

Diseño y análisis de tareas de proporcionalidad enriquecidas para estudiantes de tercer ciclo con talento matemático

Carla López Segura

Graduada en Educación Primaria (Universidad de Granada),
carlalopez16@correo.ugr.es

Lucía Flores Lamolda

Estudiante del Grado en Educación Primaria (Universidad de Granada),
luciaflores@correo.ugr.es

Resumen: En este trabajo se presenta el diseño de una tarea de enriquecimiento como respuesta educativa para estudiantes con talento matemático. La tarea en cuestión fue objeto de estudio de un Trabajo Fin de Grado. En esta sección de la revista *Épsilon*, se pretende llevar a cabo una transferencia del conocimiento que se produce gracias a la investigación en didáctica de la matemática a los profesionales de la educación. En este caso concreto a partir de trabajos académicos. Es por esto que lo principal de este artículo será presentar el diseño de la tarea, con objeto de que los docentes de matemáticas de educación primaria tengan ejemplos de tareas que pueden llevarse a cabo para alumnado con talento matemático. El contenido matemático que se trabaja es la proporcionalidad.

Palabras clave: enriquecimiento, talento matemático, diseño de tareas, proporcionalidad.

Design and analysis of enriched proportionality tasks for mathematically talented third-cycle students

Abstract: This work outlines the design of a rich task, focused on the concept of proportionality, as an educational offer for students with mathematical talent. The task, which was the subject of a Bachelor's Thesis, is presented in this *Épsilon* journal section with the objective of transferring the valuable knowledge gained from mathematics education research to education professionals. Specifically, the presentation of this task aims to inspire primary education mathematics teachers in designing challenging and engaging tasks for students with mathematical talent.

Key words: Enrichment, mathematical talent, task design, proportionality.

1. INTRODUCCIÓN

Con la intención de acrecentar características del talento que se esperan que desarrollen los estudiantes con altas capacidades para mejorar su sentido matemático, se han elaborado y analizado una serie de tareas de proporcionalidad. Para ello se ha utilizado el concepto de análisis didáctico, desarrollado por los estudiantes en la asignatura, Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. En este artículo se presentan las tareas y los procesos de análisis que muestran

su interés educativo. Para ello comienza por presentar el marco teórico. Posteriormente se describen las tareas y su proceso de diseño y análisis. Finalmente se extraen unas conclusiones

Desde la educación inclusiva se pretende llevar a cabo una práctica educativa que permita el máximo desarrollo individual de cada estudiante y para conseguirlo los docentes deben estar preparados para afrontar la diversidad que demandan las aulas, incluyendo a los estudiantes talentosos. El propósito de la identificación de este alumnado, tal y como señala el Plan de actuación para la atención educativa al alumnado con necesidades específicas de apoyo educativo por presentar altas capacidades (Junta de Andalucía, 2011) es ofrecerle una respuesta ajustada a sus necesidades educativas.

El Ministerio de Educación y Formación Profesional del Gobierno de España, describe al alumnado con altas capacidades como un grupo muy heterogéneo que se caracteriza porque obtienen puntuaciones significativamente superiores a la media en test psicométricos de inteligencia general, y puntuaciones percentiles superiores a la media (desde 75 a 95 o más), en pruebas de aptitudes, dependiendo de su perfil.

Gardner (1993) habla de “altas capacidades” cuando existe capacidad superior generalizada a las diversas inteligencias, y utiliza “talento” como la presencia de una capacidad superior en alguna de las inteligencias.

En este trabajo nos centramos en estudiantes con talento matemático. Ramírez-Uclés (2013) estudia el concepto analizando las aportaciones de diversos autores y entiende al alumnado con talento matemático como aquel que, en virtud de sus habilidades sobresalientes, es capaz de un alto rendimiento en el ámbito matemático. Es fundamental que se utilicen prácticas docentes adecuadas para que este alumnado pueda desarrollar su máximo potencial.

2. MARCO TEÓRICO

2.1. Conceptos principales

El marco teórico arranca de examinar los siguientes apartados:

- Educación inclusiva
- Altas capacidades y talento
- Características del talento matemático
- Respuesta educativa

2.1.1. Características del talento matemático

En la tesis doctoral de Ramírez-Uclés (2012) se mencionan las siete características propuestas por Greenes (1981), de los estudiantes con talento matemático:

- Formulación espontánea de problemas.
- Flexibilidad en la manipulación de datos.
- Habilidad para la organización de datos.
- Agilidad mental para el flujo de ideas (pensamiento divergente).
- Originalidad de interpretación.
- Habilidad para transferir y generalizar ideas.

Lek y Sriraman (2005) sintetiza las características del talento matemático como la superioridad en determinados procesos, como la abstracción, generalización y discernimiento de estructuras matemáticas; el descubrimiento de manera independiente de principios matemáticos; el control de los datos; el uso de pensamiento analógico y heurístico (en la toma de decisiones en situaciones de resolución de problemas); además señala que estos sujetos hacen intervenir operaciones matemáticas; visualizan problemas o relaciones; distinguen entre principios teóricos y empíricos y aprecian las pruebas matemáticas.

El conjunto de las características de los estudiantes con talento matemático que se desarrollan en este apartado, serán puestas en práctica para la justificación del enriquecimiento de cada una de las tareas diseñadas. De esta forma, el objetivo que se pretende lograr es dar uso potencial a estas características, para que así los estudiantes con altas capacidades desarrollen los componentes del sentido matemático expuestos.

2.1.2. Respuesta educativa

Según Ramírez-Uclés et al.(2010) distintas organizaciones implicadas en el ámbito educativo reclaman la importancia de atender a los niños/as con talento, como por ejemplo, la OCDE y UNESCO inciden en la necesidad de atender a la diversidad y la NCTM (2000) en los Estándares considera a los/las estudiantes con talento dentro de las necesidades educativas especiales.

En España la necesidad de atender al alumnado con altas capacidades queda recogida por la normativa vigente, y concretamente en Andalucía, con las Instrucciones de 8 de marzo de 2017 (BOJA, 2017), se describen las adaptaciones curriculares para alumnado con altas capacidades intelectuales como respuesta educativa para promover el pleno desarrollo y equilibrio de este alumnado desde propuestas de profundización y/o ampliación.

En este artículo se describen tareas de enriquecimiento que se han diseñado, centrándonos en una adaptación curricular de profundización ya que, según las Instrucciones de 8 de marzo de 2017, la propuesta curricular de profundización de un ámbito/ asignatura es la modificación que se realiza a la programación didáctica y que supone un enriquecimiento del currículo sin modificación de los criterios de evaluación.

La Orden de 15 de enero de 2021, en el artículo 15, Programas de profundización (Junta de Andalucía, 2021) establece que estos programas tendrán como objetivo ofrecer experiencias de aprendizaje que permitan dar respuesta a las necesidades que presenta el alumnado altamente motivado para el aprendizaje, así como para el alumnado que presenta altas capacidades intelectuales. Dichos programas consistirán en un enriquecimiento de los contenidos del currículo ordinario sin modificación de los criterios de evaluación establecidos, mediante la realización de actividades que supongan, entre otras, el desarrollo de tareas o proyectos de investigación que estimulen la creatividad y la motivación del alumnado.

A la hora de diseñar tareas de enriquecimiento vamos a seguir las siguientes pautas de diseño de tareas propuestas por Ramirez-Uclés y Flores (2015):

- Establecer los contenidos matemáticos y los elementos de razonamiento matemático que se desean enriquecer, sin adelantarlos.
- Atender a las características del talento matemático y las metodologías propuestas para la atención de estos alumnos.

Para el diseño de tareas de enriquecimiento Ramírez-Uclés (2021) sugiere partir de una tarea rica y relacionar el análisis de dicha tarea con las características del talento matemático que se espera enriquecer. La complejidad de la tarea es esencial para la profundización y se va incrementando al pedirles que encuentren todas las soluciones posibles, que justifiquen y comuniquen sus argumentos. La secuencia de complejidad que plantea es la siguiente: resolver - discutir conjunto de soluciones - justificar - comunicar argumentos - generalizar y por último extender.

2.2. Relación con el análisis de contenido y análisis cognitivo

Según Lupiáñez (2009), el análisis didáctico permite al profesor abordar el diseño, puesta en práctica y evaluación de actividades de enseñanza y aprendizaje. Para realizar tareas ricas, el docente ha de establecer conexiones adecuadas con los conceptos matemáticos, sus propiedades, relaciones y procedimientos, para hacer un buen uso a través de los problemas y actividades planteadas, empleando diversos sistemas de representación. Dicho análisis de relaciones entre los contenidos matemáticos se recoge en el “Análisis de Contenido” descrito en el libro de “Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria”(Flores y Rico, 2015).

El Análisis de Contenido es la herramienta técnica para establecer y estudiar la diversidad de significados de los contenidos de las Matemáticas Escolares. En el “Análisis Cognitivo” decidimos qué podemos y queremos que aprendan. Para realizar enseñanza finalista, que tenga como finalidad lograr el aprendizaje, se formulan objetivos y competencias con sentido, inspirándose en los criterios de evaluación y/o estándares de aprendizaje.

Tras realizar los análisis de contenido y cognitivo de la proporcionalidad, se han diseñado las tareas, y más adelante se ha analizado la riqueza de la tarea tomando en consideración los elementos obtenidos en dichos análisis.

Para proponer tareas acordes con las expectativas de aprendizaje, se ha realizado un análisis cognitivo, que ha dado lugar a los siguientes objetivos de aprendizaje. En cada uno de ellos se alude al sentido matemático al que se refiere y a las capacidades que contribuye a poner en juego o a desarrollar.

O.1. Comprender la noción de razón y proporción. Pretende desarrollar las siguientes capacidades del sentido numérico: reconocer cómo y cuándo usar los números, detectar y usar relaciones numéricas.

O.2. Conocer y aplicar las relaciones de proporcionalidad directa e inversa. Se refiere a las componentes siguientes del sentido numérico: Reconocer cómo y cuándo usar los números, detectar y usar relaciones numéricas, y realizar cálculos numéricos por procedimientos diferentes.

O.3. Calcular relaciones de proporcionalidad mediante la regla de tres. Aluden a las siguientes componentes del sentido numérico: Realizar cálculos numéricos por procedimientos diferentes, y conocer distintas representaciones de los números, detectar y usar relaciones numéricas.

O.9. Entender la proporción mediante escalas. Relacionado con la siguiente capacidad del sentido de la medida: reconocimiento de las cualidades comparables y medibles.

Para desarrollar una buena gestión de la tarea, se han tenido en cuenta una serie de criterios asociados al análisis del proceso de elaboración para crear así un contenido enriquecido de calidad.

1. Análisis de los contenidos matemáticos enriquecidos, identificando cómo se relacionan los conocimientos previos y el Análisis de Contenido de la tarea.
2. Elementos del razonamiento matemático que se favorecen, incorporando elementos del razonamiento matemático en el análisis de la actividad matemática. También se recoge el nivel de complejidad de la tarea.
3. Justificación de que se trata de una tarea de enriquecimiento.

Además, las tareas de enriquecimiento propuestas pretenden aumentar el grado de complejidad, siguiendo los niveles propuestos en Ramírez-Uclés (2021) (resolver - discutir conjunto de soluciones - justificar - comunicar argumentos - generalizar y extender, nivel más complejo).

3. TAREA: ESCALAS

Meta: “Crear una maqueta a escala del Sistema Solar”

Sesión 1: Materiales: regla, folio A4, cuerda de 2m, 8 bolas de poliespán de distintos tamaños (rotulador, pinturas para decorar las bolas) y un globo grande.

¿Os gustaría hacer vuestro propio Sistema Solar?

En primer lugar, pasaremos a escala, en una hoja A4, las distancias y tamaños reales de los planetas. Para ver que es muy difícil representar a escala tamaños tan grandes y distancias tan lejanas, se proyectarán los vídeos que aparecen en las siguientes direcciones: <https://www.youtube.com/watch?v=i93Z7zljQ7I> & <https://www.youtube.com/watch?v=chYOBBR1wU>

Una vez visualizados, en una hoja A4 trazarán la línea de la diagonal (que medirá 30cm) con una regla, y sobre ella se posicionarán los planetas. Ahora pasaremos a escala las distancias y tamaños reales de los planetas.

En segundo lugar deben calcular y recoger las distancias de los astros respecto al Sol en unidades astronómicas o UA, esto es la unidad más utilizada de distancias para medir órbitas y trayectorias dentro del Sistema Solar, donde 1 UA equivale a 149.597.870,691 km. Pero en nuestro caso vamos a redondear entonces 1 UA son 150.000.000 km.

Se les facilita una ficha con los datos necesarios sobre los que trabajar y recoger datos en las respectivas tablas.

Además, se les proporciona la siguiente información:

- Distancia Sol-Tierra: 1 UA = 150.000.000 km. 1 UA = 150 x 106 km.
- En el plano equivale a 1 cm.
- Escala = 1 : 1

Tendrán que hacer todas las conversiones y posteriormente deberán darse cuenta de que solo pueden establecer las distancias entre planetas respecto al Sol, no los tamaños. Representar los tamaños en el folio A4 es un problema, pues el Sol, astro principal, tendrá tan solo un diámetro de 0,01 cm. Y por ejemplo Júpiter, habrá que dibujarlo con un diámetro de una milésima de centímetro. (Esta conclusión deberá verse reflejada en el apartado “reflexión”). Una vez comentados dichos aspectos, individualmente contestan a las siguientes preguntas recogidas en la reflexión.

La recogida de los datos y las respuestas a las preguntas se pondrán en común en la puesta en común, en la que se espera que se justifique que la maqueta que realizan sólo mantiene proporcionalidad en distancias entre los planetas, pues no es tarea fácil encontrar objetos a escala con los tamaños reales de los planetas.

Para hacer nuestro sistema solar a escala necesitaremos 4,5 m de cuerda para posicionar los astros. Ubicamos al sol en un extremo y a Neptuno en el otro, pues la escala de referencia para la posición de los astros respecto al sol será de 1 cm por cada 10 millones de km, por lo tanto Neptuno serán 450cm o 4,5m de cuerda, donde:

$$4500 \times 1 : 10 = 450\text{cm}$$

cm	millones de km
10-----	1
450-----	x

Este procedimiento deberá aplicarse a todos los planetas para poder posicionar los astros.

El proceso de recogida de datos, los cálculos y la reflexión que se plantea se debe llevar a cabo de manera individual y en pequeños grupos. Una vez finalizado el proyecto, deberán hacer una comparativa sobre sus propuestas reflexivas y compartir tanto sus soluciones, para así comprobar si el procedimiento es correcto, como el proyecto o maqueta final de su sistema solar.

Sesión 2: Se les propone que realicen modelo con puntos del sistema solar con google maps, en el que se tomarán referencias de tamaño y distancia para establecer una comparativa del sistema solar con una ciudad o país que prefieran, como por ejemplo Granada. Una vez finalizado el proyecto lo presentarán a sus compañeros.

Para crear vuestro sistema solar como modelo con puntos, tomando como referencia bien Granada o España o cualquier otro lugar del mundo, deberéis establecer la escala para la distancia entre los planetas respecto al Sol como por ejemplo “1m a 6000 km”. Desde Google Maps dirígete al menú y selecciona: “Tus sitios”, clicka en el ajuste “mapas” y después selecciona “crear mapa”. Podrás así añadir marcadores que serán los puntos, los cuales representarán a los astros. Una vez marcados los astros podrás establecer las distancias con el ajuste “dibujar línea”, lo que permite visualizar las distancias entre tus puntos en el mapa. Si quieres averiguar las distancias en km de varias localizaciones puedes seleccionar la pequeña regla que dice “medir distancias y áreas”. Una vez hecho esto, vas a hacer lo mismo pero con los tamaños de los astros, estableciendo una escala, la que sea factible, identificando el radio del Sol con algún edificio o ubicación que se le pueda comparar, y a partir de esta referencia veremos como quedan reflejados el resto de planetas en comparación al tamaño a escala del sol, es decir, supongamos que al establecer nuestra escala el sol es tan grande como el ayuntamiento de Granada, entonces ¿Cómo de grande será Marte?

3.1. Justificación del enriquecimiento

En relación con los elementos del talento matemático que se potencian en la tarea: *establecen relaciones entre conceptos matemáticos*, en este caso relaciones de proporcionalidad, magnitudes y dimensiones; requiere *flexibilidad en la manipulación de datos*, por tener interiorizadas las unidades del Sistema Métrico, así como *habilidad para la organización de datos*, ya que al establecer su propio sistema solar deben posicionar correctamente los astros en el trozo de cuerda con el que disponen.

Sesión 1: En el apartado “Reflexión” se les pide que profundicen sobre varias preguntas. Dichas cuestiones han sido planteadas para establecer los distintos niveles de complejidad que han sido mencionados anteriormente, a lo largo de la sesión: *¿Qué planeta tiene el mayor tamaño? ¿Qué planeta es el más pequeño? ¿Qué planetas son los que están más cercanos entre ellos y cuáles más alejados entre ellos?* La justificación queda presente con preguntas del tipo: *¿Tiene sentido establecer una escala en A4 para cada uno de los tamaños de los planetas? ¿Podrías representar el tamaño de los planetas en una maqueta o escala a 3D, de ser así cómo lo harías?* Esto deberá quedar reflejado en un texto escrito que muestre la reflexión. Requiere generalizar para responder a la cuestión “*Conociendo que la Unidad Astronómica o UA = 149 597 870 700 m equivale a la distancia media entre la Tierra y el Sol, ¿Podrías explicar cómo hallar la distancia de cualquier planeta?*”. Finalmente extienden el conocimiento adquirido al desarrollar una maqueta o escala interesante que sea práctico o útil para la vida cotidiana.

Si bien se inicia la reflexión de manera individual, posteriormente deben hacer una comparativa sobre las propuestas reflexivas en pequeños grupos, compartiendo así tanto sus soluciones como el proyecto o maqueta final de su sistema solar.

Sesión 2: La justificación del proyecto quedará reflejada en la presentación de este a los compañeros. El proyecto permite generalizar y extender lo aprendido sobre escalas para crear un modelo del sistema solar con puntos en el mapa, experimentando con sentido los tamaños y distancias de los planetas respecto al sol al establecer escalas.

3.2. Análisis de la tarea

Para dar validez a las tareas se analizan las mismas, tal como se refleja en las siguientes tablas, en las que se relaciona con el análisis de contenido que se ha realizado, en el que se describen los contenidos tratados, las situaciones o fenómenos que abarca de proporcionalidad, así como los sistemas de representación.

- *Conocimientos previos:* Potencias, notación científica. Proporcionalidad, relaciones de proporcionalidad, procedimiento aritmético mediante regla de tres y noción de razón y proporción. Sistema Métrico Internacional. Conversiones y cambios de unidades.

- *Relación con el Análisis de contenido*

<p><u>Concepto:</u> Relaciones de proporcionalidad. Escala.</p>	<p><u>Procedimiento:</u> Elaborar un plano o maqueta a escala. Calcular y reconocer relaciones de proporcionalidad mediante regla de tres.</p>
<p><u>Fenomenología:</u> Escala. Física.</p>	<p><u>Representación:</u> Escala en mapas, planos y maquetas.</p>

Un aspecto importante de la tarea consiste en examinar qué tipo de actividad matemática propone. En el siguiente epígrafe aparece reflejado.

- *Actividad matemática:* Se trata de una tarea en la que tendrán que poner en práctica conversiones, reglas de tres, establecer relaciones de proporcionalidad y aplicar el Sistema Métrico Internacional. Se les pide que justifiquen y hagan deducciones cuando tienen que establecer una escala para el tamaño de los astros, deben justificar y deducir la imposibilidad de dibujar tamaños tan diminutos. Se profundiza en los conceptos matemáticos ya adquiridos. Esto incluiría por ejemplo las conversiones propias del área de física al trabajar con UA o las

conversiones con radios que se ponen en práctica con el nuevo conocimiento sobre escalas, como por ejemplo al incluir conversiones más complejas del área de física UA o trabajar con conversiones de radios para ponerlo en práctica con el nuevo conocimiento sobre escalas.

4. CONCLUSIONES

En resumen, el proyecto de fin de grado es resultado de la elaboración, análisis y justificación de tareas de enriquecimiento para alumnos con talento matemático.

El área matemática trabajada es la proporcionalidad, concretamente se enriquecen tareas ya ricas que han sido adaptadas y rediseñadas para que amplíen sus conocimientos sobre escalas y porcentajes y potenciar al máximo su desarrollo intelectual.

Se ha presentado el análisis y justificación del enriquecimiento de la tarea para así mostrar cómo se da un uso potencial a las características del talento descritas en el marco teórico y que de esta forma los estudiantes con altas capacidades puedan desarrollar los componentes del sentido matemático descritos.

La calidad del enriquecimiento destaca por el carácter argumentativo y reflexivo que pretende buscar la justificación de los problemas planteados; la puesta en práctica de las características del talento, como por ejemplo, se puede observar que la flexibilidad en la manipulación de datos es la característica del talento matemático que más se trabaja en las dos tareas, manipulan gran cantidad de conversiones que exigen comprender sus distintos significados para hallar una solución.

El enriquecimiento también atiende al componente de generalizar los contenidos adquiridos, buscar relaciones entre los datos y regularidades en cada una de las tareas desarrolladas que les dará cabida a extender el conocimiento.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Flores, P. y Rico, L. (2015). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria*. Ediciones Pirámide.
- Gardner, H. (1993). *Multiple intelligences: the theory in practice*. Basic Books.
- Greenes, C. (1981). Identifying the Gifted Students in Mathematics. *Arithmetic Teacher*. *JSTOR*, 28(8), 14-17. <https://www.jstor.org/stable/41191796>
- Junta de Andalucía. (2011). Plan de actuación para la atención educativa al alumnado con necesidades específicas de apoyo educativo por presentar altas capacidades intelectuales en Andalucía. <https://www.juntadeandalucia.es/organismos/transparencia/planificacion-evaluacion-estadistica/planes/detalle/11676.html>
- Junta de Andalucía (2017). Instrucciones de 8 de marzo de 2017, de la Dirección General de Participación y Equidad, por las que se actualiza el protocolo de detección, identificación del alumnado con necesidades específicas de apoyo educativo y organización de la respuesta educativa. <https://www.juntadeandalucia.es/educacion/portals/web/ced/normativa/-/normativas/detalle/instrucciones-de-8-de-marzo-de-2017-de-la-direccion-general-de-participacion-y-equidad-por-las-que-se-actualiza-el-1xr2aw1d841lt>

- Junta de Andalucía. (2021). Orden de 15 de enero de 2021, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la etapa de Educación Primaria en la Comunidad Autónoma de Andalucía. BOJA, (7). <https://www.juntadeandalucia.es/boja/2021/507/BOJA21-507-01024.pdf>
- Lee, K. H. y Sriraman, B. (2011). *The Elements of Creativity and Giftedness in Mathematics*. Sense Publishers. <https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-94-6091-439-3>
- Lupiáñez, J.L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación de profesores de matemáticas de secundaria*. Editorial de la Universidad de Granada. <http://funes.uniandes.edu.co/798/2/TesisLupian%CC%83ezPublicada.pdf>
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principios y estándares para la educación matemática*. Centro de Documentación Thales.
- Ramírez-Uclés, R. (2021). Enriquecimiento de tareas en la formación inicial del grado de primaria para atender a los programas de profundización. *Contextos Educativos*, 28, 51-64. <http://doi.org/10.18172/con.5009>
- Ramírez-Uclés, R. (2012). *Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.
- Ramírez-Uclés, R., y Flores, P. (2015). *Planificación de sesiones de enriquecimiento matemático*. Research Gate. https://www.researchgate.net/publication/344898424_Planificacion_de_sesiones_de_enriquecimiento_matematico