Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2022, nº 112, 45-53*

Visualización y estudio sistemático de la parábola con el aporte del software GeoGebra

Renata Teófilo de Sousa
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará
Francisco Régis Vieira Alves
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará
Maria José Araújo Souza
Universidade Estadual Vale do Acaraú

Resumen: *El objetivo de este trabajo es presentar diferentes demostraciones de la parábola, así como las posibilidades de su construcción geométrica, utilizando técnicas de diseño geométrico y el software de geometría dinámica GeoGebra. Como resultado, traemos un conjunto de tres construcciones realizadas en GeoGebra y disponibles para su uso, que pueden ser utilizadas como recurso metodológico por parte del docente.*
Palabras clave: *Parábola; Geometría; GeoGebra.*

Systematic study of the parabola with the contribution of GeoGebra software

Abstract: *The objective of this work is to present different demonstrations of the parabola, as well as possibilities of its geometric construction, using geometric design techniques and the GeoGebra dynamic geometry software. As a result, we bring a set of three constructions made in GeoGebra and available for use, which can be used as a methodological resource by the teacher.*
Keywords: *Parabola; Geometry; GeoGebra.*

1. INTRODUCCIÓN

La Geometría Analítica es una rama de las Matemáticas que trae una relación entre la Geometría y el Álgebra, en la cual podemos analizar cuestiones algebraicas geométricamente y viceversa. En el caso específico de las parábolas, estas son comúnmente estudiadas en la etapa escolar de forma relacionada con la gráfica de una función cuadrática. Sin embargo, su estudio dentro del campo de la Geometría Analítica suele estar disociado del estudio de funciones e incluso de su origen como sección cónica.

En este sentido, el problema a investigar en este trabajo surge de la dificultad de los profesores de Matemática para presentar un abordaje de la parábola diferente a la enseñanza tradicional –el binomio pizarra-pincel–, la poca asociación entre su sesgo algebraico, geométrico y analítico, además de la poca exploración de este tema utilizando tecnologías.

Así, el objetivo de este trabajo es presentar diferentes demostraciones de la parábola, así como las posibilidades de su construcción geométrica, utilizando técnicas de diseño geométrico y el software de geometría dinámica GeoGebra. De esta forma, buscamos ampliar la discusión del tema y facilitar la comprensión del estudiante a partir de la visualización geométrica, considerando que esta relación es poco discutida en los libros de texto.

2. DIFERENTES FORMAS DE CONSTRUIR LA PARABOLA

En esta sección, buscamos acercar diferentes formas de construir una parábola y explorar sus características, con sugerencias didácticas desde técnicas de dibujo geométrico manual hasta las posibilidades con el software de geometría dinámica GeoGebra, con el fin de facilitar la enseñanza y la visualización geométrica del alumno.

2.1. La parábola a través de pliegues de papel

Los pasos para entender esta construcción son, respectivamente:

1. Cuando tomamos una hoja de papel cuadrada (preferiblemente), debemos dibujar una línea d y marcar un punto F dentro de ella, que no pertenece a la línea d;
2. A partir de esto, elija cualquier punto, perteneciente a la línea d y doble la hoja, de modo que el punto elegido coincida con el punto F;
3. Al desdoblar la hoja, debe haber pliegues producidos por el plegado realizado;
4. Repitiendo este proceso varias veces, considerando el mayor número de puntos posible, veremos que todos los pliegues marcados en el papel formarán la figura de una parábola de foco F y directriz d, correspondiente a la línea trazada inicialmente en el papel.

Podemos ver esta construcción ejemplificada en la Figura 1:

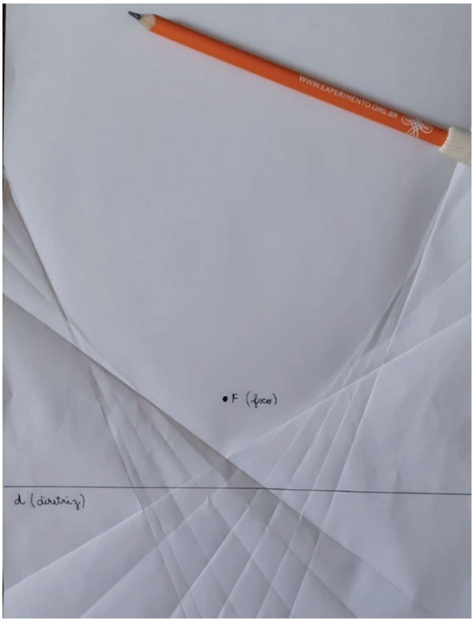

Figura 1

También traemos la posibilidad de transponer esta construcción realizada con lápiz y papel de forma física al entorno de geometría dinámica de GeoGebra, como en la Figura 2:

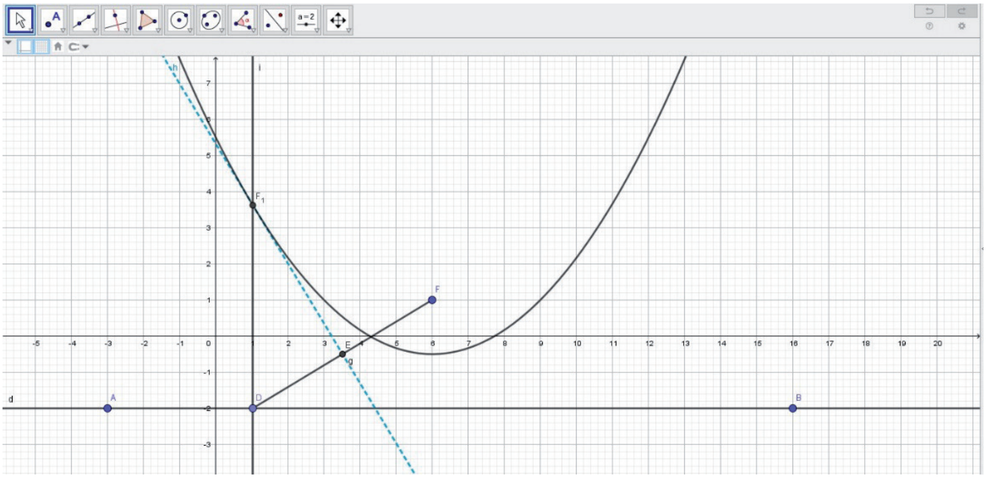

Figura 2

En la Figura 2, el punto *D* deslizante en la línea muestra la curva de la parábola desde la trayectoria del punto *F*. La línea *h* en azul, que se muestra en la Figura 2, representa una línea tangente a la parábola con foco *F* y directriz *d*. Habilitando la función "mostrar trazo", tenemos las diversas rectas tangentes que se pueden trazar y que corresponden al lugar geométrico de la parábola, como se ilustra en la Figura 3:

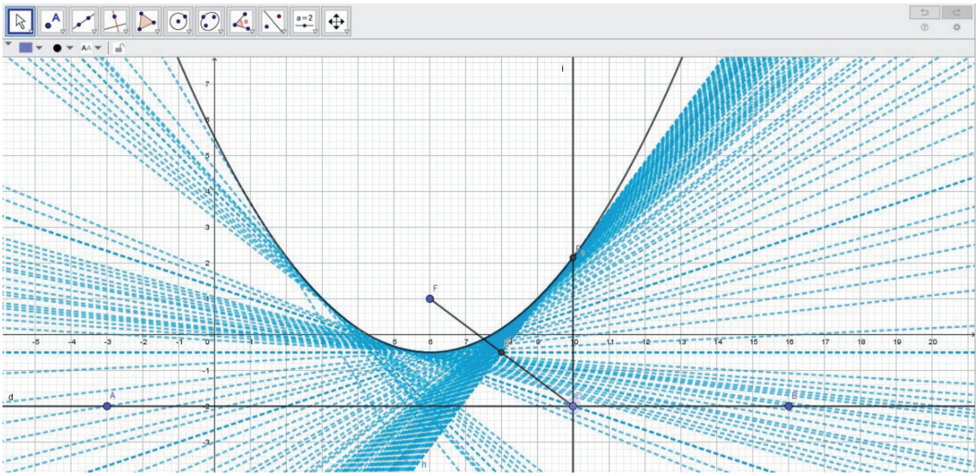

Figura 3

Las líneas tangentes en azul corresponden a pliegues de papel y se pueden construir en una secuencia de pasos simples en GeoGebra, tanto en el software como en la versión de la aplicación para teléfonos inteligentes:

1. Construye una recta *d* que será la directriz de la parábola y un punto *F* fuera de la recta *d*, que corresponderá al foco de la parábola;
2. Construya un punto de deslizamiento *D* sobre la directriz *d*, usando la herramienta "punto en objeto";
3. Dibuja un segmento de línea que conecte el punto *D* con el punto *F*;
4. Con la herramienta "punto medio", construya el punto medio del segmento $\overline{DF}$;
5. Dibujar una línea perpendicular al segmento $\overline{DF}$, pasando por el punto medio construido;
6. Dibuje otra línea perpendicular a la línea directriz *d*, pasando por el punto de deslizamiento *D* en ella;
7. Con la herramienta "intersección entre dos objetos", construya el punto de intersección entre las dos perpendiculares construidas;
8. Con la herramienta "lugar geométrico", haga clic en el punto de deslizamiento *D* sobre la recta directriz y en el punto de intersección de las dos perpendiculares;
9. Aparecerá un lugar geométrico correspondiente a la parábola de foco *F* y directriz *d*;
10. La recta perpendicular que pasa por el punto medio de $\overline{DF}$ es tangente a la parábola. Al hacer clic sobre esta línea con el botón derecho del ratón y "habilitar rastro", mueva el punto deslizante *D* sobre la directriz y se trazarán las líneas tangentes a la parábola, correspondientes a los pliegues del papel.

Esta construcción está disponible en la comunidad geogebra.org y se puede acceder a ella a través de la dirección electrónica: https://www.geogebra.org/m/ujp8gymj.

2.2. Construyendo la parábola con regla y compás

Otra posibilidad de construir la parábola como un lugar geométrico es mediante el uso de técnicas de dibujo geométrico con instrumentos de regla y compás.

Por lo tanto, podemos comenzar el boceto de esta construcción en función de la secuencia de pasos:

1. Dibuja una línea directriz d y cualquier punto fuera de F, que será el foco de la parábola;
2. Dibuje una línea perpendicular a d que pase por F. El punto de intersección de la línea perpendicular y la directriz d es nuestro punto A (como en la Figura 4);
3. Obtener el punto medio del segmento $\overline{FA}$ como el punto V, vértice de la parábola;
4. Dibuja otra línea r paralela a d, a una distancia h_1;
5. Dibujar tantas rectas paralelas a d como se desee, considerando las distancias h_2, h_3, ..., h_n . Mide estas distancias con la apertura de la propia brújula;
6. Coloque la punta seca del compás en F y la apertura formando un radio igual a h_1. A partir de esto, describa un arco que intercepte r_1 en puntos P_1 y P_1';
7. Luego, abriendo el compás con un radio igual a h_2, dibujar otro arco interceptando r_2 hasta P_2 y P_2', y así sucesivamente, hasta los puntos P_n y P_n';
8. La parábola será la curva que pasa V por y los pares de puntos P_1 y P_1', P_2 y P_2', P_3 y P_3' hasta P_n y P_n'.

Un esquema de este modelo se puede presentar en las Figuras 4, 5 y 6:

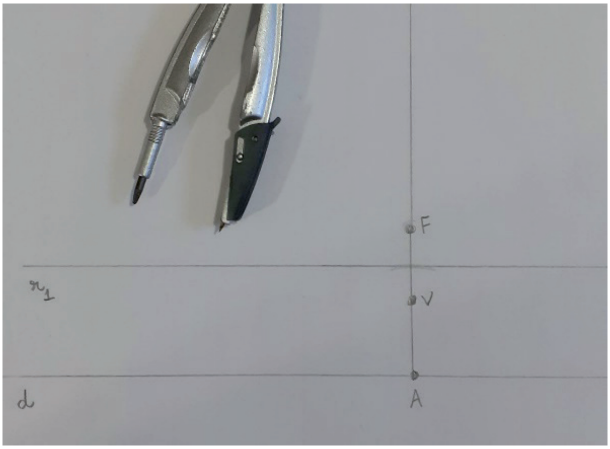

Figura 4

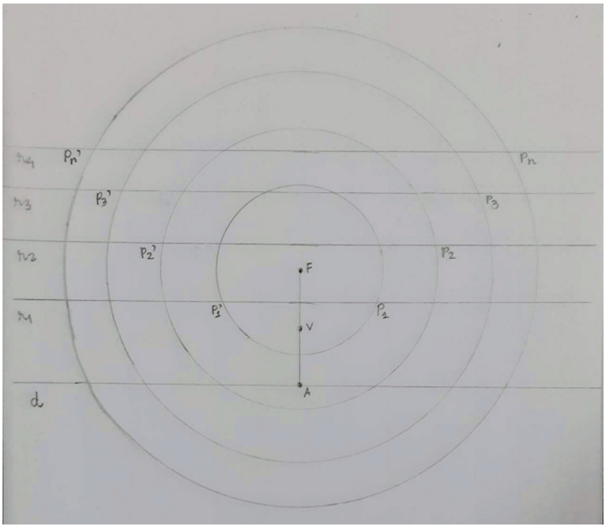

Figura 5

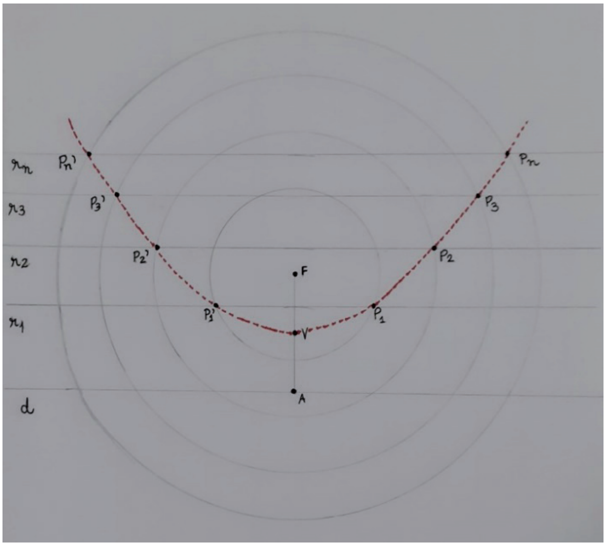

Figura 6

Tenga en cuenta que la curva que pasa por los puntos V, P_n y P_n' forma la parábola indicada. También podemos realizar esta construcción en GeoGebra, como se ilustra en la Figura 7.

Es posible notar la simetría de la parábola cuando dibujamos una línea que pasa por el segmento $\overline{FA}$ e incluso discutirlo en el aula, comparándolo con otros modelos de construcción de la parábola. Esta construcción está disponible para su uso en: https://www.geogebra.org/m/kc7axkh6.

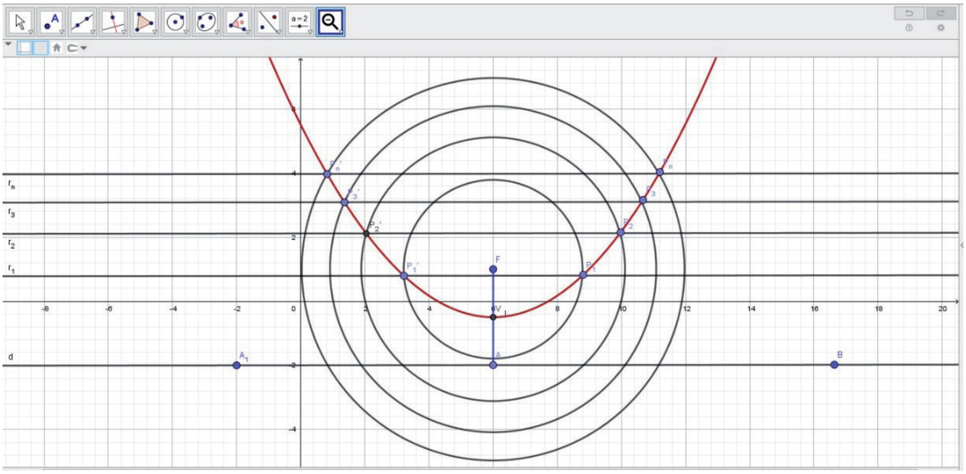

Figura 7

2.3. La parábola a partir de centros de círculos

Una definición menos común, pero no menos importante, de la parábola muestra cómo podemos considerarla desde una perspectiva diferente a comúnmente encontrado en los libros de texto, usando círculos.

La definición usual de una parábola es: La parábola con foco F y directriz recta d es el lugar geométrico de los puntos equidistantes del foco y de la directriz. Si P es un punto en la parábola, la perpendicular a d que pasa por P corta a d en T, tal que $PT = PF$. Por tanto, $C(P, PF2)$es tangente a d en T. Esta construcción se puede invertir, de modo que llegamos a otra definición de parábola, equivalente a la habitual: La parábola es el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que contienen el punto F y tocan la línea d.

De esta definición podemos inferir que: dado un foco F y una directriz d, consideremos todas las circunferencias que pasan por F y son tangentes a d. El conjunto de centros C de todas estas circunferencias corresponden a una parábola de foco F y directriz d. Tal definición se puede ver en la Figura 8:

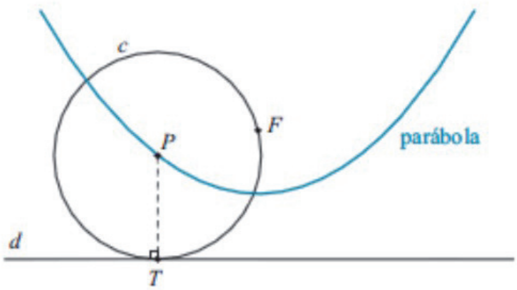

Figura 8

El GeoGebra trae una forma de entender la definición indicada en la Figura 9 de una manera más dinámica, como se ejemplifica en las Figuras 9 y 10:

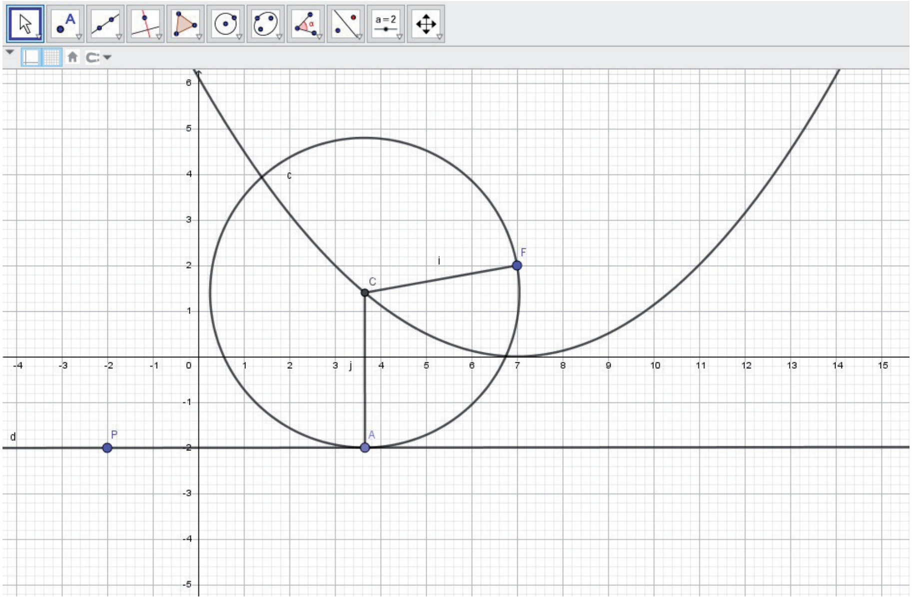

Figura 9

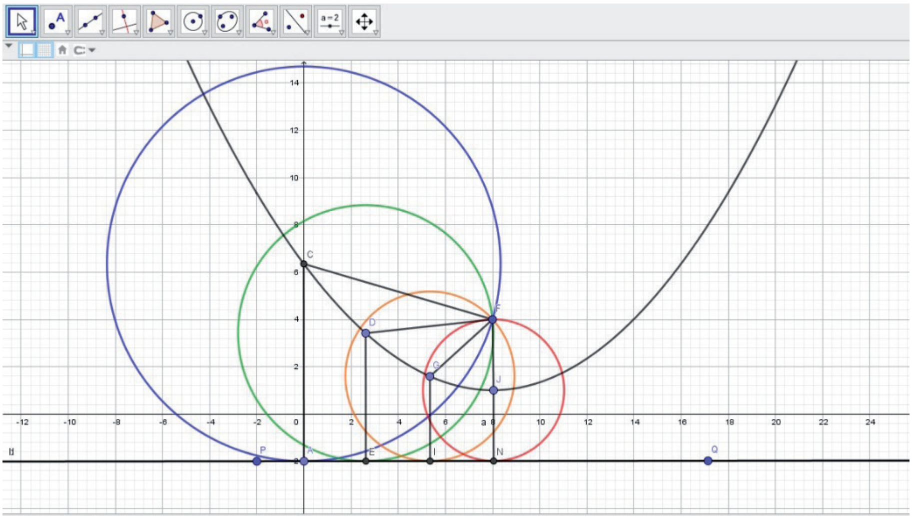

Figura 10

Vale la pena mencionar que este enfoque es inusual, de hecho. Pero también utiliza la distancia entre dos puntos en Geometría Analítica para demostrar que la medida del radio del círculo corresponde a la medida de la distancia del centro de este círculo a la directriz, cumpliendo la definición matemática de una parábola.

Parte del protocolo de esta construcción es similar a la construcción presentada en el inciso anterior, con la diferencia de ver las circunferencias y sus radios. Esta compilación también está disponible en la comunidad geogebra.org y está lista para uso en el aula en https://www.geogebra.org/m/sdkgzavy.

3. CONSIDERACIONES FINALES

Buscamos explorar la parábola y sus características en este trabajo, buscando una comprensión que relacione diferentes formas de construir la parábola y de comprenderla. Las construcciones presentadas pueden ser exploradas en el contexto de las aulas de la Escuela Secundaria.

Además, también trajimos el uso de la tecnología en la exploración de sus elementos utilizando el software de geometría dinámica GeoGebra, a partir de algunas posibilidades de construcción geométrica de la parábola, con el fin de subsidiar el trabajo del profesor de matemáticas y ofrecer una lectura que ayude a la estudiante en la comprensión de este tema, a través de la visualización geométrica.

4. REFERENCIAS

Alves, F. R. V. (2020). Situações Didáticas Olímpicas (SDOs): Ensino de Olimpíadas de Matemática com arrimo no software GeoGebra como recurso na visualização. Alexandria – *Revista de Educação, Ciência e Tecnologia*, *13*(1), 319-349. DOI: https://doi.org/10.5007/1982-5153.2020v13n1p319.

Cerqueira, A. A. (2015). *Parábola e suas aplicações*. Tesis de Maestría, Universidade Federal da Bahia, Salvador. Recuperado el 15 de agosto de 2021, de: https://repositorio.ufba.br/ri/bitstream/ri/22969/1/adriano.pdf

Kilhian, K. (2011). *Construção Geométrica da Parábola com Régua e Compasso.* O Baricentro da Mente. Recuperado el 25 de agosto de 2021, de: https://www.obaricentrodamente.com/2011/06/construcao-geometrica-da-parabola-com.html

Sousa, R. T., & Alves, F. R. V. (2022). Didactic Engineering and Learning Objects: A Proposal for Teaching Parabolas in Analytical Geometry. *Indonesian Journal of Science and Mathematics Education*, 5(1), 1-16.

Souza Júnior, J. C., & Cardoso, A. (2003). Estudo das cônicas com Geometria Dinâmica. *RPM - Revista do Professor de Matemática*, 68, SBM: Sociedade Brasileira de Matemática, 2003.

Venturi, J. J. (2003). *Cônicas e Quádricas.* 5 ed. Curitiba: Livrarias Curitiba.