Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2022, nº 112, 55-72*

Estudio del tratamiento de las demostraciones y deducciones lógicas en los libros de texto de matemáticas y propuesta de mejora al respecto

Manuel Vázquez Mourazos
IES Arcebispo Xelmírez I; España

Resumen: *En la materia de matemáticas del bachillerato científico-tecnológico, se presta especial hincapié a labores relativas al cálculo. En cambio, las demostraciones y los procesos deductivos están ligados a un segundo plano.*
En este artículo se presenta un análisis del tratamiento de las demostraciones y los procesos deductivos en los libros del texto de las dos últimas décadas. Así, para completar este análisis y aportar una nueva visión al respecto, se presentará una propuesta a seguir para incluir estos conocimientos en el bachillerato.
Palabras clave *Demostración matemática; proceso deductivo; bachillerato científico; libros de texto; lógica; razonamiento.*

Study of the treatment of logical proofs and deductions in mathematics textbooks and proposal for improvement in this regard

Abstract: *In the subject of mathematics of the scientific-technological baccalaureate, special emphasis is given to tasks related to calculation. Instead, the proofs and deductive processes are tied to the background.*
This article presents an analysis of the treatment of proofs and deductive processes in the textbooks of the last two decades. Thus, to complete this analysis and provide a new vision in this regard, a proposal will be presented to follow to include this knowledge in high school.
Keywords *Mathematical proof; deductive process; scientific baccalaureate; textbooks; logic; reasoning.*

1. INTRODUCCIÓN

Socialmente se considera que las matemáticas consisten en una multitud de herramientas de cálculo. Pocas veces se relacionan las matemáticas con otras perspectivas diferentes que no sean los números, las operaciones o los problemas. Entonces, ¿son realmente las matemáticas meras herramientas de cálculo? La respuesta es negativa y cualquier persona que haya cursado estudios superiores en matemáticas es consciente de ello. Sin embargo, durante la educación secundaria y el bachillerato sólo se enseña al alumnado esta visión meramente numérica de las matemáticas.

Uno de los conceptos poco trabajados en las aulas de matemáticas, a pesar de su importancia, son las demostraciones y, junto con ellas, los procesos deductivos. Hay muchas definiciones acerca de lo que se entiende por demostración, algunas de ellas pueden ser las siguientes:

> "Podemos considerar la demostración de una proposición p como una cadena finita de transformaciones que se realizan mediante reglas lógicas y que se forman a partir de proposiciones verdaderas[1] o supuestamente verdaderas[2] y las cuales nos conducen a la proposición p." (Lodoño, 2006)

> "Por demostración se entiende el procedimiento en que partiendo de unas ciertas hipótesis y mediante razonamientos lógicos se consigue la conclusión deseada. (…) El propio Euclides[3] demostró que el número de primos es infinito partiendo de que solamente había una cantidad finita de ellos." (Sáenz, 2002, pág. 48)

Tras la lectura de estas definiciones, podemos entender por demostración como un proceso tras el cual se verifica la veracidad de una hipótesis. Este hecho, que a la sociedad coloquial le puede parecer desligado de las matemáticas, es la base de esta ciencia que se basa en teoremas, verdades que son eternas por el hecho de haber sido demostradas. En este sentido, cualquier lector de este artículo se puede hacer las siguientes preguntas: ¿he estudiado alguna demostración en la educación secundaria? ¿alguna vez en clase de matemáticas se habló acerca de este concepto? ¿me comentaron mis profesores del instituto la importancia de las demostraciones en las matemáticas?

Aunque en algunos casos pueda haber alguna respuesta afirmativa, la realidad es que, probablemente, la mayoría de respuestas a estas preguntas sean negativas. Este hecho se vislumbra muy bien en el nivel que tienen los alumnos de nuevo ingreso en las carreras científico tecnológicas, para los cuales existen los conocidos "*Curso 0*" al inicio de estas carreras universitarias para que sus nuevos alumnos adquieran el nivel necesario en este sentido.

Con esta perspectiva, se hace esencial la introducción de las demostraciones y de los procesos deductivos como un pilar fundamental de la enseñanza de las matemáticas. En algunos artículos como (Vázquez Mourazos, 2020) se aporta una estrategia de introducción de conceptos relacionados con las demostraciones y el pensamiento lógico desde la perspectiva de la secundaria. Sin embargo, en este artículo se pretenderá ir más allá y

1. Las proposiciones verdaderas son las que se conocen como tautologías.
2. Las proposiciones supuestamente verdaderas son las que se conocen con el nombre de hipótesis.
3. Lo que hizo Euclides fue llegar a una contradicción suponiendo que el número de primos era finito.

hacer un análisis del tratamiento de las demostraciones en los libros de texto en las últimas dos décadas. Todo ello, para proponer una serie de ejemplos que ayuden a la introducción de estos conceptos en los estudios del bachillerato, etapa previa a la universidad.

2. ESTUDIO DEL TRATAMIENTO DE LAS DEMOSTRACIONES Y LOS PROCESOS DEDUCTIVOS EN LOS LIBROS DE TEXTO

Para dar comienzo a este apartado, se empezará haciendo referencia a algunos trabajos que ya han estudiado este tema. Así, en el artículo (Ruiz de Gauna Gorostiza, Dávila , Etxeberria, & Sarasua, 2013) se hace un análisis de los libros de texto durante los primeros años de la democracia hasta la LOGSE. A este respecto, el artículo concluye exponiendo: "*Los libros de la primera etapa de la LGE se llenaron de escritura simbólica y de métodos deductivos, eran libros del profesor, no del alumno y algunos de ellos muy formalistas*" (pág. 276). Sin embargo, se hace notar, al mismo tiempo, que según avanzaba la sociedad y se abría España tras la dictadura, los libros de texto también lo hacían hacia una perspectiva más pedagógica. En la publicación se refleja diciendo: "*Ya en la segunda etapa de la LGE, había textos en los que se proponían caminos, se hacían sugerencias, se utilizaban las gráficas para indagar en las demostraciones y se abrían líneas innovadoras.*" (pág. 276).

Entonces, viendo esta primera reflexión sobre lo que acontecía hace en torno a 50-60 años, se pueden obtener algunas conclusiones. Pues bien, se indica que el nivel de rigurosidad que se planteaba en la primera etapa de la LGE se enfocaba hacia el profesorado, pero no hacia el alumnado debido a su complejidad. Sin embargo, el modelo del que se habla en la segunda etapa se aproxima más a lo que debería ser la educación matemática. Es decir, se trata de un modelo que guía progresivamente a los alumnos hacia el conocimiento haciendo que éstos descubran por ellos mismos las propiedades, las fórmulas y sean capaces de vislumbrar lo que se pretende mostrarles a través de ejemplos gráficos u otras técnicas. Así, lo ideal sería un modelo en el que no se agobie al alumnado con conceptos nuevos pidiéndoles un nivel de rigor que aún no dominan, pero que sí se les haga una introducción progresiva y adecuada hacia el nivel que tendrán que dominar en un futuro.

Como se ha visto con esa muestra del artículo citado, los libros de texto dependen del momento histórico y de la sociedad, pero, al mismo tiempo, también lo hacen de las leyes educativa o de las editoriales entre otros diversos factores. Para mostrar un análisis más cercano a nuestro tiempo, se hará un repaso por algunos manuales de las dos últimas décadas.

En la **Figura 1** se observa un extracto del libro de primer curso del bachillerato de (Colera, Oliveira, García, & Santaella, 2012). En dicha imagen, se puede observar un tratamiento muy pobre de las demostraciones. Únicamente se limita a enumerar una serie de resultados que los alumnos deberán creer con fe ciega y sin haberlos analizado previamente. No se aporta una demostración, ni una interpretación de la demostración, ni siquiera unas pautas del motivo por el cual dichos resultados son ciertos. Bien es verdad que se tratan de teoremas muy obvios e incluso intuitivos. Sin embargo, si el único aliciente que tienen los alumnos para creer en dichos resultados es el simple hecho de que éstos aparecen reflejados en el libro de texto, se estará a contribuir a un crecimiento muy pobre e inexistente del espíritu crítico de los estudiantes.

TEOREMAS

T.1 $P[A'] = 1 - P[A]$

T.2 $P[\varnothing] = 0$

T.3 Si $A \subset B$, entonces $P[B] = P[A] + P[B - A]$

T.4 Si $A \subset B$, entonces $P[A] \leq P[B]$

T.5 Si $A_1, A_2, \ldots, A_k$, son incompatibles dos a dos, entonces:

$$P[A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k] = P[A_1] + P[A_2] + \ldots + P[A_k]$$

T.6 $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$

T.7 Si el espacio muestral E es finito y un suceso es $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, entonces:

$$P[S] = P[x_1] + P[x_2] + \ldots + P[x_k]$$

Figura 1.Teoremas de estadística en matemáticas I de Anaya (2012), pág. 353.

Esto hace cuestionar si a lo largo de los últimos años esta situación haya sido análoga. Por consiguiente, es interesante analizar los antiguos libros de texto y ver su evolución. En este sentido, las diferencias son notorias dependiendo también de las editoriales que se consideren, entre otros factores.

Teorema do valor medio de Lagrange

Sexa f *unha función* **continua en [a, b]** *e* **derivable en (a, b)**. *Existe polo menos un punto* c ∈ (a, b) *que verifica:*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Demostración

Sexa a ecuación da recta que pasa polos puntos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$:

$$g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

e consideremos a función h definida como:

$$h(x) = f(x) - g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a)$$

Observemos que a función h verifica as condicións do teorema de Rolle, xa que é continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) e $h(a) = h(b) = 0$. Polo tanto, existe algún $c \in (a, b)$ para o que $h'(c) = 0$. Mais:

$$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Joseph Louis de Lagrange

Matemático francés (1736-1813).

Entre toda a súa obra dedicada ó campo da análise, a mecánica e a mecánica celeste, cabe salientar a *Théorie des fonctions analytiques*, publicada en 1797.

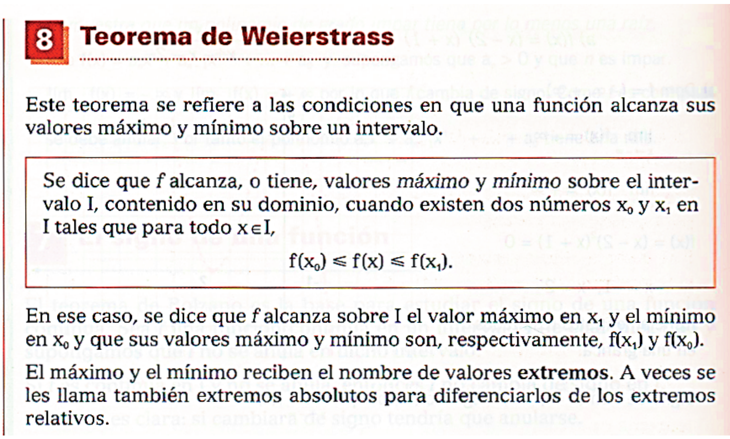
Nesta obra encontrou A. L. Cauchy os puntos de partida para resolver as deficiencias existentes ata daquela nos fundamentos da análise.

Figura 2. Teorema del valor medio en matemáticas II de Rodeira (2001), pág. 265.

En la **Figura 2** se puede ver un extracto del manual (Gómez Gejo & García Sanmartín (Eds.), 2001) de la editorial Rodeira. En ella, se muestra como a lo largo del libro se observan ciertos recuadros (como el que se muestra) donde se indican teoremas relevantes del temario con una demostración del mismo donde se utilizan conocimientos aprendidos en temas anteriores. De este modo, se fomenta esa asociación de ideas y la integración del conocimiento.

Esto podría hacer pensar que entre finales de los 90's y principios del nuevo milenio, los libros de texto tenían otro enfoque diferente del que vienen teniendo en los últimos años en lo que se refiere a los procedimientos deductivos. Sin embargo, esto no tiene por qué ser así, el hecho de encontrar una referencia como la que se ha mostrado no es muestra de que realmente en cursos pasados fuese mejor el tratamiento de estos aspectos. De hecho, dependiendo de la editorial que se considere, el tratamiento es muy diverso.

Se puede tomar como ejemplo (Álvarez & Ruíz, 1999) de la editorial Vicens Vives. Este libro de texto, del segundo curso del bachillerato, data del año 1999 pero su tratamiento de las demostraciones dista mucho de presentarlas como algo relevante e importante. En las páginas 185, 188 o 212 se muestran diferentes teoremas que carecen de una demostración o de una interpretación geométrica que las explique. Únicamente se presentan los resultados de la forma en que se muestra en la **Figura 3** y se acompañan de una serie de ejercicios resueltos con los que tener un modelo que seguir en la realización de los ejercicios que se proponen para los alumnos.



8 Teorema de Weierstrass

Este teorema se refiere a las condiciones en que una función alcanza sus valores máximo y mínimo sobre un intervalo.

Se dice que *f* alcanza, o tiene, valores *máximo* y *mínimo* sobre el intervalo I, contenido en su dominio, cuando existen dos números x_0 y x_1 en I tales que para todo $x \in I$,

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1).$$

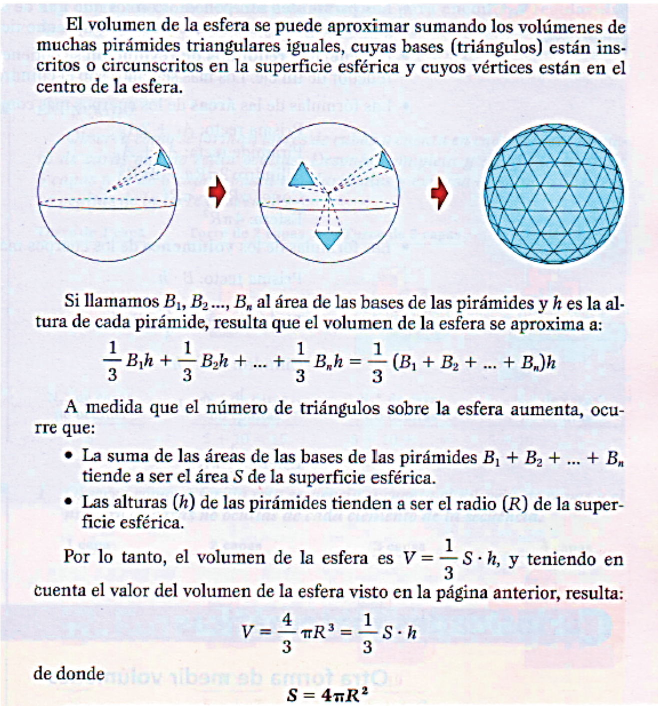
En ese caso, se dice que *f* alcanza sobre I el valor máximo en x_1 y el mínimo en x_0 y que sus valores máximo y mínimo son, respectivamente, $f(x_1)$ y $f(x_0)$. El máximo y el mínimo reciben el nombre de valores **extremos**. A veces se les llama también extremos absolutos para diferenciarlos de los extremos relativos.

Figura 3. Teorema de Weierstrass matemáticas II en Vicens Vives (1999), pág. 188.

Sin embargo, aunque tiene este tipo de carencias en lo que se refiere al proceso de razonamiento matemático, tiene ciertos aspectos muy interesantes desde el punto de vista del lenguaje matemático. Pues bien, para que resulte más comprensible el estudio de la estadística, este manual incluye entre sus contenidos las Leyes de Morgan y los aspectos básicos de la teoría de conjuntos que son esenciales en el lenguaje matemático y para la buena comprensión de aspectos relacionados con probabilidad. Este hecho se puede comprobar en las páginas 24-29 de dicha referencia donde incluso se expone lo que es un diagrama de Venn y los utiliza para ejemplificar y mostrar de forma visual los resultados introducidos.

Para entender la filosofía que siguen estos manuales en el bachillerato, también es necesario ver la forma en que estos mismos libros de texto tratan estos temas en los últimos cursos de la E.S.O. Por ello, teniendo en cuenta esta misma época (finales de la década de los 90's principios del 2000) se analizará algún manual de estos últimos cursos de la educación secundaria obligatoria. Concretamente, se tomaron los ejemplares de (Gill Martos, 1999) relativo a 3º de la E.S.O y (Colera R. , 1999) correspondiente al último curso de la misma etapa educativa.

En el ejemplar de (Gill Martos, 1999) es especialmente interesante algunas muestras de integración del conocimiento con el fin último de deducir propiedades nuevas a partir de las que ya son conocidas. Un ejemplo de esta práctica se encuentra en la página 163 cuando se deduce la fórmula de la superficie de la esfera utilizando la expresión del volumen de una pirámide y del volumen de la esfera (vistos con anterioridad en el temario del libro). Además, con esta técnica, que se puede ver en la **Figura 4**, se está introduciendo al alumnado, sin que éste lo sepa, en los fundamentos básicos del cálculo integral al mostrar un procedimiento idéntico al método exhaustivo[4] que ya utilizó Arquímedes en su tiempo para obtener el área de una circunferencia. Además, son ideas que se utilizan con frecuencia en campos avanzados como el concepto de discretización dentro de la matemática aplicada.


El volumen de la esfera se puede aproximar sumando los volúmenes de muchas pirámides triangulares iguales, cuyas bases (triángulos) están inscritos o circunscritos en la superficie esférica y cuyos vértices están en el centro de la esfera.

Si llamamos $B_1, B_2 ..., B_n$ al área de las bases de las pirámides y h es la altura de cada pirámide, resulta que el volumen de la esfera se aproxima a:

$$\frac{1}{3}B_1h + \frac{1}{3}B_2h + ... + \frac{1}{3}B_nh = \frac{1}{3}(B_1 + B_2 + ... + B_n)h$$

A medida que el número de triángulos sobre la esfera aumenta, ocurre que:

- La suma de las áreas de las bases de las pirámides $B_1 + B_2 + ... + B_n$ tiende a ser el área S de la superficie esférica.
- Las alturas (h) de las pirámides tienden a ser el radio (R) de la superficie esférica.

Por lo tanto, el volumen de la esfera es $V = \frac{1}{3}S \cdot h$, y teniendo en cuenta el valor del volumen de la esfera visto en la página anterior, resulta:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{3}S \cdot h$$

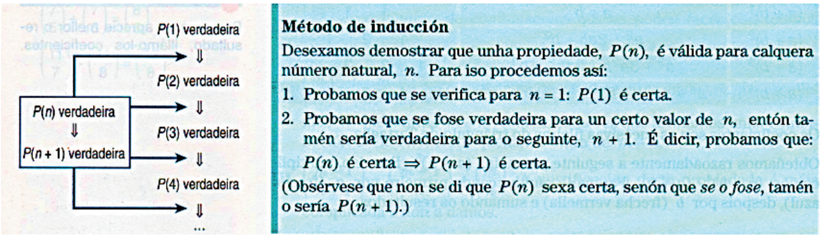
de donde

$$S = 4\pi R^2$$

Figura 4. Demostración de la superficie de una esfera en 3º ESO en Santillana, pág. 163.

4. Arquímedes (287 B.C. – 212 B.C) utilizó un cálculo integral limitado pero riguroso, que precedió en casi 200 años a la invención del Cálculo Integral de Newton, y que usó para calcular áreas y volúmenes de figuras curvilíneas.

Por otra parte, en (Colera R. , 1999) se introducen algunos métodos de deducción y demostración como puede ser el método de inducción, tal y como se puede apreciar en la **Figura 5**. Con esta perspectiva, se procura introducir algunos procedimientos básicos que son utilizados de forma asidua en el pensamiento matemático. Además, con la ayuda de este tipo de razonamiento abstracto, se está trabajando conjuntamente aspectos del lenguaje matemático y del proceso del simbolismo para representar situaciones reales mediante la simbología matemática. De este modo, se estaría trabajando conjuntamente ambos aspectos, los procesos de razonamiento y el lenguaje simbólico, dentro de una misma actividad.



Método de inducción

Desexamos demostrar que unha propiedade, $P(n)$, é válida para calquera número natural, n. Para iso procedemos así:

1. Probamos que se verifica para $n = 1$: $P(1)$ é certa.
2. Probamos que se fose verdadeira para un certo valor de n, entón tamén sería verdadeira para o seguinte, $n + 1$. É dicir, probamos que: $P(n)$ é certa $\Rightarrow$ $P(n + 1)$ é certa.

(Obsérvese que non se di que $P(n)$ sexa certa, senón que *se o fose*, tamén o sería $P(n + 1)$.)

Figura 5. Método de Inducción en 4º ESO en Anaya (1999), pág. 264.

Así, se pueden sacar, a priori, algunas conclusiones sobre lo visto hasta al momento. Se puede apreciar que a finales de la década de los 90's y principios de los 2000, había un interés mayor sobre la introducción de los procesos deductivos y el entendimiento del alumnado del simbolismo matemático para expresar la realidad. De hecho, la introducción de estos conceptos en los últimos cursos de la E.S.O propicia que esta labor, a lo largo del bachillerato, fuese mucho más fructífera.

Sin embargo, a pesar de la perspectiva que aportan en los extractos sacados de estos libros de texto, lo cierto es que los ejercicios y actividades que plantean, de forma genérica, son del tipo calcular o resolver. Así mismo, el hecho de que aparezcan reflejados en los libros de texto demostraciones o razonamientos como los vistos en la **Figura 2**, la **Figura 4** o la **Figura 5** son útiles siempre y cuando los docentes hagan hincapié en dichos enfoques. Pero, si, por el contrario, los docentes se limitan a que los alumnos realicen los ejercicios de cálculo de dichos ejemplares, únicamente aquellos alumnos con un poco de curiosidad aprovecharán los recursos mostrados. Así mismo, sí es cierto que a principios del presente milenio los libros de texto sí tenían presente esta perspectiva en sus ejemplares, pero no lo reflejan en sus actividades o ejercicios de una forma clara y concisa provocando que los alumnos practiquen y manipulen las demostraciones, los razonamientos y la escritura matemática para manejar con soltura estos aspectos del conocimiento.

En esta misma línea, se sitúan manuales más actuales. En el ejemplar de (Nieto, 2011), un manual de 1º de Bachillerato del año 2011, se sigue una estructura genérica en todos los temas. Se presentan lecciones muy cargadas de contenido resaltando en cuadros como en los que se muestra en la **Figura 6** los resultados a los que se va llegando. Posteriormente, se presentan ejercicios resueltos y explicados para que, luego, en la última de las páginas de cada lección los pupilos reproduzcan estas resoluciones en otros ejercicios del mismo estilo, pero con números diferentes.

- **El teorema de los senos** afirma que, en un triángulo cualquiera, los lados son proporcionales a los senos de sus ángulos opuestos.

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$$

Figura 6. Teorema del seno en Editex (2011), pág. 96.

Así, aumenta una mala praxis que se incrementa según el paso del tiempo. Al igual que sucedía en la **Figura 1** donde se muestra un extracto del manual (Colera, Oliveira, García, & Santaella, 2012), la filosofía seguida es la similar a este caso. Se enmarcan los resultados en recuadros llamativos para que los alumnos tengan a mano las herramientas a usar en las resoluciones mecánicas de los ejercicios.

Si $f(x) = x^n$ entonces $f'(x) = n\cdot x^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Demostración:

Para demostrarlo usamos la definición de derivada y la regla de *Ruffini* para calcular el límite:

$$b^n - x^n = (b-x)\cdot(b^{n-1} + x\cdot b^{n-2} + x^2\cdot b^{n-3} + \ldots + x^{n-2}\cdot b + x^{n-1})$$

$$f'(x) = \lim_{b\to x}\frac{f(b)-f(x)}{b-x} = \lim_{b\to x}\frac{b^n-x^n}{b-x} = \lim_{b\to x}\frac{(b-x)\cdot(b^{n-1}+x\cdot b^{n-2}+x^2\cdot b^{n-3}+\ldots+x^{n-2}\cdot b+x^{n-1})}{b-x} =$$

$$\lim_{b\to x}\left(b^{n-1}+xb^{n-2}+\ldots+x^{n-1}\right) = nx^{n-1}\text{. c.q.d.}$$

Figura 7. Demostración de la fórmula de la derivada de la n-ésima potencia en Marea Verde (plataforma web), pág. 353.

Para terminar con este análisis de los libros de texto, en la **Figura 7** se observa un extracto de los apuntes actuales que se pueden obtener en la plataforma “Marea Verde” (Muñoz & Moya, s.f.). En dicho extracto, se vuelve a ver una temática recurrente, se observa el resultado resaltado en un recuadro y la demostración aparece como a modo de curiosidad. Luego, en los ejercicios no se observa ninguna reflexión acerca de las demostraciones o de los resultados mostrados y tampoco se pide que los alumnos intenten deducir y escribir matemáticamente algún resultado sencillo.

Así pues, se comprueba que el uso de los libros de texto no es suficiente para trabajar las dimensiones del razonamiento matemático y del lenguaje simbólico. Sin embargo, si pueden resultar de apoyo aquellos manuales que incluyan alguna demostración para que el docente, mediante su explicación, apoye visualmente el contenido de los manuales con el fin de que los alumnos comprendan las dimensiones de los diferentes razonamientos. De hecho, si la única relación que tienen con las demostraciones es que éstas aparecen a continuación de los resultados a modo de curiosidad, los alumnos toman la concepción de que éstas son irrelevantes. En este sentido, en (Wheeler, 1990, pág. 3) se expresa esta idea diciendo: “*son simplemente un juego, porque saben cuál es resultado*”. De esta forma, se pueden extraer varias ideas básicas de las reflexiones obtenidas de este análisis:

- El enfoque de los libros de texto no ha variado en gran medida en las dos últimas décadas. Aun así, se aprecian diferencias en la forma en la que éstos presentan sus ejercicios y actividades y su evolución al respecto se enfoca hacia los conocidos "*ejercicios tipo*" que consisten en la resolución metódica y reproductiva de un método de cálculo.
- En general, carecen de ejercicios y actividades que impliquen razonar y aplicar métodos lógicos para llegar a un resultado. En otras palabras, no se muestran actividades de una taxonomía de Bloom avanzada o de un pensamiento matemático avanzado que permita trabajar los procesos de deducción y demostración junto con el lenguaje matemático.
- De forma frecuente, aparecen recuadros enmarcando los resultados que deben de utilizar los alumnos en esos ejercicios metódicos que se presentan al final de las unidades. Sin embargo, en algunos de ellos se presentan, a continuación de dichos recuadros, las demostraciones de los resultados mostrados, por lo que los docentes deberían de explicar y razonar junto con sus alumnos estos procedimientos para que éstos se acostumbren al escepticismo y razonamiento científico.

3. PROPUESTA DE MEJORA

En este apartado se procederá a aportar una propuesta de mejora a modo de ejemplificación para mejorar la perspectiva vista en la sección anterior. Con ello no se pretende dar una receta infalible al respecto, pues el tema a tratar no tiene una solución única e imbatible, sino que se intentará formular una serie de pautas a seguir en base a lo visto hasta el momento.

Con este afán, se tomará una serie de ejemplos del currículum de bachillerato en los que se puede dar un enfoque diferente para introducir las novedades aquí planteadas. Así, se planteará una serie de ejercicios y actividades redactas de un modo diferente para involucrar en ellas el empleo de técnicas de demostración y conocimientos del lenguaje matemático.

3.1. Demostración de la suma de *n* los primeros números impares

Uno de los contenidos en el bloque de álgebra en el bachillerato son las sucesiones de números. De hecho, en el decreto 86/2015 (Decreto 86/2015, 2015) uno de los contenidos en dicha etapa es el B2.3 que dice: "*Sucesiones numéricas: término general, monotonía y anotación*". En este sentido, uno de los contenidos fundamentales en esta unidad es la suma de los términos de una sucesión. Para ello, se dota de una serie de fórmulas a los alumnos, pero, en muchas ocasiones, sin demostrarlas.

Por eso, una buena iniciativa sería que los alumnos tentasen demostrar el sentido de las fórmulas que utilizan en lugar de creerlas ciegamente. Con este afán, se pueden introducir los diferentes métodos de demostración que los alumnos deberían de manejar. Por ejemplo, uno de los contenidos del bachillerato establecidos en el decreto 86/2015 (Decreto 86/2015, 2015) dice: "*Métodos de demostración: resolución al absurdo, método de* *inducción, contraejemplos, razonamientos encadenados, etc.”*. Por ello, se plantea la siguiente actividad:

Actividad: Deduce una fórmula para la suma de los n primeros números naturales impares. Para ello, ten en cuenta que el n-ésimo número natural impar se puede escribir como $2n-1;\ \forall\ n \in \mathbb{N}$ y ten presente la siguiente imagen que servirá de ayuda:

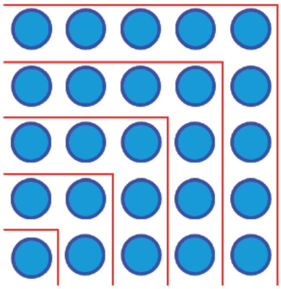


Figura 8: Suma de los n primeros números impares

Una vez obtenida la fórmula tienes una suposición de que estás en lo correcto. Sin embargo, no la has comprobado para todos los números y, por tanto, no la has demostrado. Para asegurar que es correcta demuéstrala por inducción siguiendo los siguientes pasos:

1. Comprueba si realmente es cierta la fórmula (pues podría no serlo), para ello, observa si se verifica para los primeros números más sencillos.
2. Si has encontrado algún número para el que no se verifique entonces la fórmula es incorrecta. En caso contrario, debes tratar de buscar una forma de comprobar la fórmula para cualquier número, es decir, para un número arbitrario n.
3. Ya que has comprobado que la fórmula es cierta para los primeros números naturales impares, puedes suponer que se cumple para n-1.
4. Ante la anterior suposición, conoces la suma de los n-1 primeros números impares. Entonces, sumándole a dicha suma el valor del n-ésimo número impar, deberías de obtener la fórmula que calculaste.

En esta actividad, empleando un recurso gráfico, se intenta despertar el sentido deductivo de los alumnos. Se plantea que deduzcan una fórmula para la suma de los *n* primeros números impares. Sin embargo, se les indica que la fórmula obtenida debe ser demostrada, pues, en caso contrario, no tienen ninguna certeza de que sea válida para el caso general (se fomenta el escepticismo científico). Así, se les indica en primer lugar que la comprueben con algunos números sencillos para que, luego, si creen que es válida, procedan mediante inducción. De este modo, se darían cuenta que n puede ser cualquier número natural (el verdadero significado de $\forall\ n \in \mathbb{N}$) y, por tanto, no estarían comprobando que la fórmula se cumple para un número concreto, sino para cualquier n arbitrario. Con esta propuesta se estaría poniendo en práctica el contenido de la **Figura 5**.

3.2. Deducción del Teorema de Darboux y análisis del mismo

El análisis matemático es una de las ramas más estudiadas en el bachillerato. En esta etapa, resultados como el Teorema de Bolzano, Weierstrass, del valor medio o de Darboux. Por ello, sería interesante, al igual que en los anteriores apartados, guiar el conocimiento de los alumnos haciendo que éstos construyan sus propias conclusiones y resultados. Algunos de estos Teoremas, como puede ser el Teorema de Darboux, se pueden deducir de otros anteriores. Para ello, únicamente es necesario utilizar alguna función matemática o idea principal de la que partir.

Teorema de Darboux: Sea $f(x)$ una función continua definida en un intervalo $[a, b]$ y k un número comprendido entre los valores $f(a)$ y $f(b)$, es decir, $f(a) \leq k \leq f(b)$, entonces, existe algún valor $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = k$

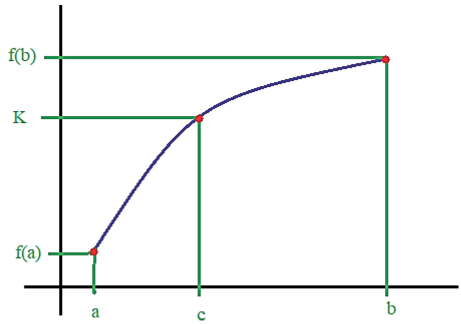


Figura 9: Teorema de Darboux

Actividad: Toma la función $g(x)$ que se define como,

$$g(x) = f(x) - k$$

y aplicándole el Teorema de Bolzano en el intervalo $[a, b]$, intenta demostrar el Teorema de Darboux.

Como se puede observar en la actividad anterior, se presenta una actividad con las indicaciones necesarias para poder demostrar el Teorema de Darboux. De este modo, se está ayudando a asociar conocimientos al implicar el Teorema de Bolzano y mostrar que, en matemáticas, al igual que en la vida misma, el conocimiento está integrado. Así, es mucho más interesante que los alumnos puedan llegar a construir su conocimiento que sencillamente tomarlo como cierto. Además, el resultado que se pretende demostrar en este ejercicio es muy intuitivo y resulta casi obvio, por lo que la construcción de su demostración inducirá implícitamente a la consecución del aumento del escepticismo científico por parte del alumnado al ver que nada se toma por verídico hasta su demostración.

Obviamente, este procedimiento no se puede seguir con todos los Teoremas. Pues bien, no todos ellos tienen la misma complejidad y es notoria la dificultad de que los alumnos puedan llegar a deducir la demostración de ciertos resultados. En estos casos, lo más conveniente sería mostrar la demostración acompañada de una interpretación geométrica que aporte un apoyo visual a la abstracción que se está a producir en el sentido matemático. Sin embargo, una de las mayores problemáticas en este sentido es que los alumnos suelen dispersarse y tomar como ciertas las conclusiones de los teoremas que se presenten. Por ello, en estos casos es conveniente poner ejemplos que contradigan las hipótesis para que se den cuenta de su necesidad. Además, esto contribuirá a una mejor comprensión de las dimensiones del enunciado de los teoremas (hipótesis & tesis) al mismo tiempo que aclarará la interpretación de la demostración que se dé en cada uno de ellos.

Teorema de Weierstrass: Una función $f(x)$ continua definida en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$, alcanza sus valores máximo y mínimo en el intervalo $[a, b]$.

Actividad: Contesta a las siguientes cuestiones:

1. Considera la función $f(x) = e^x$ y el intervalo $[0, 1]$. ¿Cuál es su máximo en dicho intervalo? ¿Y el mínimo? ¿Qué relación guarda lo obtenido con el Teorema de Weierstrass?
2. Si ahora consideras el intervalo $[0, +\infty)$. ¿Cuál es su mínimo en dicho intervalo? ¿Y el máximo? ¿Qué relación guarda lo obtenido con el Teorema de Weierstrass?
3. Pasa a considerar ahora el intervalo $(0, 1)$. ¿Cuál es su máximo en este nuevo intervalo? ¿Y el mínimo? ¿Qué relación guarda lo obtenido con el Teorema de Weierstrass?

En la actividad anterior se muestra un ejemplo de cómo se podría abordar la interiorización por parte de los alumnos de la importancia de las hipótesis en un teorema. Normalmente, los ejercicios de los libros de texto son idílicos y apenas presentan problemáticas con los teoremas que se introducen a lo largo de los temas. De este modo, no se suelen contradecir las hipótesis y los alumnos conciben que los resultados se pueden aplicar sin tener ninguna condición en cuenta. Por ello, mostrar una serie de preguntas, como las que se pueden observar, en las que se contradigan las hipótesis de los teoremas ayuda a que se tenga en cuenta esta consideración pocas veces tratada. De este modo, se estarán tratando contenidos de los manuales como el de la **Figura 3**.

3.3. La probabilidad y su relación con la teoría de conjuntos

En la rama de la estadística y la probabilidad es fundamental la teoría de conjuntos. Esta teoría involucra conocimientos básicos del lenguaje matemático y que, al mismo tiempo, son muy intuitivos. Además, también se pueden crear los teoremas básicos de la probabilidad a partir de una serie de axiomas. La construcción por axiomas está muy presente en las matemáticas y, de hecho, fue así como Euclides creó su geometría en su obra *Los elementos* (escrito entorno al 300 a.C).

Actividad: Se partirá de los siguientes AXIOMAS:

- Axioma 1: Para cualquier suceso S, $P(S) \geq 0$

- Axioma 2: Dados dos sucesos incompatibles, la probabilidad de que su unión se produzca es igual a la suma de sus probabilidades. Esto es:

$$\text{Si } A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$$

- Axioma 3: La probabilidad total es $P(E) = 1$:

Entonces, utilizando los axiomas anteriores se pretenderá demostrar los siguientes resultados:

Teorema 1: Dado un suceso A y A', su suceso contrario, entonces $P(A') = 1 - P(A)$.

Teorema 2: La probabilidad del suceso vacío, es decir, del $\emptyset$, es nula. Esto es $P(\emptyset) = 0$.

En la actividad anterior se muestra un ejemplo de una actividad que podría ser desarrollada por alumnos de bachillerato. Al realizarla estarían practicando la creación de resultados por axiomas y, conjuntamente, la concatenación de razonamientos al enlazar un hecho con su consecuencia y así sucesivamente hasta llegar al resultado final. Además, con esta actividad se está a introducir el concepto de "*axioma*" y, con él, una introducción a la creación del pensamiento y razonamiento matemático a partir de ellos.

Por otro lado, la estadística es una rama muy dinámica de las matemáticas que permite crear una gran variedad de propuestas muy variadas. Por ello, se puede utilizar su dinamismo como una oportunidad para introducir y reforzar los procesos del pensamiento deductivo. Con este afán, se presenta otra posible actividad que permitiría a los alumnos deducir una fórmula observando su comportamiento para que, luego, procurasen demostrarla a partir del propio experimento haciendo una generalización del mismo.

Por otro lado, la estadística es una rama muy dinámica de las matemáticas que permite crear una gran variedad de propuestas muy variadas. Por ello, se puede utilizar su dinamismo como una oportunidad para introducir y reforzar los procesos del pensamiento deductivo. Con este afán, se presenta otra posible actividad que permitiría a los alumnos deducir una fórmula observando su comportamiento para que, luego, procurasen demostrarla a partir del propio experimento haciendo una generalización del mismo.

Como realizar un experimento manual es muy tedioso en estadística (pues se deben hacer muchas repeticiones para obtener resultados fiables) se utilizará el software estadístico de libre uso R. En la **Figura 10** se muestra un código que representa el experimento de lanzar un dado n veces (en el caso del código se toma 100000 como tamaño de muestra). Con la ayuda de este código los alumnos pueden realizar la siguiente actividad donde obtendrán conclusiones del experimento realizado previamente.

```r
n=100000;                                    #tamaño de la muestra
muestra=sample(1:6,size=n,replace=TRUE) #creación de la muestra
A=0; B=0; C=0; AUB=0; AYB=0;  AnoC=0;   #contadores a cero
for (i in 1:n){                         #conteo de las repeticiones
  if (muestra[i] == 1) {A=A+1; B=B+1; AUB=AUB+1; AYB=AYB+1; AnoC=AnoC+1;}
  else if(muestra[i] == 2) {A=A+1; C=C+1; AUB=AUB+1;}
  else if(muestra[i] == 3) {A=A+1; B=B+1; AUB=AUB+1; AYB=AYB+1; AnoC=AnoC+1;}
  else if(muestra[i] == 4) {A=A+1; C=C+1; AUB=AUB+1}
  else if(muestra[i] == 5) {B=B+1; AUB=AUB+1;}
}
PA=A/n;       #frecuencia de A
PB=B/n;       #frecuencia de B
PC=C/n;       #frecuencia de C
PAUB=AUB/n;   #frecuencia de la unión de A y B
PAYB=AYB/n;   #frecuencia de la intersección de A y B
PAnoC=AnoC/n; #frecuencia de que suceda A pero no C
```

Figura 10: Código R para un experimento deductivo

Actividad: En el código se representa el experimento de lanzar un dado n veces. Considerando los siguientes conjuntos, que representan el suceso de que al lanzar un dado se obtenga alguno de los valores que contienen dichos conjuntos,

$$A = \{1,2,3,4\} \qquad B = \{1,3,5\} \qquad C = \{2,4\}$$

los valores en el código de PA, PB, PC, $PAUB$, $PAYB$ y $PAnoC$ representan las frecuencias de que suceda A, B, C, $A \cup B$, $A \cap B$ y $A \setminus C$ respectivamente. Como el valor de la muestra es muy elevado, dichas frecuencias se aproximan a la probabilidad de que suceda cada uno de dichos sucesos. Por tanto, se pueden conjeturar ciertas relaciones entre las probabilidades de los conjuntos.

1. Escribe la probabilidad de $P(A \cup B)$ como relación de otras probabilidades. Por ejemplo, ¿es cierto que $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$?
2. ¿Qué relación hay entre los conjuntos A y C? ¿Y entre sus probabilidades? ¿Qué relación podrías conjeturar entonces? Y si consideras los conjuntos A, C, y $A \setminus C$, y , ¿qué relación hay entre ellos? Entonces, ¿qué suposición podrías concluir?

Así, se presenta una actividad que con sus preguntas es una especie de guía sobre la reflexión que se debería de hacer sobre el experimento. De esta forma, se enseña a los alumnos el tipo de preguntas que deberían de hacerse ante una experimentación. Se muestra así una fase del pensamiento matemático que, comúnmente, se asocia a las ciencias experimentales menos a las matemáticas y que se trata de la fase de experimentación y conjeturas.

Actividad: En base a la observación del experimento realizado con el código de R, intenta generalizarlo para un caso cualquiera (usando las reflexiones obtenidas sobre las relaciones de los conjuntos y sus probabilidades en la actividad anterior) para demostrar los siguientes resultados:

Teorema 1: Si dos hechos A y B verifican que $A \subset B$, entonces $P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$

Teorema 2: Si dos hechos A y B verifican que $A \subset B$, entonces $P(A) \leq P(B)$

Teorema 3: Dados dos sucesos A y B, se cumple que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

De este modo, se presenta la finalización de la actividad experimental con R. Este paso consiste en demostrar lo que se ha deducido con el experimento a un caso genérico cualquiera. Para ello, los alumnos cuentan con la reflexión propuesta anteriormente y que será la información que necesiten para la demostración de dichos teoremas. Además. comprobarán que lo que están haciendo es generalizar la situación expuesta en el experimento realizado con el código de R al mismo tiempo que se utilizan los axiomas y resultados de la primera actividad propuesta. De esta manera, se estará a fomentar la visión del alumnado de integrar y tener en cuenta todo el conocimiento matemático previo en lugar de encerrarse en los conceptos tratados en una única actividad.

4. CONCLUSIONES

Una vez finalizada la exposición de la ejemplificación de la propuesta de mejora, se concluirá haciendo una síntesis de las ideas expuestas en el artículo. Por una parte, tanto en la introducción como en el apartado de análisis de los libros de textos se aprecia una necesidad visible en la enseñanza de las matemáticas. Estas ideas se podrían resumir en los siguientes puntos:

- La importancia que suscita en las matemáticas el buen entendimiento de un razonamiento, de una fórmula o de un planteamiento, justifica la necesidad de mostrar un aprendizaje que tenga en cuenta actividades que guíen a los alumnos hacia el conocimiento de los procesos de razonamiento y de la adquisición de un lenguaje matemático básico.
- Los libros de texto, de forma genérica, ofrecen un apoyo acerca de estas cuestiones. Sin embargo, no resultan suficientes debido a que los ejercicios y actividades que proponen resultan ser de una taxonomía de Bloom baja y no involucran a los alumnos en actividades que les hagan pensar y reflexionar. Por ello, estos libros y manuales deberán ser apoyados por actividades diseñadas por los docentes para que aborden los puntos estudiados en este trabajo y que involucren a los alumnos en estas cuestiones.
- La implementación de las cuestiones estudiadas en este trabajo no es incompatible con la realización de ejercicios mecánicos que doten de destreza y práctica a los alumnos con las cuestiones de cálculo. De hecho, estas actividades también son necesarias como un primer acercamiento para que los estudiantes adquieran manejo con las operaciones, sin embargo, resulta caótico realizar ejercicios de este tipo de forma reiterada. En ese sentido, una vez adquirida dicha destreza es necesario profundizar en los conocimientos y, en este punto, es donde se enmarca el encuadre del estudio realizado en este trabajo.
- Para obtener los objetivos planteados, es necesario mantener este tipo de metodología en el aula de una forma constante a lo largo del bachillerato. No se trata de demostrar continuamente todo aquello que se plantee, sino de trabajar aquellos

conceptos teóricos que permitan implementar de una forma, más o menos asidua, este tipo de metodologías. Además, es necesario evaluar este tipo de actividades para que los alumnos las vean como una cuestión necesaria y no algo pasajero. En este sentido, se podrían evaluar mediante rúbricas haciendo, por ejemplo, trabajos en grupo (ya sean escritos o que consistan en una exposición oral) lo que permitirá trabajar mediante aprendizaje cooperativo y colaborativo entre otras técnicas de trabajo.

Sin embargo, también es cierto que esta metodología tiene una serie de desventajas. Pues bien, su implementación no resulta del todo sencilla y depende de otros factores. Principalmente depende de dos: el nivel con el que los alumnos llegan al bachillerato de la E.S.O, respecto de estas cuestiones, y la prueba de acceso a la universidad que hace del bachillerato un curso muy denso en el que el tiempo es un bien muy preciado.

Tratando la primera problemática, el nivel con el que llegan los alumnos a la E.S.O, sería idílica una implicación al respecto de todo el profesorado docente. Si los alumnos no tienen ningún conocimiento (o conocimientos muy superfluos acerca de estas cuestiones) el profesorado de bachillerato deberá dedicarle una serie de sesiones a revertir esta situación inicial. Esto hace que se tenga que reprogramar la programación inicial de dicho curso que está cargado de contenidos. De este modo, en la E.S.O se deberían de tratar los conocimientos básicos de la lógica y el simbolismo matemático. Como se ha señalado anteriormente, esto no sólo es necesario para los alumnos que sigan cursando estudios en estas ramas, sino que servirá de ayuda a todos ellos como futuros ciudadanos y, en esta línea, todos se beneficiarían de dichos conocimientos. En consecuencia, la implicación de los docentes en todos los cursos de la educación secundaria resulta crucial para una mejor adquisición de estos contenidos.

Por otra parte, la prueba del acceso a la universidad marca de una forma rotunda todo el periodo del bachillerato. Tanto es así que los ejercicios y actividades realizadas se enfocan continuamente con el único objetivo de superar esta prueba. Sin embargo, dotar a los alumnos de las capacidades y conocimientos que se han expuesto en este trabajo, permitirá que éstos puedan resolver cualquier actividad que se les plantee de una forma mucho más objetiva y entendiendo mejor el procedimiento seguido. Por ejemplo, si un alumno está acostumbrado a realizar un ejercicio de forma rutinaria, pero sin comprender el procedimiento seguido y el lenguaje utilizado, cuando a éste le varíen el planteamiento del enunciado probablemente no sepa resolverlo. Sin embargo, otro alumno que sepa razonar e interpretar ese otro enunciado, sí tiene mejores cualidades para plantear la actividad y llegar a una solución. Así, más allá de las interpretaciones geométricas que se piden en las pruebas de acceso a la universidad, el estudio de las demostraciones y del lenguaje matemático se justifica por sí mismo al mejorar las cualidades de cualquier estudiante de ciencias ante pruebas de este tipo.

En este sentido, sería interesante rescatar la cita de (Ibañes & Ortega, 2003, pág. 57) que decía: “El reconocimiento de los procesos matemáticos, por parte de los alumnos, puede mejorar sensiblemente con las instrucciones adecuadas sin que aquello precise de una docencia dilatada en el tiempo”. Pues bien, esta cita refleja ese sentir de que cualquier docente, si realmente está comprometido, podría llevar a cabo, en mayor o menor medida, las conclusiones obtenidas del estudio realizado en este trabajo.

Por otra parte, me gustaría recalcar que este trabajo no pretende plantear un cambio radical en el sentir del bachillerato, sino provocar una reflexión en la comunidad docente con el fin de aportar una perspectiva que mejore las capacidades de los alumnos. No se trata de reformular completamente la metodología del bachillerato ni mucho menos hacer de esta etapa educativa una metodología cercana o igual a la de la universidad o estudios superiores. Lo que se trata de plantear, es el bachillerato como una transición entre la educación secundaria obligatoria y esos estudios superiores que cursarán gran parte del alumnado.

Así, se considera que esta visión sería especialmente fructífera debido a la estructura del bachillerato en aulas similares a las de la E.S.O. Pues bien, a pesar de ser una etapa agobiante y cargada de contenidos, el equipo docente tiene los conocimientos pedagógicos para transmitir y profundizar en esa transición de un aprendizaje más rudimentario hacia un nivel de rigurosidad más amplio.

Por el contrario, en la universidad y los estudios superiores, de forma general, la situación es completamente diferente. Las aulas están masificadas, los contenidos se dan de forma abrupta muchas veces y los alumnos necesitan ser autónomos ante esos profesores que dejan de tener ese carácter pedagógico de los profesionales de la educación secundaria. Por ello, resulta muy interesante aprovechar esa etapa educativa de dos años con el fin de que los estudiantes sientan esa progresión de la E.S.O hacia una mayor autonomía en su razonamiento, en su lógica y en la visión que tendrán que tener en un futuro.

Finalmente, y, para concluir, sería resaltable marcar algunas líneas de investigación futuras que completen o ayuden a cumplir los objetivos marcados con el estudio y las reflexiones realizadas en el presente trabajo. A este respecto, se resaltan dos líneas principales:

- La propuesta de mejora aquí planteada no se ha podido llevar a cabo debido a su envergadura. Como se ha dicho, el trabajo se trata de un estudio teórico y la propuesta de mejora es una ejemplificación de algunas medidas planteadas. Sin embargo, se necesitaría mantener la metodología propuesta durante todo el bachillerato para evaluar los resultados y, en este sentido, cualquier estudio práctico que se realice al respecto completaría el estudio teórico aquí realizado.
- Hacer una reflexión profunda acerca de la prueba de acceso a la universidad y hacer un mayor enfoque en dicha prueba sobre aspectos relacionados con el razonamiento, la lógica y el lenguaje simbólico ayudaría a los objetivos planteados. Por ello, la realización de investigaciones enfocadas hacia la reflexión de esta prueba en el campo científico-tecnológico también ayudaría al cumplimiento de los objetivos estudiados.

5. REFERENCIAS

Álvarez, F., & Ruíz, A. (1999). *Funciones 2, Matemáticas.* Barcelona: Vicens Vives.
Colera, J., Oliveira, M., García, R., & Santaella, E. (2012). *Matemáticas I.* Madrid: Anaya.
Colera, R. (1999). *Matemáticas 4º ESO.* Anaya.
Gill Martos, J. (1999). *Matemáticas 3º ESO.* Santillana.

Gómez Gejo, M., & García Sanmartín (Eds.), A. (2001). *Matemáticas II.* A Coruña: Rodeira, Grupo Edebé.

Ibañes, M., & Ortega, T. (2003). Reconocimiento de procesos matemáticos en alumnos de primer curso de bachillerato. *Enseñanza de ciencias 21*, 49-63.

Larrosa Cañestro, I. (14 de Febrero de 2014). *Teorema del seno*. Obtenido de http://www.xente.mundo-r.com/ilarrosa/GeoGebra/TeorSeno.html

Larrosa Cañestro, I. (s.f.). *Actividades con Geogebra*. Obtenido de http://www.xente.mundo-r.com/ilarrosa/GeoGebra/

Lodoño, J. (2006). *Geometría Euclidiana.* Colombia: Universidad de Antioquia.

Muñoz, J., & Moya, P. (s.f.). *Marea verde*. Obtenido de http://www.apuntesmareaverde.org.es

Nieto, &. (2011). *Matemáticas 1º Bachillerato.* Editex.

Ruiz de Gauna Gorostiza, J., Dávila , P. B., Etxeberria, J. M., & Sarasua, F. J. (2013). Los libros de texto de matemáticas del bachillerato en el periodo 1970-2005. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 245-276.

Sáenz, C. (2002). Sobre conjeturas y demostraciones en la enseñanza de las matemáticas. *Investigación en educación matemática: Quinto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (págs. 45-62). Almería: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Vázquez Mourazos, M. (2020). Utilización del kahoot para la introducción de la lógica proposicional en la ESO. *Épsilon (106)*, 61-68.

Wheeler, D. (1990). Aspects of mathematical proof. *Interchange 21(1)*, 1-5.