

Enfoque alternativo a la resolución de ecuaciones diferenciales con retardo

Gabriel Pérez Lance
Universidad del CEMA

Resumen: *En gran número de problemas cuando se pretende realizar un análisis dinámico, surge la necesidad de resolver ecuaciones diferenciales. En los sistemas reales, muchas veces las variables que se consideran impactan sobre otras variables, pero no lo hacen de manera instantánea, sino que existe un retardo. Esto puede deberse al tiempo de demora que posee un dispositivo, o bien, en un contexto de mercados, podría ser el tiempo de reacción de los agentes. Así, la relación entre causa y efecto no es inmediata y por eso, el modelo ahora contendrá a la función y a su derivada evaluadas en diferentes momentos.*

Palabras clave: *retardo; ecuaciones diferenciales; función historia; tiempo; demora.*

An alternative approach on time-delay differential equations

Abstract : *It is the case that, across multiple sciences that use mathematical modeling, when trying to perform dynamical analysis, the need to solve differential equations often arises. In real systems, many times the variables that are considered have an impact on other variables. Motivation arises from the need to describe time-delayed phenomena that can be found for instance in electronic or mechanical devices or even in the market context by modeling the reaction time of the agents involved. In this way, differential equations will also have to involve some extra parameter to take this delay into account.*

Keywords: *time delay; differential; equations; history function; delay.*

1. INTRODUCCIÓN

Desde el siglo XVII Isaac Newton (1643-1727) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), analizaron el problema que consiste en encontrar una curva caracterizada por una propiedad dada por sus tangentes. A partir de ese momento —o incluso antes—, las ecuaciones diferenciales han comenzado a ser parte del foco de atención de grandes

matemáticos y físicos. Newton demostró que el problema de las tangentes tenía solución. A este trabajo se sumaron Gottfried Wilhelm Leibniz, Jacob Bernoulli (1654-1705) y Johann Bernoulli (1667-1748). Luego, matemáticos como Jacopo Riccati (1676-1754), Daniel Bernoulli (1700-1782) y Leonhard Euler (1707-1783), estudiaron las ecuaciones diferenciales de orden superior. A ellos le siguieron Joseph Louis Lagrange (1736-1813) y Jean le Rond D'Alembert (1717-1783). En 1776, Lagrange desarrolla el método de variación de parámetros. Durante el siglo XIX Rudolf Lipschitz (1832-1903), demuestra la existencia y unicidad de ciertas ecuaciones diferenciales; continuando con ese trabajo Augustin Louis Cauchy (1789-1857). También hacen su aporte Jules Henri Poincaré (1854-1912), en su estudio sobre Mecánica Celeste y Aleksandr Liapunov (1857-1918) con sus trabajos acerca del problema general de la estabilidad de los movimientos. Así, se han estudiado y desarrollado métodos cerrados y métodos numéricos para resolver diversos tipos de ecuaciones diferenciales.

En las ecuaciones diferenciales, las funciones y sus derivadas están evaluadas en el mismo momento "t". Esto, en los problemas reales, no necesariamente tiene porqué ser así, es decir, los eventos, debido a su tiempo de ocurrencia, implican retardos y entonces puede ocurrir que la función y su derivada deban ser evaluadas en momentos distintos. Esta problemática da lugar a las ecuaciones diferenciales con retardo (EDR) y ha sido tratada, por ejemplo, por Liz Marzán (2006), en su trabajo acerca de ecuaciones diferenciales con retraso, dinámica de poblaciones y números primos. También en los estudios de Bel (2014), en relación con las soluciones oscilatorias en ecuaciones diferenciales con retardo. Otro ejemplo de las aplicaciones de las EDR es mostrado por Amster (2017) en la ecuación de Malthus con retardo, al estudiar modelos de crecimiento. El estudio de las EDR representa un paso más allá de las ecuaciones diferenciales y entrañan un notable comportamiento y marcada complejidad, pero son necesarias para modelizar adecuadamente ciertos fenómenos.

2. CONCEPTOS PRELIMINARES

Considerando un escenario en que no existiera un *delay*, entonces escribiríamos, por ejemplo:

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(t, x(t)) \quad (1)$$

Pero si se tratara de un modelo donde se quisiera incorporar la existencia de retardos, entonces se debería escribir

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(t, x(t - \tau)) \quad (2)$$

donde estamos reflejando que la derivada en determinado momento depende de la variable en cierto momento anterior.

Se podría entonces pensar en un enfoque más abarcativo y plantear el caso de un sistema descrito por

$$G(x'(t), x'(t - \tau), x(t), x(t - \tau)) = 0 \quad (3)$$

O incluso podría tener diferentes retardos, o ser cada uno de ellos una función de t , y además podría ser de orden n :

$$G[x^{(n)}(t), \dots, x''(t), x'(t), x(t), x^{(n)}(t - \tau_n(t)), \dots, x''(t - \tau_2(t)), x'(t - \tau_1(t)), x(t - \tau_0(t))] = 0 \quad (4)$$

La ecuación anterior podría ser escalar, pero en un caso más general aún, podría ser de tipo matricial o vectorial, en cuyo caso tendríamos un sistema de ecuaciones diferenciales con retardo, que describirían el problema en cuestión.

3. CONSIDERACIONES SOBRE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES CON RETARDO

Sea la ecuación diferencial con retardo (EDR)

$$x'(t) = ax(t) + bx(t - \tau) \quad (5)$$

donde a , b y τ son constantes escalares reales.

Dado que se trata de una ecuación diferencial (con retardo) que es lineal y con coeficientes constantes, podemos proceder de manera similar al enfoque que se utiliza para las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) del tipo Euler. Es decir, vamos a suponer que una solución es de la forma

$$x(t) = e^{r.t} \quad (6)$$

en donde $r \in \mathbb{C}$.

Entonces reemplazando (6) en (5), se obtiene

$$r e^{r.t} = a e^{r.t} + b e^{r.t} e^{-\tau.r} \quad (7)$$

y puesto que la expresión (7) se verifica para todo t , entonces necesariamente debe ocurrir que:

$$r = a + be^{-\tau r} \quad (8)$$

La ecuación (8) es la ecuación característica asociada a la EDR, y es una ecuación trascendente en variable compleja. Considerando que $r = \alpha + i\beta$, entonces podemos escribir:

$$\alpha + i\beta = a + b.e^{-\tau.(\alpha+i\beta)}$$

esto implica

$$\alpha + i\beta = a + b.e^{-\tau.\alpha}e^{-i.\tau.\beta}$$

y aplicando la relación de Euler: $e^{i.\psi} = \cos(\psi) + i.\sin(\psi)$, entonces:

$$\alpha + i\beta = a + b.e^{-\tau.\alpha}[\cos(-\tau.\beta) + i.\sin(-\tau.\beta)]$$

Si se toma la parte real y la parte imaginaria en ambos miembros de la ecuación anterior, se obtiene:

$$\begin{aligned} \alpha &= a + b.e^{-\tau.\alpha}\cos(-\tau.\beta) \\ \beta &= b.e^{-\tau.\alpha}\sin(-\tau.\beta) \end{aligned}$$

entonces:

$$\begin{cases} \alpha = a + b.e^{-\tau.\alpha}\cos(\tau.\beta) \\ \beta = -b.e^{-\tau.\alpha}\sin(\tau.\beta) \end{cases} \quad (9)$$

El sistema de ecuaciones trascendentes (9) tiene infinitas soluciones, pues si en la ecuación (8) hacemos el cambio de variable

$$z = \frac{1}{r-a}$$

, entonces

$$1 = z.be^{-\tau/ze^{-\tau.a}}$$

y si $be^{-\tau.a} = \eta$, surge que:

$$ze^{-\tau/z} = \frac{1}{\eta}$$

donde η es distinto de cero, dado que b no es nulo porque sino no se trataría de una ecuación diferencial con retardo.

La función $f(z) = ze^{-\tau/z}$ es una función analítica con una singularidad esencial en $z = 0$, por lo tanto, por el teorema de Picard, en cualquier vecinal de $z = 0$, la función alcanza todo el plano complejo con a lo sumo una excepción. Esto implica que existe una cantidad infinita numerable de valores complejos z_n que verifican

$$f(z_n) = \frac{1}{\eta}$$

De este modo, hay infinitas soluciones (autofunciones) de la ecuación diferencial (5), de la forma:

$$x_n(t) = e^{r_n t} \tag{10}$$

con $r_n = a + \frac{1}{z_n}$.

Además, debido a la linealidad de la ecuación (5), entonces también será solución cualquier combinación lineal de las autofunciones $x_n(t)$.

En contraposición a las ecuaciones diferenciales ordinarias, las ecuaciones diferenciales con retardo tienen asociado un espacio de soluciones de dimensión infinita.

Esto se relaciona con otro rasgo distintivo de las ecuaciones diferenciales con retardo, con respecto a las ecuaciones diferenciales ordinarias, y es que la condición inicial que requieren es el valor de la función en todo un intervalo, y no sólo en un punto.

Dado que trataremos exclusivamente el caso de sistemas causales, entonces por (5)

$$x'(t) - ax(t) = bx(t - \tau) \quad \forall t > -\tau$$

por lo tanto $\forall t \in [0; \tau]$:

$$x'(t) - ax(t) = bx(t - \tau)$$

Dada la condición inicial: $x(t) = \varphi(t) \quad \forall t \in [-\tau; 0]$, implica

$$x'(t) - ax(t) = b \varphi(t - \tau) \quad \forall t \in [0; \tau] \tag{11}$$

Puesto que $\varphi(t)$ es conocida $\forall t \in [-\tau; 0]$, entonces en el intervalo $[0; \tau]$ la solución de la EDR (5) va a coincidir con la solución de la EDO (11).

Luego, se puede obtener la solución de la EDR correspondiente al intervalo $[\tau; 2\tau]$ tomando como condición inicial el valor obtenido para $x(t)$ en el intervalo $[0; \tau]$.

Procediendo de este modo de manera recursiva, es posible determinar la solución de la EDR (5) $\forall t > -\tau$. Este procedimiento se conoce como *método de pasos*.

4. EJEMPLO DE APLICACIÓN DE LAS EDR

Consideremos la EDR:

$$x'(t) = ax(t) + b x(t - \tau) \quad \forall t > -\tau, \text{ con } x(t) = \varphi(t) \quad \forall t \in [-\tau; 0] \tag{12}$$

Sean $a = -2$, $b = 1/3$, $\tau = c = 1$ y la función historia $\varphi(t) = 1$ en $[-1;0]$ por lo tanto, la EDR a resolver es:

$$x'(t) = -2x(t) + \frac{1}{3} x(t-1) \quad \forall t \geq -1, \text{ con } x(t) = 1 \quad \forall t \in [-1;0] \quad (13)$$

Entonces, para obtener la solución correspondiente a $t \in [0;1]$, debemos resolver:

$$x'(t) = -2x(t) + 1$$

Se trata de una EDO lineal, a coeficientes constantes tipo Euler, con autovalor igual a -2. Obtenemos la solución de la homogénea asociada y una solución particular (por el método de determinación de parámetros), y así la solución es:

$$x(t) = \frac{5}{6}e^{-2t} + \frac{1}{6} \quad \forall t \in [0;1] \quad (14)$$

Luego repetimos el procedimiento para $t \in [1;2]$. En este caso hay que resolver:

$$x'(t) = -2x(t) + \frac{5}{6}e^{-2(t-1)} + \frac{1}{6}$$

y se trata nuevamente de una EDO tipo Euler, cuya solución es:

$$x(t) = \left(-\frac{5}{36}e^2 + \frac{5}{6}\right)e^{-2t} + \frac{1}{36} + \frac{5}{18}e^2te^{-2t} \quad \forall t \in [1;2] \quad (15)$$

Aplicando nuevamente, de manera análoga, el método para el siguiente tramo se obtiene:

$$x(t) = -\frac{5}{216}(-5e^4 + 6e^2 - 36e^{-2t}) + \frac{1}{216} + \left(-\frac{5}{36}e^4 + \frac{5}{18}e^2\right)te^{-2t} + \frac{5}{108}e^4t^2e^{-2t} \quad \forall t \in [2;3] \quad (16)$$

y de este modo se podría proceder para los siguientes intervalos, y tener toda la respuesta temporal de $x(t)$.

Se muestra en el siguiente gráfico, la solución de la EDR (13) obtenida mediante los diferentes tramos según las ecuaciones (14), (15) y (16) por el método de pasos:

```

> x_pasos := (t) -> piecewise(t < 0, c, t >= 0 and t <= tau, x1(t), t >= tau and
t <= 2*tau, x2(t), t >= 2*tau and t <= 3*tau, x3(t));
x_pasos :=
t -> piecewise(t < 0, c, 0 <= t and t <= tau, x1(t), tau < t and t <= 2 tau, x2(t), 2 tau < t and t <= 3 tau, x3(t))
> plot(x_pasos(t), t = -tau..3*tau);

```

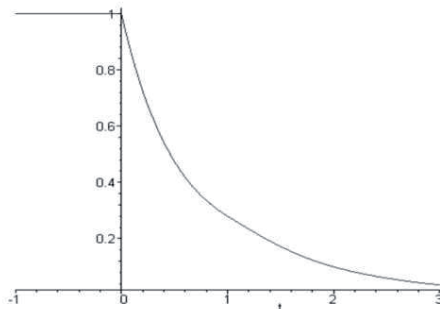


Gráfico 1. $x(t)$ correspondiente a la EDR (13) obtenida por el método de pasos.

Fuente: elaboración propia.

Otro modo de abordar el tema sería buscar la respuesta temporal del sistema, mediante las autofunciones (10) de la ecuación característica (8) mencionada anteriormente.

Para el caso del ejemplo dado, la ecuación característica asociada a la EDR (13) resulta:

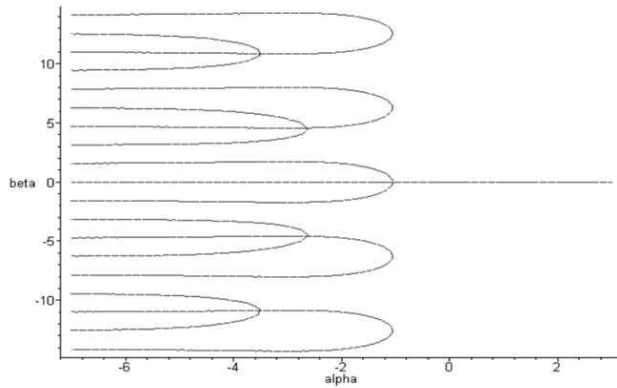
$$r = -2 + \frac{1}{3}e^{-r} \quad (17)$$

y recordando que $r = \alpha + i\beta$, entonces se obtiene según lo visto anteriormente:

$$\begin{cases} \alpha = -2 + \frac{1}{3}e^{-\alpha}\cos(\beta) \\ \beta = -\frac{1}{3}e^{-\alpha}\sin(\beta) \end{cases} \quad (18)$$

El gráfico a continuación muestra el lugar geométrico en el plano complejo, de los puntos que verifican las ecuaciones anteriores y los puntos de intersección (soluciones) del sistema.

```
with(plots):
implicitplot({alpha=a+b*exp(-alpha*tau)*cos(beta*tau),
beta=-b*exp(-alpha*tau)*sin(beta*tau)},alpha=-7..3,beta=-15..15,
numpoints=4000,axes=FRAME);
```



```
fsolve({alpha=a+b*exp(-alpha*tau)*cos(beta*tau),beta=-b*exp(-alpha*tau)*sin(beta*tau)});
{beta = 0., alpha = -1.048693409}
```

Gráfico 2. Lugar geométrico asociado al sistema de ecuaciones trascendentes.
 Fuente: elaboración propia.

```
Nt:=7;
Ni:=7
for i from 1 by 1 to Nt do
alpha[i]:=-fsolve(-b*tau*exp(-alpha*tau)*(-sqrt(1-((alpha-a)/b*exp(alpha*tau))^2))=
(2*i*Pi-arccos((alpha-a)/b*exp(alpha*tau)))));
beta[i]:=-evalf(1/tau*(2*i*Pi-arccos((alpha[i]-a)/b*exp(alpha[i]*tau))))); end do;
alpha_1 = -2.628754231 alpha_2 = -3.492964474 alpha_3 = -3.947926773 alpha_4 = -4.258775551
beta_1 = 4.575836612 beta_2 = 10.85894381 beta_3 = 17.16576553 beta_4 = 23.46598311
alpha_5 = -4.495329916 alpha_6 = -4.686396736 alpha_7 = -4.846702537
beta_5 = 29.76148158 beta_6 = 36.05394247 beta_7 = 42.34437443
```

Figura 1. Solución numérica z_0 . Fuente: elaboración propia.


```

alpha[0]:=-1.048693409:beta[0]:=0:
z[0]:=alpha[0]+beta[0]*I;
                                z0 := -1.048693409
for i from 1 by 1 to Nt do z[i]:=alpha[i]+I*beta[i] end do;
                                z1 := -2.628754231 + 4.575836612 I
                                z2 := -3.492964474 + 10.85894381 I
                                z3 := -3.947926773 + 17.16576553 I
                                z4 := -4.258775551 + 23.46598311 I
                                z5 := -4.495329916 + 29.76148158 I
                                z6 := -4.686396736 + 36.05394247 I
                                z7 := -4.846702537 + 42.34437443 I

```

Figura 2. Algunas soluciones numéricas alpha y beta y algunos autovalores de la ecuación característica. Fuente: elaboración propia.

Los autovalores z_n hallados permiten construir soluciones de la EDR (13). Dado que el espacio solución de la EDR es de dimensión infinita, sólo vamos a considerar $N+1$ autofunciones, ya que como la parte real de los autovalores es negativa y aumenta en módulo, entonces para valores de t positivos, tendremos exponenciales negativas y no habrá demasiado error al truncar el número de autofunciones a utilizar.

Entonces tomaremos como aproximación de la respuesta temporal –es decir la solución de la EDR (13)–, la siguiente combinación lineal de autofunciones:

$$x(t) = \sum_{i=0}^N d_i e^{\alpha_i t} \cos(\beta_i t) \quad (19)$$

donde hemos considerado sólo la parte real de las autofunciones, puesto que la solución de la EDR es real y los escalares de la combinación lineal también son reales.

Debido a la restricción impuesta por la función historia, en el caso práctico bajo estudio debería ocurrir que para los valores de t entre -1 y 0 , $x(t)$ fuera igual a 1.

Esto implica que:

$$x(t) = \sum_{i=0}^N d_i e^{\alpha_i t} \cos(\beta_i t) = 1 \quad \forall t \in [-1; 0] \quad (20)$$

Dado que tenemos una cantidad finita de autofunciones, no es posible encontrar escalares d_i para que se pueda verificar la identidad anterior en todo el intervalo, pero sí podemos elegir los escalares d_i , para que en determinados valores de t la expresión se cumpla.

Esto, justamente refleja el hecho de que vamos a obtener una aproximación a la verdadera solución, por haber tomado una cantidad finita de autofunciones.

Entonces, dividimos el intervalo $[-1;0]$ en N partes iguales, y así tendremos un conjunto de valores de t equiespaciados (con $N = 7$):

$$t_0 = -1, t_1 = -6/7, t_2 = -5/7, \dots, t_7 = 0$$

De este modo, reemplazando cada uno de estos valores t_i en la ecuación (20) obtendremos el sistema de ecuaciones descrito por:

$$\sum_{j=0}^N d_j e^{\alpha_j \cdot t_i} \cos(\beta_j \cdot t_i) = 1 \quad \forall i = 0..N \quad (21)$$

```
for nt from 0 by 1 to Nt do t[nt]:=-tau+tau/(Nt)*(nt) end do;
t0 := -1    t1 := -6/7    t2 := -5/7    t3 := -4/7    t4 := -3/7    t5 := -2/7    t6 := -1/7    t7 := 0
```

Figura 3. Vector de tiempos. Fuente: elaboración propia.

Ahora se construye la matriz **Afi** con los coeficientes del sistema de ecuaciones y la matriz **Bfi** correspondiente a los términos independientes:

```
> for i from 0 by 1 to Nt do for j from 0 by 1 to Nt do Afi[i+1,j+1]:=Re(exp(z[j]*t[i]))
end do end do;
> evalm(Afi);
```

| | | | | | | | |
|-------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 2.853919775 | -1.886262678 | -4.478893278 | -5.843780524 | -6.776326456 | -7.485989610 | -8.059189478 | -8.540106384 |
| 2.456850057 | -6.762996572 | -19.82802269 | -16.06916126 | 11.61870974 | 43.82856196 | 48.39371536 | 10.58128473 |
| 2.115025186 | -6.485785421 | 1.181091763 | 16.00115905 | -10.35967995 | -18.43345818 | 23.13689617 | 12.43905318 |
| 1.820758872 | -3.882317912 | 7.336990751 | -8.848520635 | 7.585388439 | -3.508391385 | -2.633003787 | 9.459941538 |
| 1.567434227 | -1.173737438 | -26.14898351 | 2.590123293 | -5.005395215 | 6.744235010 | -7.208434402 | 6.094656969 |
| 1.349354984 | .5518133442 | -2.710756376 | .5898785267 | 3.080996347 | -2.184175001 | -2.441525095 | 3.564498900 |
| 1.161617400 | 1.155656816 | .03214642583 | -1.356334263 | -1.796849857 | -.8450598977 | .8287305729 | 1.944018354 |
| 1. | 1. | 1. | 1. | 1. | 1. | 1. | 1. |

Figura 4. Matriz de los coeficientes del sistema de ecuaciones asociado a la condición inicial.
Fuente: elaboración propia.

Resolviendo el sistema

$$Afi \cdot C = Bfi$$

se obtiene la matriz C con los escalares d_i que permiten implementar la respuesta temporal $x(t)$.

```

Bfi:=Matrix(Nt+1,1):
for i from 0 by 1 to Nt do Bfi[i+1,1]:=-1 end do:
evalm(Bfi);

C:=evalm(inverse(Afi)&*Bfi);
    
```

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C := \begin{bmatrix} .7193698650 \\ .1604770805 \\ .0428146742 \\ .0212484821 \\ .01441514996 \\ .01228620526 \\ .01299458852 \\ .0163939544 \end{bmatrix}$$

Figura 5. Matriz de términos independientes y matriz de escalares solución del sistema para las condiciones inicial. Fuente: elaboración propia.

```

x:=(t)->sum(C[i+1,1]*exp(alpha[i]*t)*cos(beta[i]*t),i=0..Nt);
x := t -> \sum_{i=0}^{Nt} C_{i+1,1} e^{(\alpha_i t)} \cos(\beta_i t)
plot({x_pasos(t),x(t)},t=-tau..3*tau,y=-1..2,numpoints=2000,color=[red,blue]);
    
```

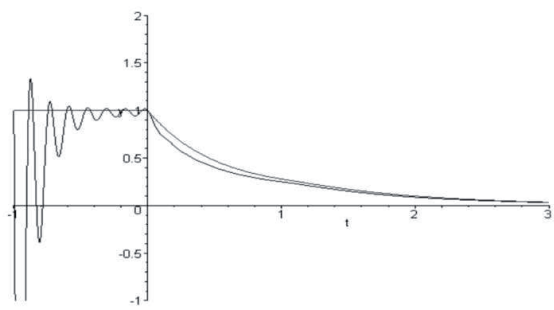


Gráfico 3. Implementación mediante autofunciones y su comparación con la respuesta obtenida según el método de pasos. Fuente: elaboración propia.

Según se puede observar en el gráfico, la respuesta obtenida para $t > 0$ por este método es muy similar a la que se obtuvo anteriormente mediante el método de pasos. En el tramo correspondiente a la función historia (condiciones iniciales) entre -1 y 0, si bien la función implementada con las autofunciones verifica en los puntos t_i especificados que coincide con $\phi(t)$, fuera de estos puntos tiene grandes oscilaciones. Esto se debe a que los autovalores tienen parte real negativa, y entonces en el tramo donde t es negativo, quedan exponenciales que divergen.

Se realiza a continuación, un enfoque planteando consideraciones de energía, tomando como señal de entrada a la función historia, e imponiendo como condición, que el valor eficaz de la diferencia entre la respuesta y la excitación (en el intervalo correspondiente a la condición inicial), sea mínimo.

Formalmente, esto es: minimizar

$$\int_{-\tau}^0 [y(t) - \phi(t)]^2 dt, \text{ sujeto a } y(0) = \phi(0), \quad (22)$$

con

$$y(t) = \sum_{i=0}^N d_i e^{\alpha_i t} \cos(\beta_i t) \quad (23)$$

y

$$y(0) = \sum_{i=0}^N d_i \quad (24)$$

Para resolver el problema, planteamos el lagrangiano:

$$L = \int_{-\tau}^0 [y(t) - \phi(t)]^2 dt - \lambda \cdot [y(0) - \phi(0)]$$

y dado que la condición necesaria de primer orden es:

$$\nabla L = 0$$

entonces:

$$\frac{\partial L}{\partial d_i} = \int_{-\tau}^0 2[y(t) - \phi(t)] \cdot e^{\alpha_i \cdot t} \cos(\beta_i \cdot t) dt - \lambda = 0 \quad \forall i = 0..N$$

y

$$\sum_{i=0}^N d_i = \phi(0)$$

definiendo $\gamma_i(t) = e^{\alpha_i \cdot t} \cos(\beta_i \cdot t)$, entonces la expresión anterior es:

$$\frac{\partial L}{\partial d_i} = \int_{-\tau}^0 2[y(t) - \phi(t)] \cdot \gamma_i(t) dt - \lambda = 0 \quad \forall i = 0..N$$

implica

$$\frac{\partial L}{\partial d_i} = \int_{-\tau}^0 \sum_{j=0}^N 2\gamma_j(t) \cdot \gamma_i(t) \cdot d_j dt - \int_{-\tau}^0 2\gamma_i(t) \phi(t) dt - \lambda = 0 \quad \forall i = 0..N$$

por lo tanto:

$$\sum_{j=0}^N \left[\int_{-\tau}^0 2\gamma_j(t) \cdot \gamma_i(t) \cdot dt \right] d_j - \left[\int_{-\tau}^0 2\gamma_i(t) \phi(t) dt \right] - \lambda = 0 \quad \forall i = 0..N$$

entonces, definiendo: la condición necesaria para la existencia de puntos estacionarios es:

$$c_{ij} = \int_{-\tau}^0 2\gamma_j(t) \cdot \gamma_i(t) \cdot dt \quad \forall i = 0..N \quad \forall j = 0..N$$

$$indp_i = \int_{-\tau}^0 2\gamma_i(t) \phi(t) dt \quad \forall i = 0..N$$

y

$$\sum_{i=0}^N d_i = \phi(0)$$

las últimas dos ecuaciones conducen al sistema:

$$\begin{cases} c_{00}d_0 + c_{01}d_1 + c_{02}d_2 + \dots + c_{0N}d_N - \text{ind}p_0 - \lambda = 0 \\ c_{10}d_0 + c_{11}d_1 + c_{12}d_2 + \dots + c_{1N}d_N - \text{ind}p_1 - \lambda = 0 \\ c_{20}d_0 + c_{21}d_1 + c_{22}d_2 + \dots + c_{2N}d_N - \text{ind}p_2 - \lambda = 0 \\ c_{30}d_0 + c_{31}d_1 + c_{32}d_2 + \dots + c_{3N}d_N - \text{ind}p_3 - \lambda = 0 \\ \dots \\ c_{N0}d_0 + c_{N1}d_1 + c_{N2}d_2 + \dots + c_{NN}d_N - \text{ind}p_N - \lambda = 0 \\ d_0 + d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_N = \phi(0) \end{cases} \quad (25)$$

y si se definen:

$$P = \begin{bmatrix} c_{00} & c_{01} & c_{02} & \dots & c_{0N} & -1 \\ c_{10} & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1N} & -1 \\ c_{20} & c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2N} & -1 \\ c_{30} & c_{31} & c_{32} & \dots & c_{3N} & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{N0} & c_{N1} & c_{N2} & \dots & c_{NN} & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Ind}p = \begin{bmatrix} \text{ind}p_0 \\ \text{ind}p_1 \\ \text{ind}p_2 \\ \text{ind}p_3 \\ \dots \\ \text{ind}p_N \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \dots \\ d_N \\ \lambda \end{bmatrix}$$

entonces el sistema (25) se puede escribir matricialmente como:

$$P.D = \text{Ind}p$$

resolviendo el sistema (25), se obtiene entonces la matriz D cuyos elementos son los escalares adecuados para implementar la respuesta temporal $y(t)$ mediante las autofunciones.

Se muestra a continuación, la resolución mediante este enfoque, aplicada al caso práctico anterior.

```

cuadr:=(aa,bb)->int(exp(2*aa*t)*(cos(bb*t))^2,t=-tau..0);
      cuadr := (aa, bb) → ∫-τ0 e(2aa t) cos2(bb t) dt
cruzad:=(aa1,bb1,aa2,bb2)->Int(2*exp(aa1*t)*(cos(bb1*t))*exp(aa2*t)*
(cos(bb2*t)),t=-tau..0);
      cruzad := (aa1, bb1, aa2, bb2) → ∫-τ0 2 e(aa1 t) cos(bb1 t) e(aa2 t) cos(bb2 t) dt
linea:=(aa,bb)->int(2*c*exp(aa*t)*(cos(bb*t)),t=-tau..0);
      linea := (aa, bb) → ∫-τ0 2 c e(aa t) cos(bb t) dt
N:=5;
      N:=5

```

Figura 6. Funciones para la obtención de los coeficientes. Fuente: elaboración propia.

```

for i from 0 to N do P[i+1,i+1]:=2*cuaadr(alpha[i],beta[i]) end do;
      P1,1 := 6.813104782
      P2,2 := 31.81076902
      P3,3 := 152.8290352
      P4,4 := 340.0556242
      P5,5 := 588.4114420
      P6,6 := 895.1036972

```

Figura 7. Obtención de los elementos de la diagonal de P. Fuente: elaboración propia.

```

for i from 0 to N do for j from 0 to N do if (i<>j) then
P[i+1,j+1]:=evalf(cruzad(alpha[i],beta[i],alpha[j],beta[j])) end if
end do; end do;
for i from 0 to N do P[i+1,N+2]:=-1 end do;
      P1,7 := -1
      P2,7 := -1
      P3,7 := -1
      P4,7 := -1
      P5,7 := -1
      P6,7 := -1
for j from 1 to N+1 do P[N+2,j]:=1; end do;
      P7,1 := 1
      P7,2 := 1
      P7,3 := 1
      P7,4 := 1
      P7,5 := 1
      P7,6 := 1

```

Figura 8. Fila y columna adicional, relacionadas con la restricción, para la matriz P. Fuente: elaboración propia.

```

for i from 0 to N do indp[i+1,1]:=linea(alpha[i],beta[i]) end do;
    indp1,1 := 3.535675459
    indp2,1 := -5.056056158
    indp3,1 := -5.731552975
    indp4,1 := -5.872749998
    indp5,1 := -5.925125632
    indp6,1 := -5.950380140
indp[N+2,1] := 1;
    indp7,1 := 1
    
```

Figura 9. Elementos correspondientes a los términos independientes del sistema.
 Fuente: elaboración propia.

```

> evalm(indp);
    [ 3.535675459
      -5.056056158
      -5.731552975
      -5.872749998
      -5.925125632
      -5.950380140
        1
    ]

> evalm(P);
[6.813104782, -11.76618519, -15.47774441, -16.33869768, -16.66317287, -16.81982022, -1]
[-11.76618519, 31.81076902, 33.28296156, 23.01631427, 18.23184153, 15.84314219, -1]
[-15.47774441, 33.28296156, 152.8290352, 135.2505650, 88.33314043, 64.64706677, -1]
[-16.33869768, 23.01631427, 135.2505650, 340.0556242, 285.4261797, 179.6751374, -1]
[-16.66317287, 18.23184153, 88.33314043, 285.4261797, 588.4114420, 483.1639459, -1]
[-16.81982022, 15.84314219, 64.64706677, 179.6751374, 483.1639459, 895.1036972, -1]
[1, 1, 1, 1, 1, 1, 0]
    
```

Figura 10. Matriz de los términos independientes y matriz de los coeficientes del sistema.
 Fuente: elaboración propia.

```

matrizEscalares2:=evalm(inverse(P) &*indp);
    matrizEscalares2 := [ .8387420627
                          .1391562842
                          .009712661255
                          .006751254319
                          .001817265251
                          .003820472145
                          .1862456364
    ]
    
```

Figura 11. Matriz de los escalares solución del sistema. Fuente: elaboración propia.


```
xxxx := (t) -> sum (matrizEscalares2 [i+1, 1] * exp (alpha [i] * t) * cos (beta [i] * t)
, i=0..N) ;
```

$$xxxx := t \rightarrow \sum_{i=0}^N \text{matrizEscalares2}_{i+1,1} e^{(\alpha_i t)} \cos(\beta_i t)$$

```
plot ({x_pasos (t) , xx (t) , xxxx (t) } , t=-tau..3*tau , y=-1..2 , numpoints=2000
, color=[red,blue] ) ;
```

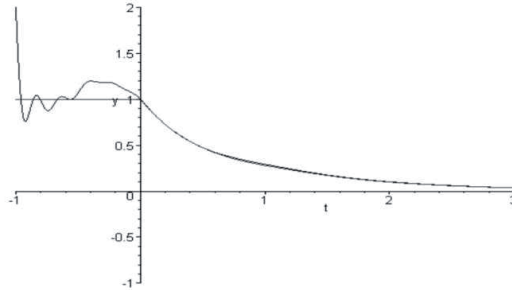


Gráfico 4. Implementación mediante autofunciones (con condición inicial basada en la energía) y su comparación con la respuesta obtenida según el método de pasos. Fuente: elaboración propia.

Según se observa en la figura anterior, utilizando el criterio de minimizar el valor eficaz, disminuye la oscilación en la zona correspondiente a la función historia, y a su vez, para $t > 0$, la respuesta temporal coincide con la obtenida por el método de pasos.

Otro modo de resolver el problema planteado consiste en utilizar derivadas parciales para extraer los coeficientes del lagrangiano, y con esto construir las ecuaciones correspondientes a las componentes del gradiente de L , para finalmente aplicar un solver.

La implementación de este procedimiento es el siguiente:

$$\begin{aligned}
 &> \mathbf{y} := (\mathbf{t}) \rightarrow \text{sum}(\mathbf{d}[\mathbf{i}] * \exp(\alpha[\mathbf{i}] * \mathbf{t}) * \cos(\beta[\mathbf{i}] * \mathbf{t}), \mathbf{i} = 0 \dots 5); \\
 &\qquad \qquad \qquad \mathbf{y} = \mathbf{t} \rightarrow \sum_{\mathbf{i} = 0}^5 \mathbf{d}_{\mathbf{i}} e^{(\alpha_{\mathbf{i}} \mathbf{t})} \cos(\beta_{\mathbf{i}} \mathbf{t}) \\
 &> \mathbf{L} := \text{expand}(\text{Int}(((\mathbf{y}(\mathbf{t}) - 1))^2, \mathbf{t} = -\mathbf{tau} \dots 0) - \lambda \mathbf{d}_0 * (\mathbf{y}(\mathbf{0}) - 1)); \\
 \mathbf{L} = &\int_{-1}^0 1 + 2 \mathbf{d}_0 e^{(-1.048693409 \mathbf{t})} \mathbf{d}_5 e^{(-4.495329916 \mathbf{t})} \cos(29.76148158 \mathbf{t}) \\
 &+ 2 \mathbf{d}_1 e^{(-2.628754231 \mathbf{t})} \cos(4.575836612 \mathbf{t}) \mathbf{d}_2 e^{(-3.492964474 \mathbf{t})} \cos(10.85894381 \mathbf{t}) + \mathbf{d}_1^2 (e^{(-2.628754231 \mathbf{t})})^2 \cos(4.575836612 \mathbf{t})^2 \\
 &+ 2 \mathbf{d}_1 e^{(-2.628754231 \mathbf{t})} \cos(4.575836612 \mathbf{t}) \mathbf{d}_4 e^{(-4.258775551 \mathbf{t})} \cos(23.46598311 \mathbf{t}) \\
 &+ 2 \mathbf{d}_1 e^{(-2.628754231 \mathbf{t})} \cos(4.575836612 \mathbf{t}) \mathbf{d}_3 e^{(-3.947926773 \mathbf{t})} \cos(17.16576553 \mathbf{t}) \\
 &+ 2 \mathbf{d}_2 e^{(-3.492964474 \mathbf{t})} \cos(10.85894381 \mathbf{t}) \mathbf{d}_3 e^{(-3.947926773 \mathbf{t})} \cos(17.16576553 \mathbf{t}) \\
 &+ 2 \mathbf{d}_1 e^{(-2.628754231 \mathbf{t})} \cos(4.575836612 \mathbf{t}) \mathbf{d}_5 e^{(-4.495329916 \mathbf{t})} \cos(29.76148158 \mathbf{t}) \\
 &+ 2 \mathbf{d}_3 e^{(-3.947926773 \mathbf{t})} \cos(17.16576553 \mathbf{t}) \mathbf{d}_5 e^{(-4.495329916 \mathbf{t})} \cos(29.76148158 \mathbf{t}) \\
 &+ 2 \mathbf{d}_3 e^{(-3.947926773 \mathbf{t})} \cos(17.16576553 \mathbf{t}) \mathbf{d}_4 e^{(-4.258775551 \mathbf{t})} \cos(23.46598311 \mathbf{t}) \\
 &+ 2 \mathbf{d}_2 e^{(-3.492964474 \mathbf{t})} \cos(10.85894381 \mathbf{t}) \mathbf{d}_5 e^{(-4.495329916 \mathbf{t})} \cos(29.76148158 \mathbf{t}) \\
 &+ 2 \mathbf{d}_2 e^{(-3.492964474 \mathbf{t})} \cos(10.85894381 \mathbf{t}) \mathbf{d}_4 e^{(-4.258775551 \mathbf{t})} \cos(23.46598311 \mathbf{t}) + \mathbf{d}_2^2 (e^{(-3.492964474 \mathbf{t})})^2 \cos(10.85894381 \mathbf{t})^2 \\
 &+ 2 \mathbf{d}_4 e^{(-4.258775551 \mathbf{t})} \cos(23.46598311 \mathbf{t}) \mathbf{d}_5 e^{(-4.495329916 \mathbf{t})} \cos(29.76148158 \mathbf{t}) + \mathbf{d}_3^2 (e^{(-3.947926773 \mathbf{t})})^2 \cos(17.16576553 \mathbf{t})^2 \\
 &+ \mathbf{d}_4^2 (e^{(-4.258775551 \mathbf{t})})^2 \cos(23.46598311 \mathbf{t})^2 + \mathbf{d}_5^2 (e^{(-4.495329916 \mathbf{t})})^2 \cos(29.76148158 \mathbf{t})^2 \\
 &- 2 \mathbf{d}_1 e^{(-2.628754231 \mathbf{t})} \cos(4.575836612 \mathbf{t}) - 2 \mathbf{d}_5 e^{(-4.495329916 \mathbf{t})} \cos(29.76148158 \mathbf{t}) - 2 \mathbf{d}_4 e^{(-4.258775551 \mathbf{t})} \cos(23.46598311 \mathbf{t}) \\
 &- 2 \mathbf{d}_2 e^{(-3.492964474 \mathbf{t})} \cos(10.85894381 \mathbf{t}) - 2 \mathbf{d}_3 e^{(-3.947926773 \mathbf{t})} \cos(17.16576553 \mathbf{t}) - 2 \mathbf{d}_0 e^{(-1.048693409 \mathbf{t})} \\
 &+ \mathbf{d}_0^2 (e^{(-1.048693409 \mathbf{t})})^2 + 2 \mathbf{d}_0 e^{(-1.048693409 \mathbf{t})} \mathbf{d}_4 e^{(-4.258775551 \mathbf{t})} \cos(23.46598311 \mathbf{t}) \\
 &+ 2 \mathbf{d}_0 e^{(-1.048693409 \mathbf{t})} \mathbf{d}_2 e^{(-3.492964474 \mathbf{t})} \cos(10.85894381 \mathbf{t}) + 2 \mathbf{d}_0 e^{(-1.048693409 \mathbf{t})} \mathbf{d}_3 e^{(-3.947926773 \mathbf{t})} \cos(17.16576553 \mathbf{t}) \\
 &+ 2 \mathbf{d}_0 e^{(-1.048693409 \mathbf{t})} \mathbf{d}_1 e^{(-2.628754231 \mathbf{t})} \cos(4.575836612 \mathbf{t}) \mathbf{d} \mathbf{t} - \lambda \mathbf{d}_0 - \lambda \mathbf{d}_1 - \lambda \mathbf{d}_2 - \lambda \mathbf{d}_3 - \lambda \mathbf{d}_4 - \lambda \mathbf{d}_5 + \lambda
 \end{aligned}$$

Figura 12. Planteo del problema considerando minimización del valor eficaz.
Fuente: elaboración propia.

El lagrangiano que hemos planteado, es una expresión de segundo grado en varias variables. Cuando calculemos (para buscar puntos estacionarios) su gradiente, sus componentes van a ser todas expresiones lineales con un término independiente. Entonces si en cada una de las componentes del gradiente, es decir, para cada derivada parcial del lagrangiano, tomamos a su vez la derivada parcial con respecto a cada variable, tendremos los coeficientes de las ecuaciones del sistema lineal que debemos resolver, y a su vez, los términos independientes se pueden obtener igualando a cero todas las variables en cada componente del gradiente de L, y evaluando dicha componente en ese caso.

Finalmente, se obtienen los escalares que minimizan el valor eficaz, aplicando solver a la conjunción de las ecuaciones obtenidas, junto con la ecuación de restricción.

Se muestra el código correspondiente a la generación de los términos independientes, la construcción de las ecuaciones y la aplicación del solver:

```

for i from 0 by 1 to 5 do
indep[i]:=-evalf(subs(d[0]=0,d[1]=0,d[2]=0,d[3]=0,d[4]=0,d[5]=0,lambda=0,diff(L,d[i]))) end do;
indep_0 = -3.535675459
indep_1 = 5.056056157
indep_2 = 5.731552976
indep_3 = 5.872749998
indep_4 = 5.925125633
indep_5 = 5.950380140

```

Figura 13. Términos independientes. Fuente: elaboración propia.

```

> for i from 0 to 5 do
eq[i]:=-evalf(diff(L,d[i],d[0]))*d[0]+evalf(diff(L,d[i],d[1]))*d[1]+evalf(diff(L,d[i],d[2]))*d[2]+
evalf(diff(L,d[i],d[3]))*d[3]+evalf(diff(L,d[i],d[4]))*d[4]+evalf(diff(L,d[i],d[5]))*d[5]+indep[i
]-lambda; end do;
eq_0 = 6.813104784 d_0 - 11.76618519 d_1 - 15.47774441 d_2 - 16.33869768 d_3 - 16.66317287 d_4 - 16.81982022 d_5 - 3.535675459 - lambda
eq_1 = -11.76618519 d_0 + 31.81076902 d_1 + 33.28296156 d_2 + 23.01631427 d_3 + 18.23184153 d_4 + 15.84314219 d_5 + 5.056056157 - lambda
eq_2 = -15.47774441 d_0 + 33.28296156 d_1 + 152.8290353 d_2 + 135.2505650 d_3 + 88.33314043 d_4 + 64.64706677 d_5 + 5.731552976 - lambda
eq_3 = -16.33869768 d_0 + 23.01631427 d_1 + 135.2505650 d_2 + 340.0556244 d_3 + 285.4261797 d_4 + 179.6751374 d_5 + 5.872749998 - lambda
eq_4 = -16.66317287 d_0 + 18.23184153 d_1 + 88.33314043 d_2 + 285.4261797 d_3 + 588.4114421 d_4 + 483.1639459 d_5 + 5.925125633 - lambda
eq_5 = -16.81982022 d_0 + 15.84314219 d_1 + 64.64706677 d_2 + 179.6751374 d_3 + 483.1639459 d_4 + 895.1036973 d_5 + 5.950380140 - lambda
>
> i:='i';
> escalares:=solve({eq[0],eq[1],eq[2],eq[3],eq[4],eq[5],diff(L,lambda)});
escalares =
(d_2 = .009712661205, lambda = .1862456375, d_0 = .8387420627, d_3 = .006751254333, d_5 = .003820472150, d_1 = .1391562844, d_4 = .001817265249)
> xx:=(t)->subs(escalares,y(t));
xx = t -> subs(escalares,y(t))

```

Figura 14. Aplicación del solver para la obtención de los escalares óptimos.
Fuente: elaboración propia.

De este modo, el solver devuelve los escalares adecuados y con ellos se implementa la función $xx(t)$.

La gráfica de la función obtenida es:

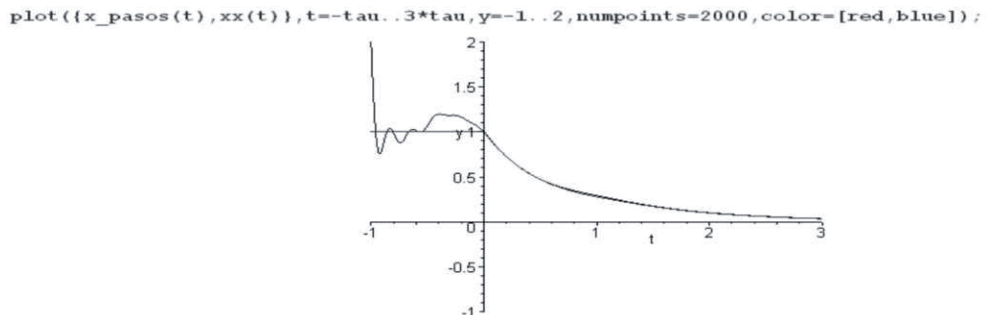


Gráfico 5. Respuesta temporal mediante autofunciones y comparación con método de pasos.
Fuente: elaboración propia.

Según se observa la misma respuesta temporal coincide exactamente con la que se obtuvo anteriormente.

5. FENÓMENOS OSCILATORIOS EN LAS EDR

Para que un sistema descrito por una EDO genere una respuesta oscilatoria, es necesario que sea al menos de segundo orden.

Si se considera ahora una EDR de primer orden como la planteada originalmente, pero ahora con los parámetros:

$$a = 0, b = -1,3, c = 1, \tau = 1$$

y la función historia $\varphi(t) = 1$ en $[-1;0]$ entonces la EDR (12)

$$x'(t) = ax(t) + b x(t - \tau) \quad \forall t > -\tau, \text{ con } x(t) = \varphi(t) \quad \forall t \in [-\tau;0]$$

resulta:

$$x'(t) = -1,3 x(t - 1) \quad \forall t > -1, \text{ con } x(t) = 1 \quad \forall t \in [-1;0] \quad (26)$$

Para el caso particular en que $a = 0$, si se aplica el método de pasos explicado anteriormente de manera recursiva, se obtiene la siguiente expresión:

$$x(t) = \sum_{k=0}^n \frac{b^k (t - (k - 1)\tau)^k}{k!} \quad \forall t \in [n\tau; (n + 1)\tau] \quad (27)$$

entonces, para el caso particular planteado es:

$$x(t) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1,3)^k (t - k + 1)^k}{k!} \quad \forall t \in [n; n + 1] \quad (28)$$

Por otra parte, según se mostró previamente, la ecuación característica asociada a la EDR es:

$$r = a + be^{-\tau r}$$

y aplicado a este caso particular, resulta:

$$r = -1,3e^{-r} \quad (29)$$

En el gráfico siguiente se pueden ver los lugares geométricos de los puntos que verifican la igualdad de las partes real e imaginaria correspondientes a la ecuación anterior:

```
with (plots) :
```

```
implicitplot ({alpha=a+b*exp(-alpha*tau)*cos(beta*tau),beta=-b*exp(-alpha*tau)*sin(beta*tau)},alpha=-5..2,beta=-26..26,numpoints=8000,axes=frame);
```

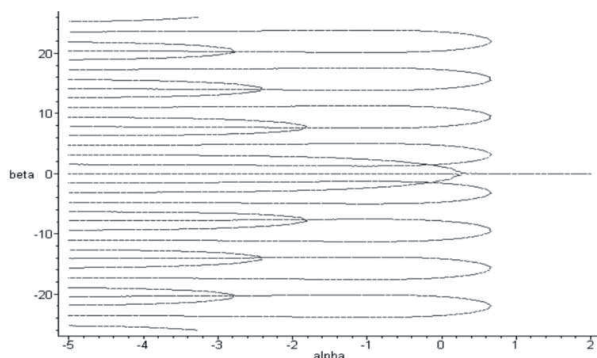


Figura 15. Lugar geométrico en el campo complejo, para los puntos que verifican cada una de las dos ecuaciones trascendentes. Fuente: elaboración propia.

Mediante el uso de un solver, se pueden encontrar algunos de los valores que verifican el sistema de ecuaciones trascendentes, para obtener de este modo, un subconjunto de autovalores de la ecuación característica.

También se construye, a partir del método de pasos, la expresión y el gráfico para la respuesta temporal $x(t)$.

```

for delta from 0 by 1 to 9 do
solucion:=fsolve({alpha=a+b*exp(-alpha*tau)*cos(beta*tau),beta=-b*exp(-alpha*tau)*sin(beta*tau)},{alpha,beta},{beta=0+delta*2*Pi..(delta+1)*2*Pi}); resultado[delta]:=solucion; end do;
      solucion := { beta = 1.480475016, alpha = -.1340832564 }
      resultado_0 := { beta = 1.480475016, alpha = -.1340832564 }
      solucion := { beta = 7.622616807, alpha = -1.795762551 }
      resultado_1 := { beta = 7.622616807, alpha = -1.795762551 }
      solucion := { beta = 13.96778327, alpha = -2.388803758 }
      resultado_2 := { beta = 13.96778327, alpha = -2.388803758 }
      solucion := { alpha = -2.756681015, beta = 20.28528405 }
      resultado_3 := { alpha = -2.756681015, beta = 20.28528405 }
      solucion := { alpha = -3.024609196, beta = 26.59027567 }
      resultado_4 := { alpha = -3.024609196, beta = 26.59027567 }
      solucion := { beta = 32.88865863, alpha = -3.235579635 }
      resultado_5 := { beta = 32.88865863, alpha = -3.235579635 }
      solucion := { beta = 39.18310837, alpha = -3.409653323 }
      resultado_6 := { beta = 39.18310837, alpha = -3.409653323 }
      solucion := { alpha = -3.557850013, beta = 45.47501506 }
      resultado_7 := { alpha = -3.557850013, beta = 45.47501506 }
      solucion := { alpha = -3.686883336, beta = 51.76517562 }
      resultado_8 := { alpha = -3.686883336, beta = 51.76517562 }
      solucion := { alpha = -3.801149722, beta = 58.05408141 }
      resultado_9 := { alpha = -3.801149722, beta = 58.05408141 }

```

Figura 16. Subconjunto de soluciones del sistema de ecuaciones trascendentes.

Fuente: elaboración propia.

```

for delta from 0 by 1 to 9 do z[delta]:=alfa[delta]+I*beta[delta]
end do;
      z_0 := -.1340832564 + 1.480475016 I
      z_1 := -1.795762551 + 7.622616807 I
      z_2 := -2.388803758 + 13.96778327 I
      z_3 := -2.756681015 + 20.28528405 I
      z_4 := -3.024609196 + 26.59027567 I
      z_5 := -3.235579635 + 32.88865863 I
      z_6 := -3.409653323 + 39.18310837 I
      z_7 := -3.557850013 + 45.47501506 I
      z_8 := -3.686883336 + 51.76517562 I
      z_9 := -3.801149722 + 58.05408141 I

```

Figura 17. Soluciones complejas z_n . Fuente: elaboración propia.

```
x_pasos := (t) -> sum(b^k * (t - (k-1) * tau)^k / k!, k=0..n);
x_pasos := t -> sum_{k=0}^n \frac{b^k (t - (k-1) \tau)^k}{k!}
x_pasos(t);
sum_{k=0}^n \frac{(-1.300000000)^k (t - 1. k + 1.)^k}{k!}
f := (t) -> piecewise(t < 0, c, t >= 0, subs(n = trunc(t/tau) + 1, x_pasos(t)));
f := t -> piecewise(t < 0, c, 0 <= t, subs(n = trunc(\frac{t}{\tau}) + 1, x_pasos(t)))
```

Figura 18. Expresión de la solución de la EDR, mediante el método de pasos.
 Fuente: elaboración propia.

```
plot({f(t)}, t=-1..30);
```

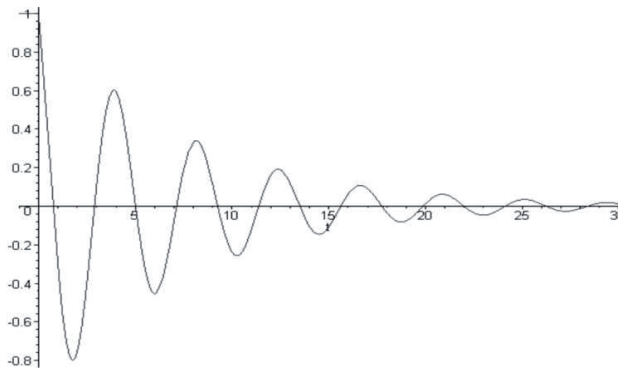


Gráfico 6. Respuesta temporal $x(t)$. Fuente: elaboración propia.

Según se observa en el gráfico, aun cuando se trata de un sistema de primer orden, la respuesta temporal es de carácter oscilatorio.

6. RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Los modelos descritos mediante ecuaciones diferenciales con retardo, aun cuando no sean de orden superior, conducen a una considerable complejidad matemática, pero por otra parte, resultan muy interesantes, porque dan la posibilidad de incorporar un elemento que verdaderamente existe en el contexto real, y es la existencia de demoras en la transmisión de la información. A su vez, tal como se pudo observar en el apartado anterior, aún en sistemas de primer orden, es posible tener comportamientos oscilatorios, lo cual, en sistemas descritos por ecuaciones diferenciales de primer orden, no es factible. Las ecuaciones diferenciales con retardo tienen asociado un espacio solución de autofunciones de dimensión infinita, y por lo tanto requieren, como condición de borde o

inicial, no sólo la información de la función y sus derivadas en puntos específicos, sino que precisan de lo que se denomina función historia, es decir el comportamiento previo, sobre todo un intervalo continuo denso.

Se abordó el problema mediante el desarrollo basado en autofunciones para aproximar a la solución, y esto es posible siempre que el sistema converja, pues de ese modo es razonable asumir que el error al truncar la serie de autofunciones (por tratarse de exponenciales negativas) estará acotado.

La intención del trabajo fue llevar a cabo una introducción de las EDR, mostrando su existencia y explicando su utilidad, como una mejor modelización a ciertos problemas reales, señalando además las similitudes y diferencias de estas con respecto a las EDO. Se mostraron dos casos concretos y bien simples, para ejemplificar dos comportamientos bien diferenciados: uno de respuesta amortiguada sin oscilaciones, y el otro con una respuesta temporal oscilatoria. También se mostraron algunas estrategias para abordar la resolución de este tipo de ecuaciones diferenciales con retardo.

7. REFERENCIAS

- Amster, P. (2017). *Ecuaciones diferenciales con retardo*. Cursos y seminarios de matemática Serie B.
- Bel, A. L. (2014). *Soluciones oscilatorias en ecuaciones diferenciales con retardo*.
- Bellman, R. and Cooke, K. (1963). *Differential-Difference Equations*. Academic Press, New York & London.
- Churchill, R. (2010). *Variable compleja y aplicaciones*. 5ta. ed. Madrid: MacGraw-Hill.
- F. Murray and K. Miller (2007). *Existence Theorems for Ordinary Differential Equations*, 1ra. ed., New York.
- Fridman, E. (2014). *Introduction to Time-Delay Systems: Analysis and Control*. 2014th ed. Birkhäuser.
- González, A. G. E., Almeida, G. G., & Vales, E. A. (2010). "Estabilidad local de ecuaciones diferenciales ordinarias con retardo y aplicaciones". *Miscelánea Matemática, Sociedad Matemática Mexicana*, 51, 73-92.
- Liz Marzán, E. (2006). *Sobre ecuaciones diferenciales con retraso, dinámica de poblaciones y números primos*
- Smith H. (2011). "An Introduction to Delay Differential Equations with Applications to the Life Sciences". *Texts in Applied Mathematics*, vol 57. Springer, New York.
- Valdés, J. E. N., & Segura, C. N. (2002). "La historia de las ecuaciones diferenciales ordinarias contadas por sus libros de texto". *Xixim: Revista electrónica de didáctica de las matemáticas*, (2), 1.