Epsilon – Revista de Educación Matemática 2023, nº 113, 21-37
Sección: Aportes desde la investigación en Educación Matemática

Progresiones aritméticas y ecuaciones con sentido. Preparación de un experimento de diseño

Micaela Mazzola
Facultad de Humanidades y Ciencias, Universidad Nacional del Litoral (Santa Fe, Argentina), *micamazzola@gmail.com*

Silvia Bernardis
Facultad de Humanidades y Ciencias, Universidad Nacional del Litoral (Santa Fe, Argentina), *email@email.com*

Resumen: *En este artículo presentamos el diseño de un experimento de enseñanza que incluye una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje, con el propósito de potenciar un estudio de las ecuaciones de primer grado con una variable, en la que se dote de sentido a dicho objeto matemático y se inicie en las técnicas de resolución sobre la base de un trabajo activo por parte de los estudiantes. Se espera que por medio de este artículo se propicie un interés en cuanto al uso de la metodología que se propone en el estudio.*

Palabras clave: *experimento de enseñanza, ecuaciones, construcción de sentido.*

Abstract: *In this article we present the design of a teaching experiment that includes a Hypothetical Learning Trajectory, with the purpose of promoting the approach of first degree equations with a variable in which sense is given to said mathematical object and start in the resolution techniques on the basis of an active work by the students. It is hoped that through this article an interest in the use of the methodology proposed in the study will be fostered.*

Key words: *teaching experiment, equations, construction of meaning.*

1. INTRODUCCIÓN

El experimento de diseño (Cobb y Gravemeijer, 2008) surge como una de las metodologías de investigación alternativas a las existentes, de manera tal que sean sensibles a la complejidad de los contextos de enseñanza y aprendizaje y así incrementen la relevancia de la investigación para la práctica. Es una metodología de naturaleza principalmente cualitativa, que, según Molina et al. (2011), "persigue comprender y mejorar la realidad educativa a través de la consideración de contextos naturales en toda su complejidad, y del desarrollo y análisis paralelo de un diseño instruccional específico" (p. 75).

En este artículo utilizamos, en particular, los experimentos de enseñanza, que son los estudios más frecuentes dentro de este paradigma de investigación. En la ejecución de los experimentos de enseñanza se incluyen tres fases: preparación del experimento, experimentación en contextos de clase y análisis retrospectivos de los datos generados con el

Cómo citar: Mazzola, M. y Bernardis, S. (2023). Progresiones aritméticas y ecuaciones con sentido. Preparación de un experimento de diseño. *Epsilon, 113, 21-37.*

propósito de extraer información sobre el diseño, permitiendo su mejora. Aquí nos enfocamos en la primera de estas fases, describimos las acciones a realizar en ella a partir de un experimento de enseñanza que realizamos en el área de la Didáctica de la Matemática, en relación con las ecuaciones con una variable. El objetivo general del estudio es explorar la iniciación al trabajo algebraico mediante las ecuaciones con una variable en primer año de la educación secundaria (12-13 años) de la provincia de Santa Fe, Argentina.

En la enseñanza de las ecuaciones distinguimos dos problemáticas. Por un lado, la asociada a la comprensión de las transformaciones algebraicas y al dominio de las técnicas de resolución. Por otro lado, la asociada al conocimiento más acabado del objeto matemático, ya que un abordaje reducido a las técnicas de resolución permite comprender de forma parcial dicho objeto.

Las investigaciones (Barallobres, 2007; Cambriglia y Sessa, 2011; Cambriglia, 2008; Sessa, 2005; Radford, 2001) destacan la necesidad de buscar otros caminos para la iniciación al álgebra escolar y proponen diversas alternativas para la entrada al trabajo algebraico, que contribuirían a mejorar las condiciones de los alumnos para dotar de sentido al objeto matemático ecuación en toda su riqueza. Sin embargo, las actividades que se proponen a los estudiantes solo permiten que construyan referencias para realizar y controlar las transformaciones algebraicas que respetan la equivalencia de expresiones; pero no se consideran las transformaciones que se aplican a una ecuación, aquellas que conservan el conjunto solución.

En esta dirección, se deriva como una actividad específica de la investigación el diseñar una serie de tareas para el estudio de las ecuaciones de primer grado con una variable para primer año de la escuela secundaria, en la que se dote de sentido a dicho objeto matemático y se inicie en las técnicas de resolución sobre la base de un trabajo activo por parte de los estudiantes.

En el siguiente apartado, presentamos en detalle los aspectos considerados en la preparación del experimento de enseñanza.

2. PREPARACIÓN DEL EXPERIMENTO DE DISEÑO

Para la preparación del experimento, se consideran cuatro aspectos, según Cobb y Gravemeijer (2008). El primero es la clarificación de los puntos finales de instrucción a los que se apunta. Si bien los objetivos instruccionales vienen marcados por las directrices curriculares actuales, no los aceptamos de manera incuestionada. En cambio, analizamos y problematizamos esos objetivos desde una perspectiva disciplinaria, identificamos las ideas organizadoras centrales. Para ello, es fundamental realizar previamente el rastreo documental del tema de estudio.

A partir de identificar las ideas organizadoras de los diseños curriculares y de la revisión de investigaciones previas, en este experimento de diseño proponemos los objetivos de aprendizaje que se detallan a continuación.

- O1: Construir la noción de ecuación como función proposicional, y de conjunto solución como el conjunto de valores de las variables que hacen que la proposición sea verdadera.
- O2: Analizar y discutir sobre el conjunto solución de una ecuación lineal con una variable y cómo determinarlo desde el contexto, la lectura de las expresiones algebraicas involucradas o las propiedades de los números y de las operaciones.

- O3: Elaborar las técnicas de resolución de ecuaciones lineales con una variable con sentido a partir de la generalización de conocimientos y relaciones sobre el conjunto de los números naturales.
- O4: Apropiarse de las técnicas elaboradas para resolver ecuaciones lineales con una variable en el conjunto de los números naturales.

En segundo lugar, de acuerdo a esta metodología, se deben documentar los puntos iniciales de instrucción, considerando los conocimientos previos de los estudiantes sobre los cuales elaboramos la propuesta y las restricciones instruccionales existentes para lograrlo.

Uno de los pilares de partida en este experimento es la siguiente premisa, los estudiantes de primer año de la educación secundaria (12-13 años) tienen una larga tradición de trabajo aritmético desarrollada durante toda su escolaridad primaria, y por tanto al comenzar el estudio del álgebra traen consigo las nociones y objetos que usaban en la aritmética. Es decir, asumimos que los conocimientos aritméticos con los que cuentan los estudiantes son insumos para sus primeros aprendizajes algebraicos, tanto en lo referido a las nociones matemáticas, como también al tipo de práctica desarrollada.

De este modo, tomamos como punto de partida el trabajo vinculado a los patrones numéricos, como resultado de su escolaridad primaria. Este trabajo tiene el potencial de permitir la entrada al álgebra desde la aritmética a partir de situaciones problemáticas que las requieran. Sin embargo, aunque la aritmética sea considerada como prerrequisito fundamental para el álgebra y aunque el álgebra se pueda abordar como una aritmética generalizada, la transición de la aritmética al álgebra implica rupturas y tensiones. El estudio y descripción de las mismas las podemos encontrar en Arcavi et al. (2017), Broitman, Castillo y Bernasconi Echeverría (2019), Grimaldi e Itzcovich (2013), Grimaldi, et al. (2017), entre otros. Cada una de estas rupturas es un punto en el cual los estudiantes pueden enfrentar restricciones instruccionales tanto conceptuales como procedimentales.

El análisis de ambos aspectos da lugar al tercero, que consiste en delimitar una trayectoria hipotética de aprendizaje (THA), formulando conjeturas sobre los cambios significativos que esperamos en el aprendizaje de los estudiantes sobre el concepto matemático y sobre los medios que dispondrán para apoyar y organizar estos cambios. En el siguiente apartado describiremos brevemente el modo de implementar las tareas de la THA, las herramientas, las normas y la naturaleza del discurso de la clase como factores condicionantes de los aprendizajes.

El último aspecto es situar el experimento en un contexto teórico, en nuestro caso en la Educación Matemática Realista (EMR), lo cual se abordará en detalle en una próxima publicación. El proceso de diseño lo realizamos sobre la base de tres características principales de la EMR: la reinvención guiada, la fenomenología y la matematización progresiva. La base de esta corriente es el principio de actividad, que consiste en la concepción de la matemática como actividad humana cuya finalidad es organizar (matematizar) el mundo que nos rodea incluyendo a la propia matemática. En este sentido, un contexto es un “dominio de la realidad, el cual, en algún proceso de aprendizaje particular, es revelado al alumno en orden a ser matematizado” (Freudenthal, 1991, p. 73).

Además, desde esta corriente se plantea que la educación debe dar a los estudiantes oportunidades para que reinventen ellos mismos las ideas y herramientas matemáticas, abocándose a actividades similares a la de los matemáticos, en interacción con sus pares y bajo la guía del docente. Lo mencionado es lo que Freudenthal (1991) denomina el principio de la reinvención guiada de la matemática como actividad de matematización.

La reinvención guiada se apoya en otra característica de la EMR: la fenomenología. Adoptando la terminología de Puig (1997), la fenomenología de un concepto matemático o de una estructura matemática significa describirlo en relación con los fenómenos para los cuales es medio de organización. Como medio de organización se entiende a “la función de los conceptos cuando se consideran en su relación con los fenómenos” (Puig, 1997, p. 64).

Por tanto, la reinvención guiada requiere encontrar contextos realistas que sean fuentes para generar los fenómenos que solicitan ser organizados matemáticamente por el objeto matemático en cuestión, para así partir de tales fenómenos y “desde ese punto de partida enseñar al estudiante a manipular esos medios de organización” (Freudenthal, 1983, p. 32).

3. PROPUESTA DE TRAYECTORIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAJE

Atendiendo a los resultados de un estudio previo (Mazzola y Bernardis, 2021) diseñamos la siguiente secuencia de enseñanza a partir de un contexto realista como punto de partida propicio para la identificación y la generalización de progresiones aritméticas hacia el trabajo formal con símbolos, expresiones algebraicas y ecuaciones. El estudio de patrones, como afirman Bressan y Gallego (2010), constituye un modo alternativo de abordar la brecha entre la aritmética y el álgebra, y facilita la transición paulatina desde el álgebra informal al álgebra formal. Esto se debe a que contribuyen a la comprensión de la noción de variable y de fórmula, y promueven procesos de modelización, tales como la generalización y la simbolización matemática.

En cuanto a los tiempos en los que se desarrollará la secuencia, si bien dependerá del ritmo de trabajo del grupo de estudiantes, consideramos que aproximadamente en tres clases de 80 minutos puede abordarse su totalidad. En una primera clase, las dos primeras tareas. En una segunda clase, las tareas 3 y 4. Finalmente, proponer un espacio de reflexión para abordar la tarea 5 en la tercera clase.

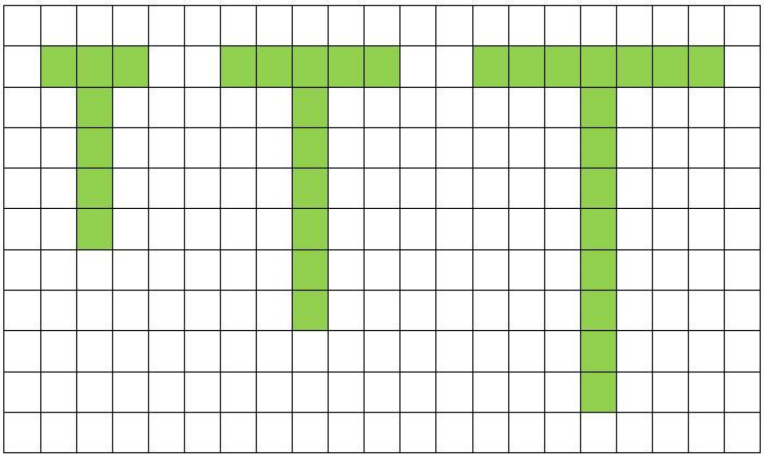
Tarea 1

Enunciado

En una hoja cuadriculada dibuja la inicial de tu nombre de manera que quede tu letra pixelada. Conservando siempre su forma, continúa agrandando la letra de la misma manera, una y otra vez. Por ejemplo, si tu inicial es la letra T, las dos primeras letras agrandadas se muestran en la Figura 1.

Figura 1

Imagen asociada a Tarea 1.



a) ¿Cuántos cuadraditos pintados tiene tu inicial luego de agrandarla cinco veces?
b) Muestra cómo va cambiando la cantidad de cuadraditos pintados a medida que vas agrandando tu inicial. Discute luego entre tus compañeros y acuerda la mejor manera de representarlo.

Modo de implementación

La tarea es introducida por el docente, el cual propone un diálogo colectivo para asegurar la comprensión de la situación, principalmente para debatir y acordar cómo dibujar su letra inicial, sobre lo que es válido y qué no, al momento de generar letras más grandes para que el patrón sea el esperado. Una vez lograda dicha comprensión, los alumnos resuelven la tarea en forma individual. Finalmente, se realiza un espacio colectivo con el propósito de discutir las producciones de los estudiantes.

Posibilidades que ofrece la tarea, estrategias previstas y posibles intervenciones docentes

En primer lugar, los estudiantes dibujan la inicial de su nombre. En el ítem a) solicitamos a los estudiantes que hallen la cantidad de cuadrados pintados que tiene la letra luego de agrandarla cinco veces, con el objetivo de comprender de qué se trata la situación planteada. Como conjetura suponemos que los estudiantes crearán y expandirán el patrón de su letra. Luego, para hallar la cantidad de cuadrados pintados que tiene la letra luego de agrandarla cinco veces, podrán realizar alguno de los siguientes procedimientos:

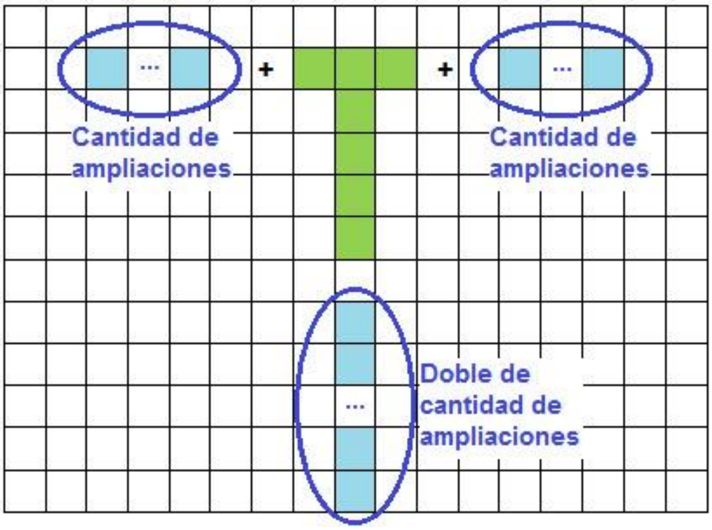
- Dibujan cada una de las letras hasta agrandarla cinco veces y cuentan todos los cuadrados.
- Reconocen la recursividad aditiva. Generan los siguientes elementos de la secuencia usando la diferencia numérica entre ampliaciones consecutivas como factor aditivo.
- Realizan correspondencias, expresando una relación entre cantidades variables basándose en las características pictóricas o numéricas de la representación.

En el ítem b), proponemos a los estudiantes representar la forma en que cambia la cantidad de cuadrados pintados a medida que se agranda la letra, con el objetivo de que produzcan distintas representaciones sobre la situación planteada. En este sentido, conjeturamos que los estudiantes identificarán, generalizarán, esquematizarán y comunicarán el patrón con el que armaron su letra, usando palabras, dibujos, diagramas, símbolos, expresiones o fórmulas. Si utilizamos como ejemplo la letra T, conjeturamos que podrían surgir como representaciones las siguientes:

- Representaciones con el lenguaje natural: como por ejemplo podrían escribir, "Cada vez que se agranda, le agrego a mi letra 4 cuadraditos" o "A los 7 cuadraditos iniciales le agrego el cuádruplo del número de veces que agrando la letra".
- Representaciones pictóricas: utilizando un lenguaje icónico y apoyándose en conformaciones geométricas. Por ejemplo, como se muestra en la Figura 2.

Figura 2

Posible representación pictórica para la letra T.



- Lista de números: mediante las cuales los alumnos ubican los valores que van obteniendo en cada una de las veces que agrandan la letra. Por ejemplo, para la letra T, la lista de números es: 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35, 39, …

  No obstante, escribir los valores numéricos puede resultar una restricción instruccional para los alumnos, dado que como sostiene Arcavi et al (2017) les puede dificultar ver el patrón en juego y su estructura matemática.

  En contrapartida, podrían surgir otras disposiciones de los valores numéricos obtenidos, tales como:

Letra inicial $\rightarrow 7$	Letra inicial $\rightarrow 7$
1° vez $\rightarrow 7 + 4 = 11$	1° vez $\rightarrow 7 + 4 = 11$
2° vez $\rightarrow 11 + 4 = 15$	2° vez $\rightarrow 7 + 4 + 4 = 15$
…	…

  Ambas disposiciones al ser no cerradas les brindan a los estudiantes la posibilidad de encontrar el patrón al mostrar una estructura que puede ser generalizable. Al revelar la estructura del patrón, este procedimiento es precursor de las expresiones algebraicas.

- Diagramas: tales como las siguientes cadenas de flechas (Figura 3). Mediante las mismas, escriben los valores numéricos que van obteniendo cada vez que se agranda la letra, pero simbolizando con las flechas el paso de un valor al siguiente (primera cadena de flecha). También pueden recurrir al lenguaje simbólico (segunda cadena de flechas) para expresar la relación entre el número de veces que se agranda (*n*) y el número total de cuadraditos. En este caso, las flechas indican las cadenas de operaciones parciales.

Figura 3

Posibles cadenas de flechas para la letra T.

$$7 \xrightarrow{+4} 11 \xrightarrow{+4} 15 \qquad\qquad n \xrightarrow{\times 4} 4n \xrightarrow{+7} 4n+7$$

- Expresiones algebraicas: utilizando lenguaje simbólico para generalizar el procedimiento de cálculo que guarda una regularidad. La cantidad de cuadrados pintados según las veces que se agranda la letra puede ser expresada como $an + b$, donde *b* representa el número inicial de cuadraditos pintados, *n* las veces que se agranda y *a* el número de cuadraditos incrementados cada vez. Por ejemplo, para la letra T, la cantidad de cuadraditos *T* en relación a la cantidad *n* de veces que se agranda la letra está dada por $T = 7 + 4n$. Las expresiones algebraicas pueden surgir desde el marco aritmético, al apoyarse en varios ejemplos para inferir regularidades entre ellos, o desde el marco geométrico, al apoyarse en conformaciones geométricas. Aquí, surge la fórmula como modelo de la situación para generar y representar todas las soluciones y la variable como número general o generalizado, dado que con ella se generaliza sobre el conjunto de los números naturales, y no sobre algunos valores numéricos específicos.

Luego de esta instancia de trabajo individual, los estudiantes son convocados a explicar, justificar, acordar o disentir decisiones, estrategias y resultados; a la vez de cuestionar alternativas y reflexionar sobre ellas. Para ello, el docente juega un papel clave para guiar y organizar esta interacción en el aula, transitando por los distintos procedimientos que surgen.

Es importante que los alumnos describan verbalmente las regularidades que encuentran, siendo tarea del docente hacer fluida esta verbalización e impulsarlos a usar símbolos para representar sus generalizaciones. Esto es, la representación de sus ideas mediante una fórmula, lejos de ser espontánea, debe ser promovida por la discusión que posibilita el docente.

A partir de lo trabajado hasta el momento, resultará interesante que el docente solicite a cada estudiante la escritura de una fórmula que refleje el método de cálculo de la cantidad de cuadraditos de su letra según las veces que se agranda, para luego escribirlas en el pizarrón, analizarlas y ponerlas en discusión.

Suponemos que en la clase surgirán una variedad de fórmulas para una misma letra. Por ejemplo, para el caso de la letra T, de acuerdo a la forma de contar los cuadraditos podría surgir la expresión: $T = 7+4n$, al contar todos los cuadraditos de la letra inicial o bien $T = 3+2n+4+2n$, al contar los cuadraditos del trazo horizontal y del vertical por separado. Cuestión que consideramos propicia para discutir y reflexionar acerca de interrogantes como los siguientes: ¿Cuál es la variable en cada una de las fórmulas? ¿Qué fórmulas utilizan la misma variable, pero están expresadas de diferente manera? ¿Son equivalentes dichas fórmulas? ¿Cómo verificar que efectivamente las fórmulas halladas funcionan? Estas discusiones permiten a los estudiantes dotar de sentido el trabajo algebraico.

Por un lado, las expresiones algebraicas que van elaborando empiezan a adquirir sentido al permitir describir y generalizar las relaciones que representan los patrones de sus letras. Además, son las transformaciones algebraicas las que adquieren sentido al dar cuenta de que expresiones algebraicas distintas representan el mismo patrón (por ejemplo, $7+4n$ y $3+2n+4+2n$ para la letra T), lo que testifica la posibilidad de pasar de una a otra a través de esas transformaciones. Esto es, se ofrece la posibilidad de apoyarse en el contexto para comprender la equivalencia entre expresiones algebraicas. Por tanto, se realiza un acercamiento semántico a la noción de equivalencia (Chalé-Can et al., 2017). A la vez, la manipulación algebraica realizada para pasar de una fórmula a otra permite recuperar diferentes propiedades de los números y de las operaciones, que redundará en mejores niveles de comprensión y control dotando de sentido a las transformaciones que necesitarán posteriormente realizar para resolver ecuaciones. Todas estas cuestiones contribuyen a O3.

Por otro lado, a partir del análisis de las fórmulas pueden surgir expresiones algebraicas para una misma letra que no sean equivalentes, dado que dependen de cómo se seleccionan las variables. Por ejemplo, para la letra T, puede surgir la expresión algebraica $7+4n$, donde n puede tomar valores naturales mayores o iguales a 0, siendo n el número de veces que se agranda la letra. Pero también puede surgir la expresión algebraica $3+4n$, donde n puede tomar valores naturales mayores o iguales a 1, siendo n en este caso la posición de la letra en la secuencia. Esta cuestión nos permitirá, por un lado, completar el concepto de equivalencia de expresiones algebraicas dado que: "dos expresiones no son equivalentes si, verificando en un solo valor de n, ambas arrojan resultados distintos" (Sessa, 2005, p. 89). Por el otro, discutir respecto de las variables seleccionadas y el conjunto de valores admisibles de las mismas.

Por último, a partir de las fórmulas producidas, el docente brindará la oportunidad de reflexionar respecto de las diferencias y similitudes de las mismas. A partir de involucrar a los estudiantes en un proceso de comparación de escrituras podrán abstraer la escritura común de las fórmulas. De esta manera, podrán visualizar que se trata de cuentas de la misma forma, con variables y parámetros diferentes.

Tarea 2

Enunciado

A partir de las ampliaciones de tu letra.

a) Piensa un número grande de cuadraditos pintados que nunca obtendrás y uno que seguro encontrarás. Explica por qué.
b) ¿Una de tus letras podría tener 1000 cuadraditos pintados? ¿Cómo lo sabes? En caso afirmativo, ¿cuántas veces necesitas agrandarla para lograrlo?

Modos de implementación

Los alumnos abordan la tarea en forma individual. Luego, por medio de un debate colectivo presentan los diferentes procedimientos y las relaciones matemáticas puestas en juego, con la intención de exponer, relacionar, analizar, confrontar y cuestionar los procedimientos y estrategias que surgen.

Posibilidades que ofrece la tarea, estrategias previstas y posibles intervenciones docentes

El ítem a) de esta tarea propicia en los alumnos la "generalización lejana", en términos de Stacey (1989), al pedir que establezcan un número "grande" que se puede obtener como cantidad de cuadrados pintados y un número que no.

Luego de realizar un análisis exhaustivo de las fórmulas elaboradas en la Tarea 1 y lo que permite contar cada una de ellas, a partir del ítem a) de esta nueva tarea los estudiantes podrán hacerlas funcionar para buscar los números pedidos. Es decir, se pone en acción la fórmula y así se la aborda desde su función como proceso de cálculo.

Conjeturamos que los estudiantes para hallar un número "grande" que se puede obtener como cantidad de cuadrados pintados realizarán el reemplazo de un valor en la variable y efectuarán los cálculos correspondientes. De igual forma, para hallar un número que no se puede obtener podrán reemplazar por otro valor o utilizar el mismo y proponer, por ejemplo, el siguiente o el anterior a la cantidad total obtenida de cuadraditos. Trabajar el reemplazo de valores numéricos en las variables permite dar sentido, a la vez que posibilita abordar la dependencia entre variables, en este caso la relación entre el número de veces que se agranda y el total de cuadraditos pintados.

En cuanto al ítem b) de la tarea, solicitamos indagar sobre si una de las letras puede tener 1000 cuadraditos pintados, cómo saber si esta cantidad de cuadraditos corresponde al número total de cuadraditos de una de las letras agrandadas, o cuántas veces es necesario agrandarla para llegar a dicha cantidad. De esta manera, se persigue que los estudiantes elaboren y resuelvan ecuaciones del tipo $an + b = c$, donde n representa las veces que se agranda la letra y b el número inicial de cuadraditos de su inicial, es decir corresponde a $n = 0$ (ninguna). Se arribará al concepto de ecuación como una restricción que se impone en un cierto dominio y a la variable como incógnita, dado que se indaga sobre para qué valor de la variable se obtienen 1000 cuadraditos pintados.

A partir de un trabajo reflexivo en el grupo-clase se genera un ambiente propicio para el análisis de diversas cuestiones, mencionadas en Sessa (2005), tales como: el estudio de distintas situaciones –en este caso, las distintas letras- que se resuelven con la misma ecuación y la resolución de ecuaciones sin solución, dado que en algunas de las letras será posible encontrar el valor de n y en algunas no (contribuyendo a O2). Desde esta última cuestión será posible lograr O1.

Van Ameron (2003) afirma que los estudiantes pueden resolver ecuaciones empleando métodos apoyados en razonamientos aritméticos y en representaciones no convencionales. Así, si bien el ítem b) conduce al planteo de una ecuación, la misma puede resolverse aritméticamente a partir de "desarmar" los cálculos implicados: para $7 + 4n = 1000$, debo buscar un número (4n) tal que al sumarle 7 obtengo 1000, y luego un número (n) tal que al multiplicarlo por 4 obtengo 993. Asimismo, pueden poner en juego la función de la fórmula como portadora de información, a partir de leer las que elaboraron y extraer información de ellas. Por ejemplo, $7 + 4n = 1000$ no es válida para ningún valor de n, al ser $4 + 4n$ un múltiplo de 4 y $7 + 4n$ es tres unidades más que un múltiplo de 4. Pero 997 no es un múltiplo de 4. No obstante, algunas fórmulas serán más convenientes o sencillas que otras para poder realizar este razonamiento.

Tarea 3

Enunciado

Compara tu letra con las de tus compañeros. Analiza si tu letra tiene el mismo número de cuadraditos pintados que la de algún compañero, cuando las agrandan las mismas veces. Explica por qué.

Modos de implementación

El docente propone dos momentos de trabajo con los estudiantes en torno a esta tarea. Primero, un momento de indagación, comparación y discusión en pequeños grupos. Luego, un momento de análisis colectivo con el grupo-clase, con la intención de estudiar sus producciones, analizar su validez, compararlas, confrontarlas y generalizarlas.

Posibilidades que ofrece la tarea, estrategias previstas y posibles intervenciones docentes

Esta tarea permite al alumno que analice y justifique si su letra tiene el mismo número de cuadraditos pintados que la de algún compañero de su grupo, cuando tienen la misma cantidad de veces agrandadas. De esta forma, surgen ecuaciones del tipo $an + b = cn + d$, donde n representa las veces que se agranda y b el número inicial de la secuencia que corresponde a $n = 0$. Este tipo de ecuaciones favorecen la interpretación del signo igual como equivalencia de expresiones: surge el signo igual como comparación de elemento a elemento entre ambas letras, siendo la tarea encontrar los valores de *n* que verifican la igualdad.

Dada la variedad de patrones, la tarea lleva a analizar y discutir sobre si las ecuaciones que se pueden establecer tienen solución, así como hallar él o los valores de la variable que hacen verdadera la igualdad (O2). Para responder esta cuestión, los estudiantes pueden apoyarse en la lectura y comparación de información que dan sus representaciones o sus expresiones. Concretamente, si generaron una lista de números como representación, los alumnos pueden comparar de a pares los números correspondientes.

Pero será oportuno que el docente guíe al grupo al tratamiento mediante las expresiones algebraicas generadas en la Tarea 1. Si los alumnos igualan las expresiones de sus fórmulas pueden empezar a comparar sus términos y recurrir a relaciones conocidas: por ejemplo, si plantean la ecuación $4n + 7 = 3n + 9$ para analizar dos letras determinadas, pueden escribirla como $3n + n + 7 = 3n + 9$ dado que $3n + n = 4n$ y así ver que tienen de igual ambas expresiones. Como 3n aparece en ambos lados de la igualdad, pueden considerar que esa parte da lo mismo para cualquier valor de n. Entonces, sólo deben hallar el valor de *n* tal que $n + 7 = 9$.

Otro procedimiento posible es realizar la diferencia entre las expresiones algebraicas a comparar e igualar a 0, apoyándose en la idea aritmética que dos cantidades serán iguales si su diferencia es 0. Por ejemplo, para la ecuación $4n + 7 = 3n + 9$ se puede plantear $4n + 7 - (3n + 9) = 0$. Mediante transformaciones algebraicas de la expresión del lado izquierdo, apoyadas por el trabajo realizado en la Tarea 1, los alumnos arriban a la ecuación $n - 2 = 0$. En ambos procedimientos se obtienen ecuaciones aritméticas -ya abordadas en la Tarea 2- y mediante ellas pueden concluir que $n = 2$ es la solución de la ecuación.

También consideramos que podrían generar estrategias para casos particulares. Por ejemplo,

- Dos letras que tienen igual incremento de cuadraditos cada vez que se agranda, pero distinta cantidad inicial de cuadraditos, nunca tendrán entre ellas igual cantidad de cuadraditos para el mismo número de veces que se agranda. Esto es, cuando tenemos el caso:
$$an + b = an + c, con\ a, b, c\ \in N\ y\ b \neq c$$
la ecuación no tendrá solución entre los valores posibles de la variable.
- Dos letras que tienen igual incremento de cuadraditos cada vez que se agranda e igual cantidad inicial de cuadraditos, siempre tendrán entre ellas igual cantidad de cuadraditos para el mismo número de veces que se agranda. Esto es, cuando tenemos el caso:
$$an + b = an + b, con\ a, b \in N,$$
la ecuación tendrá solución para todos los valores posibles de la variable.
- Dos letras que tienen igual cantidad inicial de cuadraditos, pero distinto incremento de cuadraditos cada vez que se agranda, tendrán entre ellas igual cantidad de cuadraditos iniciales. Esto es, cuando tenemos el caso:
$$an + b = cn + b, con\ a, b, c\ \in N, a \neq c$$
la ecuación tendrá como solución a $n = 0$.
- Dos letras que tienen una diferencia de uno en el incremento de cuadraditos cada vez que se agranda y una diferencia de uno (en el otro sentido) en la cantidad inicial de cuadraditos, tendrán entre ellas igual cantidad de cuadraditos la primera vez que se agranda. Esto es, cuando tenemos el caso:
$$an + b = cn + d, con\ a, b, c, d\ \in N, a = c + 1\ y\ \ b = d - 1,$$
la ecuación tendrá como solución a $n = 1$.
- Cuando una letra tiene mayor incremento de cuadraditos cada vez que se agranda y mayor cantidad inicial de cuadraditos que otra letra, nunca tendrán entre ellas igual cantidad de cuadraditos para el mismo número de veces que se agranda. Esto es, cuando tenemos el caso:
$$an + b = cn + d, con\ a, b, c, d\ \in N, a > c\ y\ \ b > d,$$
la ecuación no tendrá solución entre los valores posibles de la variable.

Mientras que las primeras cuatro estrategias son válidas como resolución en los distintos conjuntos numéricos, la quinta ecuación tiene solución en los números racionales, pero no está en los naturales. Por otro lado, la segunda estrategia permite ampliar el trabajo que se venía realizando sobre la equivalencia de expresiones algebraicas, relacionándola con las ecuaciones: Si dos expresiones son equivalentes, entonces la ecuación obtenida al igualarlas tiene como solución a todos los valores posibles de la variable.

En síntesis, se evita el “pasaje de términos”, en cambio se elaboran estrategias con sentido para la resolución de las ecuaciones, a partir de la generalización de conocimientos y relaciones (O3). Asimismo, surge nuevamente la discusión en torno a la noción de conjunto solución y se estudia la cantidad y la existencia o no de soluciones, lo que permite a los estudiantes profundizar la noción de ecuación como función proposicional (O1 y O2).

Al terminar la etapa en pequeños grupos, el docente juega un papel clave para guiar y organizar un análisis colectivo y propone a los estudiantes explicar, justificar, acordar o disentir estrategias y soluciones; a la vez de cuestionar alternativas y reflexionar sobre ellas. De esta manera, hace circular en el aula distintas situaciones y estrategias que surgen e indaga sobre las distintas soluciones de una ecuación. Luego, podrá formalizar las siguientes cuestiones:

Llamamos ecuación a una igualdad en la que intervienen expresiones con variables. En una ecuación se pueden dar las siguientes situaciones excluyentes en relación de la veracidad de la igualdad:

Que sea verdadera para cualquier valor de la variable.
Que sea verdadera para algunos valores de la variable y para otros, no.
Que sea falsa para cualquier valor de la variable.

Los valores de la variable que hacen verdadera la igualdad se llaman soluciones de la ecuación. Si la igualdad es verdadera para cualquier valor de la variable, las expresiones que están a uno y otro lado del signo igual son expresiones equivalentes.

Tarea 4

Enunciado

Introduce en Photomath las ecuaciones generadas por tu grupo en la tarea anterior. Copia los pasos que presenta para resolverla y escribe una explicación del método que utiliza para transformar la ecuación inicial en otras ecuaciones.

Modo de implementación

El docente presenta a la clase la aplicación Photomath que utilizarán los estudiantes en sus dispositivos tecnológicos, ya sea en una computadora o celular. Comenta su utilidad para resolver ecuaciones a partir de escanearla o de escribirla.

Luego, el docente propone un momento de indagación y análisis en pequeños grupos sobre cada uno de los pasos que desarrolla la aplicación para resolver una ecuación. Finalizado este momento, el docente invita a un representante de cada grupo a escribir estos pasos en el pizarrón para luego ponerlos en discusión. En este momento de análisis colectivo con el grupo-clase se debe generar en los estudiantes la posibilidad de comparar, generalizar y sistematizar las técnicas de resolución de ecuaciones utilizadas por la aplicación.

Posibilidades que ofrece la tarea, estrategias previstas y posibles intervenciones docentes

Photomath resuelve una ecuación a partir de transformarla en otra en la que la variable solo aparece en un lado del signo igual, sin modificar el conjunto solución. Es decir, en los sucesivos pasos que realiza obtiene ecuaciones equivalentes y en la última ecuación obtenida se lee la solución de forma sencilla.

A partir de esta tarea el alumno dispone de cada uno de los pasos que desarrolla Photomath, al resolver la ecuación que ingresa. En primera instancia, cuando ingresa la ecuación, automáticamente Photomath le brinda la solución de la misma. Además, muestra el gráfico cartesiano de las dos funciones lineales asociadas a los miembros que componen la ecuación. Por ejemplo, para la ecuación $4n + 7 = 3n + 9$ la aplicación muestra la pantalla de la Figura 4.

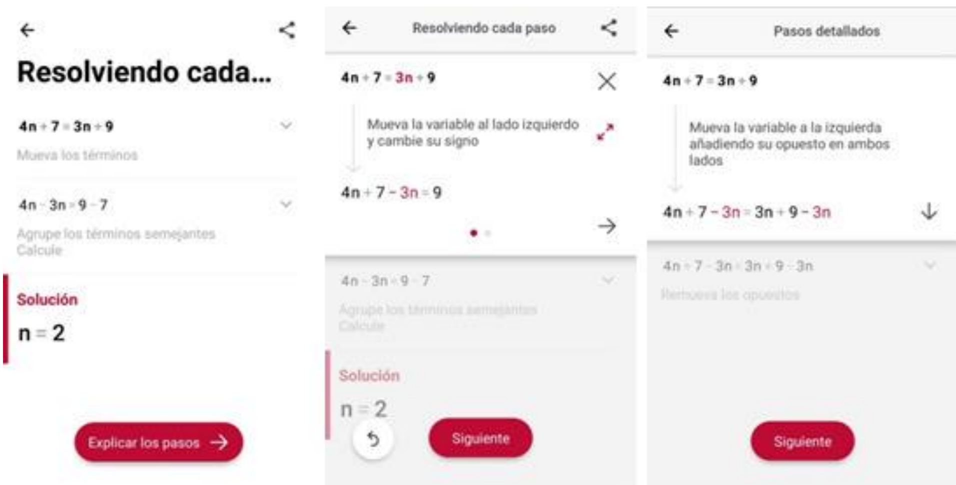
Figura 4

Pantalla de Photomath al incrustar una ecuación.

Al seleccionar “Mostrar la solución de cada paso”, la aplicación brinda, en forma breve a los estudiantes, el modo en que transforma la ecuación original en otras equivalentes (primera pantalla de Figura 4). Al seleccionar “Explicar los pasos” y sucesivamente seleccionar “Siguiente”, la aplicación amplía cada uno de los pasos (segunda pantalla de Figura 4). Asimismo, al seleccionar las dobles flechas que se encuentran al costado de cada paso aparece una nueva pantalla (tercera pantalla de Figura 5) donde se detalla dicho paso.

Figura 5

Sucesivas pantallas de Photomath para mostrar los pasos de resolución de una ecuación.



Con base en el trabajo realizado en la Tarea 3, los alumnos retomarán las relaciones aritméticas que se pusieron en juego y adjudicarán diversas justificaciones al tratamiento algebraico realizado por la aplicación. Por ejemplo, pueden afirmar que se restó $3n$ a ambos miembros de la igualdad porque para cualquier valor de n se está restando la misma cantidad de cuadraditos pintados y, por tanto, no se cambian las soluciones.

Asimismo, en los casos donde la ecuación no tenía solución al no pertenecer al conjunto numérico de los números naturales, la aplicación le devolverá una solución –que puede pertenecer al conjunto de los números enteros o también al conjunto de los números racionales- dado que no tiene en consideración el contexto en que se genera dicha ecuación. Este momento resultará oportuno para que el docente genere un debate con el grupo-clase sobre el dominio de definición de la variable en la ecuación y hacer explícita la importancia del mismo en el proceso de resolución de una misma ecuación.

De esta manera, a partir del análisis colectivo el docente debe posibilitar que los alumnos amplíen y profundicen la discusión y el análisis iniciado en la Tarea 3 sobre las cuestiones de las soluciones de una ecuación y las transformaciones en otras ecuaciones equivalentes que facilitan la búsqueda de dichas soluciones (O4).

Tarea 5

Enunciado

Elabora una explicación y algunos ejemplos para contarle a un compañero que estuvo ausente en la clase, qué es una ecuación lineal y qué procedimiento recomiendas para su resolución.

Modo de implementación

El docente propone dos momentos de trabajo para los estudiantes en torno a esta tarea: primero en forma individual, para después pasar a un espacio de discusión colectivo con el propósito de discutir las producciones de los estudiantes.

Posibilidades que ofrece la tarea, estrategias previstas y posibles intervenciones docentes

Esta tarea permite al alumno registrar por escrito lo aprendido evocando su experiencia matemática. Broitman, et al. (2017) nos advierten que el desafío de poner en palabras lo aprendido para ser textualizado promueve en el alumno avances que tienden hacia una mayor profundización en la conceptualización matemática. Mientras escriben se transforman los conocimientos que se fueron construyendo al tener que explicitarlos, reorganizarlos y sistematizarlos.

Respecto a las técnicas elaboradas para resolver ecuaciones lineales, los alumnos pueden retomar distintas transformaciones algebraicas que realiza Photomath debido a la gradualidad que dicha aplicación muestra. Además, pueden resolver utilizando sus propios procedimientos elaborados en la Tarea 3 y compararlos con el que brinda la aplicación.

Luego de las producciones individuales, el docente puede proponer a la clase elaborar un escrito colectivo, lo que promueve formulaciones que van siendo progresivamente más generales. En las confrontaciones de ideas, debates y síntesis con los puntos de vista de sus compañeros, los alumnos se van distanciando de las tareas que dieron origen a los saberes que están en discusión.

El docente debe guiar hacia la sistematización de estos puntos de vista, atendiendo a las transformaciones algebraicas, centrándose en que los alumnos retomen las validaciones sobre la base de sus conocimientos. Estas técnicas utilizadas en el conjunto de los números naturales luego podrán ser retomadas y ampliadas a partir del trabajo con los números enteros y los números racionales. Por todo lo mencionado, se propicia O4.

4. CONCLUSIONES

En la THA en la que se fundamenta la propuesta, buscamos que los alumnos construyan, desde el inicio, la noción de ecuación como función proposicional desde las ideas de Grimaldi et al. (2017). Para dicha construcción, diseñamos un conjunto de tareas que posibiliten un trabajo algebraico que ofrezca condiciones para analizar y discutir que una ecuación no es una igualdad con una incógnita, ni cosas que se despejan con un número a develar, sino que la letra representa una variable y que la condición de igualdad puede cumplirse para algunos valores, para todos o para ningún valor de la variable.

Para ello, procuramos que en este trabajo algebraico se involucren cuestiones sobre qué es una ecuación y no solo cuestiones vinculadas a sus técnicas de resolución. En esta dirección, las tareas elaboradas apuntan a indagar las nociones de expresión algebraica, ecuación equivalente y conjunto solución; a estudiar la cantidad y la existencia o nó de soluciones; y a elaborar procedimientos que luego derivan en técnicas de resolución.

Por último, la construcción de sentido de las ecuaciones no se logra solamente con las tareas, sino en las reflexiones y discusiones que se producen en torno a ellas. Esto pone de relieve el papel crucial de la interacción en el aula de matemática y el rol indispensable del docente como guía de estos momentos.

La THA es justamente eso, una hipótesis. Aunque nos provee un sentido de dirección para la enseñanza, la misma es tentativa y potencialmente transformable. Asimismo, la THA realizada es “una” propuesta para la enseñanza y el aprendizaje de las ecuaciones de primer grado con una variable (con dominio en el conjunto de los números naturales).

Finalmente, proponemos el uso de herramientas digitales en la enseñanza del álgebra, tales como Photomath y Geogebra. Estos recursos tecnológicos ofrecen la posibilidad de explorar regularidades y variaciones, visualizar situaciones de manera dinámica, analizar invariantes, estudiar y discutir con los estudiantes cuestiones que resultan insumos importantes para avanzar en el trabajo con las ecuaciones. Por ello, consideramos que desaprovechar estas potencialidades es una oportunidad que se pierde en la enseñanza del álgebra.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arcavi, A., Drijvers, P. y Stacey, K. (2017). *The learning and teaching of algebra: Ideas, insights and activities.* Routledge.

Barallobres, G. (2007). Introduction à l’algebra par la généralisation: problèmes didactiques soulevés, *For the Learning of Mathematics*, *27*(1), 39-44.

Bressan, A. M. y Gallego, M. F. (2010). El proceso de matematización progresiva en el tratamiento de patrones. *Correo del Maestro*, (168), 5-21.

Broitman, C., Castillo, C., y Bernasconi Echeverría, A. (2019). Hacia la ampliación de sentidos del símbolo igual en los primeros grados de la escuela primaria. *Yupana*, (11), 8-37. https://doi.org/10.14409/yu.v0i11.8839

Broitman, C., Escobar, M., Ponce, H. y Sancha, I. (2017). *Enseñar a estudiar matemáticas en la escuela primaria*. Santillana.

Cambriglia, V. (2008). El carácter local de las expresiones literales en un aula de séptimo grado. *Educación matemática*, *20*(1), 5-30.

Cambriglia, V. y Sessa, C. (2011). Construcciones colectivas en torno a lo general. El caso de la divisibilidad y las descomposiciones multiplicativas. *Yupana*, *1*(6), 39–48. https://doi.org/10.14409/yu.v1i6.266

Chalé-Can, S.; Font, V. y Acuña, C. (2017). La semántica y la sintáctica en la equivalencia de expresiones algebraicas. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.) *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.* https://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html.

Cobb, P. y Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. En A. E. Kelly, R. A. Lesh y J. Y. Baek (Eds.) *Handbook of design research methods in education. Innovations in Science, Technology, Engineering and Mathematics Learning and Teaching* (pp. 68-95). Lawrence Erlbaum Associates.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Reidel.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education: China lectures*. Kluwer.

Grimaldi, V. e Itzcovich, H. (2013). Tensiones en el paso de la escuela primaria a la escuela media. Algunas reflexiones en el área de matemática. En C. Broitman (Comp.), *Matemáticas en la escuela primaria II. Saberes y conocimientos de niños y docentes* (pp. 69-93). Paidós.

Grimaldi, V.; Itzcovich, H. y Novembre, A. (2017). *Ecuaciones. Aportes para el debate acerca de su enseñanza*. Santillana.

Mazzola, M. y Bernardis, S. (2021). Ecuaciones con sentido: un contexto realista inicial. En O. Lossio, M. Coudannes y J. Bernik (Comp.), *Pensar la enseñanza y la formación desde los desafíos del presente: libro de ponencias de las Terceras Jornadas de divulgación de experiencias de docencia, extensión e investigación educativa de la FHUC-UNL* (pp. 307-314). Universidad Nacional del Litoral.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L., y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, *29*(1), 75–88.

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Coord.) *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 61-94). Horsori.

Radford, L. (2001). Factual, Contextual and Symbolic Generalizations in Algebra. En M. van den Hueuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 2th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 81-89). Freudenthal Institute.

Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del Álgebra*. *Orígenes y perspectivas.* Libros del Zorzal.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalizing problems. *Educational Studies in Mathematics*, *20*(2), 147-164. https://doi.org/10.1007/BF00579460

Van Ameron, B. (2003). Focusing on informal strategies when linking arithmetic to early algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *54*(1), 63–75. https://doi.org/10.1023/B:EDUC.0000005237.72281.bf