^6 \cdot q^2 \cdot r^2$.

Se pueden distribuir los 16 divisores en un cuadrado, situando los números de la primera fila y la primera columna y, en las casillas restantes, el producto del primer elemento de la fila por el primer elemento de la columna.

1	q	r	qr
p	pq	pr	pqr
p^2	p^2q	p^2r	p^2qr
p^3	p^3q	p^3r	p^3qr

Si se escoge cualquier cuadrado mágico aditivo, por ejemplo, el cuadrado Chautisa Yantra, y se sustituye el número de cada casilla por el número que ocupa esa casilla en el cuadrado con los divisores, se obtiene un cuadrado mágico multiplicativo con las mismas características que el cuadrado mágico aditivo y con constante mágica: $p^6 \cdot q^2 \cdot r^2$.

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

→

pr	p^2qr	1	p^3q
q	p^3	pqr	p^2r
p^3qr	r	p^2q	p
p^2	pq	p^3r	qr

Ejemplo para p=2, q=3 y r=5. Constante mágica: $2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^2=14400$.

10	60	1	24
3	8	30	20
120	5	12	2
4	6	40	15

9. DIVISORES DE N=p·q·r·t. CONSTANTE MÁGICA: $p^2 \cdot q^2 \cdot r^2 \cdot t^2$

Si p, q, r y t son cuatro números primos, el número pqrt tiene (1+1)·(1+1)·(1+1)·(1+1)=16 divisores:

$$\mathrm{div}(pqrt) = \{1, p, q, r, t, pq, pr, pt, qr, qt, rt, pqr, pqt, prt, qrt, pqrt\}$$

El producto de todos los divisores es $p^8 \cdot q^8 \cdot r^8 \cdot t^8$. La constante mágica es la raíz cuarta de este producto, $p^2 \cdot q^2 \cdot r^2 \cdot t^2$.

Se pueden distribuir los 16 divisores en un cuadrado, situando los números de la primera fila y columna y, en las casillas restantes, el producto del primer elemento de la fila por el primer elemento de la columna.

1	r	t	rt
p	pr	pt	prt
q	qr	qt	qrt
pq	pqr	pqt	pqrt

Si se escoge cualquier cuadrado mágico aditivo, por ejemplo, el cuadrado Chautisa Yantra (Barrios, 2020b), y se sustituye el número de cada casilla por el número que ocupa esa casilla en el cuadrado con los divisores, se obtiene un cuadrado mágico multiplicativo con las mismas características que el cuadrado mágico aditivo y con constante mágica: $p^2 \cdot q^2 \cdot r^2 \cdot t^2$.

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

→

pt	qrt	1	pqr
r	pq	prt	qt
pqrt	t	qr	p
q	pr	pqt	rt

Ejemplo para p=2, q=3, r=5, t=7. Constante mágica: $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 = 44100$.

14	105	1	30
5	6	70	21
210	7	15	2
3	10	42	35

10. PRODUCTO DE CUADRADOS LATINOS

Un procedimiento descrito para la construcción de cuadrado mágicos aditivos ha sido a partir de dos cuadrados latinos. También este método se puede utilizar para la construcción de cuadrados mágicos multiplicativos.

Se construyen ahora dos cuadrados latinos de cuatro filas y cuatro columnas con dos conjuntos de números, de forma que, en cada fila, en cada columna y en las dos diagonales principales no se repita ningún número. Multiplicando los números de las casillas que ocupan la misma posición en ambos cuadrados se obtienen un cuadrado mágico multiplicativo. Hay que evitar la repetición de números en el cuadrado final.

Ejemplo. Si se construye un cuadrado latino con los números 1, 2, 3 y 4 y otro con los números 1, 5, 6 y 7, se obtiene uno de los cuadrados mágicos multiplicativos de menor constante mágica que se puede construir, 5040=7! Se pueden construir varios cuadrados mágicos multiplicativos con estos cuadrados latinos. Los cuadrados mágicos obtenidos con estos números no son pandiagonales.

1	2	3	4
3	4	1	2
4	3	2	1
2	1	4	3

x

1	5	6	7
7	6	5	1
5	1	7	6
6	7	1	5

=

1	10	18	28
21	24	5	2
20	3	14	6
12	7	4	15

La constante mágica más pequeña para un cuadrado mágico multiplicativo pandiagonal es $14400=2^6\cdot3^2\cdot5^2$. Este cuadrado mágico multiplicativo fue publicado por Harry A. Sayles (1913). Se obtiene con los divisores de $N=p^3\cdot q\cdot r$, con $p=2$, $q=3$ y $r=5$, $(120=2^3\cdot3\cdot5)$.

1	8	2	4
2	4	1	8
4	2	8	1
8	1	4	2

x

1	3	5	15
15	5	3	1
3	1	15	5
5	15	1	3

=

1	24	10	60
30	20	3	8
12	2	120	5
40	15	4	6

Igual que éste, todos los cuadrados mágicos multiplicativos obtenidos anteriormente con los números que tienen dieciséis divisores se pueden obtener multiplicando los números de dos cuadrados latinos.

Ejemplo. Uno de los cuadrados mágicos multiplicativos que se pueden obtener con los divisores de $N=p^3\cdot q^3$, con $p=2$ y $q=3$, se puede obtener también con los dos cuadrados latinos siguientes. En este caso se repiten números en las diagonales de los cuadrados latinos.

4	2	1	8
2	4	8	1
8	1	2	4
1	8	4	2

x

3	27	1	9
1	9	3	27
27	3	9	1
9	1	27	3

=

12	54	1	72
2	36	24	27
216	3	18	4
9	8	108	6

11. PROPUESTA DE UTILIZACIÓN EN EL AULA

La utilización de actividades de Matemáticas Recreativas en nuestras clases nos permite captar la atención de nuestro alumnado, utilizar estrategias de resolución de problemas y hacer pensar y reflexionar sobre los procedimientos de resolución utilizados y los resultados obtenidos.

Si además estas actividades tienen relación con los contenidos académicos que estemos trabajando en ese momento, nos ayudarán a reforzarlos y a que el alumnado vea utilidad y se sienta más interesado por lo que está estudiando.

Los cuadrados mágicos, tanto aditivos como multiplicativos, despiertan esta curiosidad en el alumnado. Las coincidencias en las sumas o en los productos de filas, columnas y diagonales que tiene un pequeño conjunto de números dispuestos en filas y columnas le dan esa imagen de mágicos que indica su nombre.

Los cursos apropiados para realizar esta actividad pueden ser segundo y tercero de E.S.O. Los contenidos del currículo relacionados son divisibilidad, potencias, raíces, giros, simetrías y valor numérico de una expresión algebraica.

La actividad se puede plantear intentado que, dirigidos por el profesor, sean los alumnos quienes vayan realizando los pasos necesarios para la construcción de los cuadrados mágicos.

Empezando por los cuadrados mágicos aditivos.

1. Construye un cuadrado de cuatro filas y cuatro columnas con los dieciséis primeros números naturales. Intenta construir un cuadrado mágico aditivo intercambiando números.
2. Construye dos cuadrados latinos con cuatro números. Suma los números que ocupan el mismo lugar en cada uno para obtener un cuadrado mágico, procurando que sean números distintos. Investiga todas las propiedades que puede tener.

Y continuando con los cuadrados mágicos multiplicativos.

3. Sabiendo que el número de divisores de un número se obtiene multiplicando los exponentes más una unidad de todos los factores primos que aparecen en su descomposición en factores primos, ¿cómo debe ser la factorización de un número para que tenga exactamente dieciséis divisores?
4. Calcula en cada uno de los casos encontrados en la actividad anterior, el número más pequeño posible con esa factorización y sus dieciséis divisores.
5. Después de calcular los números y todos sus divisores, para construir el cuadrado mágico se necesita calcular la constante mágica. Se pueden pedir a los alumnos ideas para su cálculo. Una vez descubierta la forma de calcularla, vamos a hacerlo de forma generalizada. Se multiplican todos los divisores aplicando el producto de potencias con la misma base. Ahora hay que calcular la raíz cuarta para conocer el producto de los elementos de cada línea, que también se puede deducir aplicando propiedades de las potencias.
6. A continuación, con las indicaciones del profesor, se construye el cuadrado mágico multiplicativo, siguiendo los procedimientos descritos en el artículo.
7. Vamos a realizar la comprobación de que los cuadrados numéricos construidos verifican las propiedades de un cuadrado mágico multiplicativo y estudiar también el resto de las propiedades que encierra el cuadrado obtenido.
8. Construye dos cuadrados latinos con cuatro números. Multiplica los números que ocupan el mismo lugar en cada uno para obtener un cuadrado mágico multiplicativo, procurando que sean números distintos. Investiga todas las propiedades que puede tener.

9. En cada uno de los cuadrados construidos en este artículo se indica que al realizar giros o simetrías en el cuadrado se obtiene otro cuadrado mágico con las mismas características. Se puede proponer también al alumnado que realice giros de 90º, 180º y 270º o simetrías respecto de los ejes de simetría de un cuadrado y que obtenga los cuadrados resultantes. Sin hacer cálculos, deducir si el nuevo cuadrado también es un cuadrado mágico multiplicativo.

10. Para finalizar, como se pueden construir infinitos cuadrados mágicos multiplicativos, vamos a repartir entre nuestro alumnado cuadrados mágicos. Les proponemos que elijan uno de los procedimientos, los números primos necesarios y que construyan con ellos un cuadrado de orden 4, sustituyendo en la expresión general de los cuadrados los valores de p, q, r y t por los primos elegidos. Pueden hacer algunas comprobaciones para asegurarse de que han obtenido cuadrados mágicos multiplicativos.

12. CONCLUSIÓN

Algo tan sorprendente como los cuadrados mágicos aditivos o multiplicativos, en especial los de orden cuatro, debido a la cantidad de agrupaciones de cuatro números cuya suma o producto coincide con la constante mágica, puede hacer pensar al que los conoce con poca profundidad, en la existencia de un número muy reducido de estos objetos matemáticos. Sin embargo, en este artículo se estudian distintos procedimientos para su construcción y, en cada uno de los casos estudiados, existen infinitos cuadrados mágicos, con las propiedades exigidas para tener esa denominación y con otras propiedades que los hacen más interesantes todavía.

Los cuadrados mágicos aditivos se pueden construir con números naturales consecutivos. Los cuadrados mágicos multiplicativos no se pueden construir así, pero sí se pueden construir utilizando todos los divisores de los números cuyo número de divisores es un número cuadrado perfecto. En el caso de los de orden cuatro, con dieciséis divisores. En este artículo se ha comprobado que, a partir de cualquier cuadrado mágico aditivo de orden cuatro, se pueden construir infinitos cuadrados mágicos multiplicativos, con las mismas propiedades que los cuadrados aditivos.

Y todos los procedimientos descritos para la construcción de cuadrados mágicos aditivos y multiplicativos son perfectamente comprensibles para nuestros alumnos, pues utilizan conocimientos estudiados en los cursos de Educación Secundaria Obligatoria. Esto supone que, además de darles a conocer estos objetos matemáticos, pueden participar en su construcción, haciéndoles aumentar el interés y la admiración por ellos.

13. REFERENCIAS

Barrios, L. (2020a). Cuadrado mágico de Durero. Adición matemática. https://blogsaverroes.juntadeandalucia.es/recursosdematematicas/cuadrado-magico-de-alberto-durero/

Barrios, L. (2020b). Chautisa Yantra. https://blogsaverroes.juntadeandalucia.es/recursosdematematicas/chautisa-yantra/

Barrios, L. (2021). Construcción de infinitos cuadrados mágicos multiplicativos. *Épsilon, 109,* 75-91.

Sayles, H. (1913). Geometric Magic Squares and Cubes. *The Monist 23*(4):631-640.

S.D. (S. D.). The smallest possible multiplicative magic squares. http://www.multimagie.com/English/Multiplicative.htm