

Aprendizaje de las sucesiones a través del uso de una notación de consenso

Natalia Moreno Palma

Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada (Granada, España), *nmoreno@ugr.es*

Resumen: *El presente trabajo desarrolló e implementó una propuesta de innovación docente cuyo fin es la enseñanza de las progresiones aritméticas en el tercer curso de la Educación Secundaria Obligatoria. Se propuso llevar a cabo una enseñanza focalizada en la notación. En particular, se buscó el consenso del alumnado en la elección de la notación utilizada como un elemento potenciador de la comprensión de los contenidos y facilitador para la resolución de problemas. Para implementar esta propuesta se utilizaron metodologías activas y participativas mediante las cuales se pretendió desarrollar un aprendizaje cooperativo basado en la resolución de problemas.*

Palabras clave: *Innovación educativa, notación, progresiones aritméticas, unidad didáctica, metodologías activas.*

Learning of sequences through consensus notation

Abstract: *The present work developed and implemented a teaching innovation proposal aimed at teaching arithmetic progressions in the third year of Compulsory Secondary Education. It was proposed to carry out a teaching focused on notation. In particular, student consensus was sought in the choice of the notation used as an element to enhance the understanding of the contents and to facilitate problem solving. To implement this proposal, active and participatory methodologies were used to develop cooperative learning based on problem solving.*

Key words: *Educational innovation, notation, arithmetic progressions, teaching unit, active methodologies.*

1. INTRODUCCIÓN

Actualmente, el desarrollo curricular de las matemáticas en la etapa de la Educación Secundaria se articula en torno al concepto de sentido matemático. El desarrollo en el alumnado de las destrezas o capacidades que conforman los diferentes sentidos matemáticos a través de los saberes básicos les ofrecerá las herramientas que les permitan desenvolverse satisfactoriamente en contextos personales, académicos, científicos, sociales y laborales (BOE, 2022).

El Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria (BOE, 2022) incluye por primera vez en el currículo de la Educación Secundaria el sentido algebraico como componente del sentido matemático. Este sentido se relaciona con el reconocimiento de patrones y de relaciones de dependencia entre variables. Además, está íntimamente ligado al lenguaje matemático, al uso variado de representaciones, a la modelización y al uso de expresiones simbólicas. La alusión

concreta a capacidades o destrezas relacionadas con el lenguaje matemático, con la representación, la modelización y el uso de expresiones simbólicas por parte de la legislación educativa vigente justifica la importancia del estudio de este tipo de aprendizajes.

El trabajo que aquí se expone desarrolló e implementó una experiencia de aula centrada en los procesos de simbolización y de notación matemática del contenido concreto de progresiones aritméticas. Las progresiones aritméticas es un contenido cuyo dominio requiere principalmente destrezas asociadas al sentido algebraico y gran parte de las dificultades asociadas a la complejidad matemática del contenido se deben a la notación específica que se utiliza para denotar los diferentes conceptos que lo componen.

El contexto curricular de la propuesta es la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la Mejora de la Calidad Educativa (BOE, 2013). En base al Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato (BOE, 2015), el alumnado de la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) iniciaba su estudio sobre el contenido de “progresiones aritméticas” en el tercer curso de la etapa. Previamente no se preveía la enseñanza de conceptos relacionados con sucesiones y por tanto tampoco se introducía notación específica de tales contenidos. Es por esta razón por la que se seleccionó el tercer curso de la ESO y el contenido general de sucesiones como el contexto más idóneo para desarrollar la propuesta didáctica centrada en la notación. A su vez, al ser la notación el centro de interés del estudio, se seleccionó el contenido concreto de progresiones aritméticas para llevar a cabo la intervención pues presentan menor dificultad que las progresiones geométricas y se evita así que la dificultad de los contenidos pudiera obstaculizar el logro de los objetivos de la propuesta didáctica.

En resumen, las progresiones aritméticas son un contexto matemático de contenido algebraico estrechamente ligado a una notación muy específica que hasta el tercer curso de la Educación Secundaria Obligatoria no se introduce al alumnado de esta etapa y por estas razones se seleccionó como un entorno conveniente para desarrollar la propuesta de innovación docente centrada en la notación que se pretendía.

Además de un proceso de enseñanza-aprendizaje focalizado en la introducción de la notación, otro aspecto innovador se llevó a la práctica: el uso de metodologías activas y participativas. Este trabajo sugiere un cambio de actitud con respecto a la idea que se tiene del rol del profesorado en las clases de matemáticas. Se buscó elaborar una nueva forma de trabajo en el aula de modo que la construcción del aprendizaje se llevase a cabo por el propio grupo de alumnos y alumnas aprovechando las individualidades del alumnado y la diversidad presente en el grupo como oportunidades para el aprendizaje (Davis, 2013; Mason, 2018).

El presente trabajo partió de los resultados obtenidos por Sánchez (2018), en los que se observó que el alumnado de tercero de la ESO tiene madurez suficiente como para abordar retos antes de estudiar el contenido curricular de “progresiones aritméticas”, sin embargo, se evidenció que, tras introducir el contenido, el alumnado presentó más dificultades y errores a la hora de enfrentarse a tareas concretas. Muchos de los nuevos errores y dificultades que aparecieron provienen de la notación puesto que el alumnado pierde la intuición matemática al intentar aplicar las fórmulas aprendidas. Al resolver tareas antes de aprender la notación asociada a las progresiones aritméticas, muchos alumnos y alumnas que después erraban, eran capaces de resolver las tareas e incluso eran capaces de obtener una “fórmula matemática” expresada con sus propios términos y notaciones que básicamente representaba el término general de una progresión. Este hecho justificó la siguiente pregunta que motivó la propuesta

didáctica expuesta en este artículo: ¿Es posible que una notación de consenso entre el alumnado favorezca el aprendizaje de las progresiones aritméticas?

Se propuso pues una secuencia didáctica que abarcaba cuatro sesiones en las que se partiría en todo momento del conocimiento previo del alumnado y cualquier aprendizaje surgiría del diálogo y del consenso grupal. Con esta metodología se pretendió enseñar las progresiones aritméticas partiendo de las ideas propias del alumnado, de su terminología y su notación personal. Se buscó que el proceso de abstracción que se necesita para generalizar al trabajar con progresiones se produjese progresivamente evitando introducir bruscamente una notación abstracta que dificultase la comprensión del contenido.

1.1. Notación asociada al contexto y notación de consenso.

Para abordar el diseño de la propuesta didáctica, previamente se debió definir el concepto de notación, ejemplificarlo y hacer referencia a dos nuevos tipos de notación que fueron los utilizados en la intervención llevada al aula: la notación asociada al contexto y la notación de consenso. Entenderemos por notación los conjuntos organizados de símbolos con características sintácticas, semánticas y funcionales concretas (Hernández, 2002). Puesto que hay diversas formas de dotar de significado un símbolo, se pueden tener diferentes notaciones de un mismo concepto. En el caso concreto del contenido “progresiones aritméticas” los conceptos que conforman este contenido pueden notarse usualmente de tres formas diferentes en función del significado o el carácter de la progresión aritmética.

Una progresión aritmética puede definirse como una aplicación del conjunto de los números naturales en el conjunto de los números reales tal que la diferencia entre cualquier par de imágenes sucesivas de la aplicación es una constante. A su vez, una progresión aritmética puede definirse como una lista ordenada e infinita de números tal que la diferencia entre cualquier par de valores sucesivos es una constante (Alcaide et al., 2015). Ambas definiciones podrían considerarse “equivalentes”, sin embargo, la primera tiene un carácter funcional y la segunda, la más utilizada en libros de textos escolares, tiene un carácter más numérico o de descripción por lista. En la tabla 1 se muestran estos significados y sus notaciones asociadas más habituales.

Tabla 1

Notaciones usuales de las progresiones

Conceptos	Notación 1	Notación 2	Notación 3
Número natural	n	n	n
Número real	a	a	a
Término n-ésimo	$\varphi(n)$	a_n	a_n
Diferencia	d	D	d
Progresión aritmética	$\{x_n\}$	$\{(1, a_1); (2, a_2); \dots; (n, a_n)\}$	(a_n)
Carácter de la definición de progresión aritmética	Funcional	Funcional/Lista	Lista

Tras definir el concepto de notación y en base al estudio de Sánchez (2018), se entiende por notación asociada al contexto como aquella notación que está estrechamente ligada a la tarea, actividad, problema o ejercicio en la que se utiliza. Un ejemplo de notación asociada al contexto es la propuesta por el alumnado para la siguiente tarea:

Esta mañana, antes de ir a clase, se te ha ocurrido subir una fotografía a tu red social favorita. Para ver el impacto que tiene, puedes observar el número de “me gusta” que va obteniendo cada hora. A las 08:00 tenía 5 “me gusta”. A las 09:00 y a las 10:00, vuelves a mirar la foto y observas que los “me gusta” son 25 y 45 respectivamente. A las 12:00 la foto tiene 85 “me gusta”, pero será la última vez que puedas mirarlo.

- ¿Podrías saber cuántos “me gusta” tendrá la foto a las 17:00? ¿Y a las 22:00?
- ¿Cuántos “me gusta” tendrá la foto pasadas 96 horas desde las 08:00?
- ¿Cuántas horas deben pasar para que los “me gusta” lleguen a 945?
- ¿Podrías calcular cuántos “me gusta” tiene la foto si conoces el número de horas que han pasado desde las 08:00?

En la Figura 1, se observan diferentes representaciones simbólicas propuestas por el alumnado del grupo en que se llevó a cabo la intervención.

Figura 1

Notaciones asociadas al contexto para la tarea descrita

a) ¿Podrías averiguar cuántos “me gusta” tendrá la foto a las 17:00? ¿Y a las 22:00? Explica de forma razonada tu respuesta.

c) Da una fórmula matemática que permita calcular los “me gusta”, conocidas las horas que han pasado desde las 08:00.

d) ¿Podrías calcular cuántos “me gusta” tiene la foto si conoces el número de horas que han pasado desde las 08:00? Explica por qué y cómo lo haces.

Handwritten work for a):
 17:00: Han pasado 9 h, contando con que por cada h el nº de “me gusta” aumenta 20, $20 \cdot 9 + 5 = 185$ “me gusta” en total.
 22:00: Han pasado 14 h, contando con que por cada h el nº de “me gusta” aumenta 20, mate $14 \cdot 20 + 5 = 285$ “me gusta” en total.

Handwritten work for c):
 $MG(x) = 20x + 5$; siendo x el número de horas que han pasado desde las 08:00 y $MG(x)$ el número de “me gusta”.

En la tabla 2 se muestran tres notaciones asociadas al contexto usadas por el alumnado para esta tarea concreta.

Tabla 2

Ejemplos de notaciones asociadas al contexto

Conceptos	Notación 1 (asociada al contexto)	Notación 2 (asociada al contexto)	Notación 3 (asociada al contexto)
Número natural (horas)	h	x	x
Número real (“me gusta”)	“me gusta”	MG	y
Término inicial	5 “me gusta”	5 MG	5 “me gusta”
Diferencia	20	20	20
Progresión aritmética	$h \cdot 20 + 5 =$ “me gusta”	$MG(x) = 20x + 5$	$20x + 5 = y$

Tras definir el concepto de notación asociada al contexto, se define el último tipo de notación que se utilizó a lo largo del trabajo: notación de consenso.

Llamaremos notación de consenso a aquella notación que resulta de una convención o acuerdo por parte del alumnado de un grupo clase, partiendo de sus propias representaciones simbólicas.

En base a las notaciones asociadas al contexto mostradas en la tabla 2, una posible elección convencional de notación podría ser aquella que denote por h a las horas, por MG a los “me

gusta” y al término general de la progresión con $20h + 5 = MG$. Esta elección muestra el carácter funcional de una progresión alejada de expresiones del tipo $\{x_n\}$ o $\{a_n\}$.

Esta propuesta de innovación se apoyará en la búsqueda de una notación de consenso para las progresiones aritméticas. Para saber si es posible que una notación de consenso entre el alumnado favorece el aprendizaje de las progresiones aritméticas se propusieron los objetivos de diseñar una Unidad Didáctica (UD) que incluyese la discusión sobre la importancia de la notación y de valorar la propuesta de UD a partir de su implementación y las observaciones y resultados obtenidos en el aula. Estos objetivos se desarrollan a lo largo del artículo siguiendo la siguiente estructura: la sección que continúa describe la propuesta de UD, las tareas que se llevaron al aula y las sesiones de trabajo. Por último, en una tercera sección se recogen las observaciones del profesorado, los principales resultados obtenidos tras analizar la implementación, las conclusiones a las que se llegaron y las sugerencias de mejora.

2. PROPUESTA DIDÁCTICA

Con respecto a la elaboración de la UD, se comenzó haciendo un análisis didáctico (Rico, 2016) del contenido matemático “progresiones aritméticas”, que puede consultarse en Moreno (2019), y que justificó los siguientes elementos curriculares necesarios para la propuesta:

Los contenidos específicos que se derivaron del análisis de contenido son:

- C1. Resolución de problemas.
- C2. Identificación de progresiones aritméticas.
- C3. Identificación de elementos característicos de las progresiones aritméticas.
- C4. Representación de los elementos característicos de las progresiones aritméticas.
- C5. Cálculo de términos concretos de una progresión aritmética.
- C6. Cálculo del término general de una progresión aritmética.
- C7. Elección de notaciones asociadas al contexto.
- C8. Elección de una notación de consenso.

Los objetivos específicos que se derivaron del análisis cognitivo son:

- O1. Identificar los elementos característicos de las progresiones aritméticas en secuencias numéricas.
- O2. Representar simbólicamente los elementos característicos de una progresión aritmética.
- O3. Modelar problemas utilizando progresiones aritméticas.
- O4. Calcular términos concretos de una progresión aritmética.
- O5. Obtener el término general de una progresión aritmética conocidos varios términos de la misma.
- O6. Apreciar la necesidad de la notación en matemáticas.
- O7. Elegir una notación de consenso para tareas concretas.
- O8. Elegir una notación de consenso para las progresiones aritméticas.

Los errores asociados a la notación y relacionados con el contenido a trabajar que se seleccionaron para el estudio a partir de Socas (2007) son síntomas de dos tipos de dificultades. Por un lado, destacamos la dificultad que conlleva identificar los elementos de las progresiones aritméticas que se manifiesta con errores como confundir los símbolos del término a_n , con el índice n de una progresión aritmética; errores al reemplazar el término inicial, la diferencia o el índice en la fórmula general de la progresión aritmética y errores al multiplicar el primer término con la posición en la expresión general.

Por otro lado, el segundo tipo de dificultad que se consideró relevante tener en cuenta fue la dificultad a la hora de formular generalizaciones y justificaciones de los procedimientos. Esta dificultad se manifiesta con errores como interpretar la expresión obtenida sin relacionarla con la situación problema; usar expresiones matemáticas que no corresponden a los términos de una progresión aritmética; confundir los elementos de la progresión aritmética al realizar operaciones y desconocer una representación para la progresión aritmética. En la tabla 3 se esquematiza la información más pertinente relativa al análisis didáctico y su temporalización a lo largo de las cuatro sesiones que conforman la UD.

Tabla 3

Distribución de elementos del análisis didáctico por sesiones

	Sesión 1: Toma de contacto	Sesión 2: Terminología de consenso	Sesión 3: Notación de consenso	Sesión 4: Evaluación del proceso
Objetivos de la sesión	Introducir el contenido y plantear varias resoluciones dadas por alumnos y alumnas	Elegir método de resolución consensuado y terminología de consenso	Elegir notación de consenso	Evaluación del progreso del alumnado
Objetivos didácticos	O1, O2, O3, O4, O5	O1, O3, O4, O5	Todos	O1, O2, O3, O4, O5
Contenidos didácticos	C1, C2, C3, C4, C5, C6, C7, C8	C1, C2, C3, C4, C5, C6, C7 y C8	Todos	Todos
Tareas	Inicial	1 y 2	3, 4 y 5	Final
Errores	Todos	Todos	Todos	Todos

2.1. Desarrollo de las sesiones

La unidad didáctica se compuso de siete tareas diferentes, secuenciadas en cuatro sesiones. Todas las tareas tuvieron una dificultad similar y permitieron trabajar todos los contenidos que establecía el currículo vigente. La finalidad del desarrollo del conjunto de tareas fue conseguir elegir de forma progresiva una notación de consenso para el contenido de progresiones aritméticas que facilitase su aprendizaje. Se procuró en todo momento que el aprendizaje de los conceptos partiese de los conocimientos previos del alumnado. La metodología de trabajo se basó de forma general en la resolución individual o en pequeños grupos de las tareas y posteriormente, en un debate en gran grupo en el que se habló de las diferentes resoluciones, de los términos usados y sobre todo de la notación que propuso el alumnado.

2.1.1. Primera sesión: Toma de contacto


En la primera sesión se introdujo el tema con una tarea inicial que se muestra en la Figura 2.


Figura 2
Tarea inicial

Tarea inicial Alumno: _____ Fecha: _____

Ayer, en el colegio, tu profesora dijo que hoy se realizaría una actividad con el móvil, de modo que estaría permitido llevarlo a clase, aunque sólo podría usarse para dicha actividad. Esta mañana, antes de ir a clase, se te ha ocurrido subir una fotografía a tu red social favorita. Para ver el impacto que tiene, puedes observar el número de "me gusta" que va obteniendo la fotografía cada hora. A las 08:00 tenías 5 "me gusta". A las 09:00 y a las 10:00, vuelves a mirar la foto y observas que los "me gusta" van por 25 y 45 respectivamente. A las 12:00 la foto tiene 85 "me gusta", pero será la última vez que puedas mirar los que tienes, puesto que la profesora te ha quitado el móvil por usarlo cuando no estaba permitido.

a) ¿Podrías averiguar cuántos "me gusta" tendrá la foto a las 17:00? ¿Y a las 22:00? Explica de forma razonada tu respuesta.





b) ¿Cuántos "me gusta" tendrá la foto pasadas 96 horas desde las 08:00? Explica razonadamente cómo lo has averiguado.

1 RESPUESTA:

Alumno: _____ Fecha: _____

c) ¿Cuántas horas deben pasar para que los "me gusta lleguen a 945? Explica razonadamente cómo lo haces.

RESPUESTA:

d) ¿Podrías calcular cuántos "me gusta" tiene la foto si conoces el número de horas que han pasado desde las 08:00? Explica por qué y cómo lo haces.

RESPUESTA:

e) Da una fórmula matemática que permita calcular los "me gusta", conocidas las horas que han pasado desde las 08:00.

2

Al comenzar la clase, la profesora explicó brevemente las normas para hacer el ejercicio que se les entregó a continuación. Se trata de una tarea que se debe resolver de forma individual, teniendo en cuenta el espacio para contestar y sin olvidar poner el nombre. Se especificó al alumnado que tenían un tiempo aproximado de 40-45 minutos para resolverla y que no se respondería a ninguna duda que les surgiese por lo que tendrían que escribir y responder lo que considerasen adecuado.

Tras explicar las normas, se repartió la tarea, se trabajó de forma individual durante el tiempo marcado y se recogió. En los quince minutos aproximados restantes de clase se llevó a cabo un debate, se preguntó al alumnado por la resolución llevada a cabo y se pusieron en común varios métodos de resolución de la tarea. A la hora de la puesta en común, se distinguieron en la pizarra los elementos más relevantes de las progresiones aritméticas, pero sin nombrarlos (índices, términos, orden, etc.). Es importante tener en cuenta la importancia de no influenciar al alumnado con ningún tipo de terminología o de notación respetando sus propuestas personales y usando en la medida de lo posible términos estándares como "nombre", "número" o "lugar".

2.1.2. Segunda sesión: Terminología de consenso

Durante el desarrollo de esta sesión, se pretendió consensuar un método de resolución de problemas del mismo tipo de la tarea inicial. (O una serie de "convenios" con los que toda la clase estuviese de acuerdo y que sirviese para trabajar con progresiones aritméticas). Para ello, se propusieron las dos tareas que se muestran en la Figura 3, para que se buscara un consenso en la resolución de cada una de ellas. Finalmente se generó la necesidad de consensuar una

terminología identificando en todas las resoluciones consensuadas los elementos característicos de las progresiones aritméticas.

Figura 3

Tareas 1 y 2

Alumno: _____ **Fecha:** _____

Tarea 1:

Tienes un saco de semillas antiguo que quieres plantar. En la etiqueta del saco pone que ese tipo de planta tarda unos cuatro meses en brotar y que es muy importante la época en la que se siembre la semilla, pero no viene indicada la fecha más adecuada para hacerlo. Decides plantar cada quince días un puñado de semillas y así te aseguras que algunas van a germinar.

La primera quincena que empiezas a ver germinar alguna semilla observas 17 brotes. La segunda quincena ves que hay 32 brotes. Te preocupa que cada vez germinen más semillas y sigues observando la tierra en la que las has plantado. La tercera quincena ves 47 brotes y en la cuarta observas ¡62 brotes!

- ¿Podrías averiguar cuántas quincenas han pasado desde que empezaste a ver los primeros brotes si un día cuentas 107 brotes?
- ¿Cuántas semillas germinarán cuatro quincenas después de empezar a ver los primeros brotes?
- Da una fórmula matemática que permita calcular los brotes, conocidas las quincenas que han pasado desde que empezaste a ver los primeros brotes.

Tarea 2:

Empiezas a sospechar que tu móvil no funciona bien porque crees que te dura poco la batería y decides comprobarlo. Cada noche pones el móvil a cargar y a la mañana siguiente, antes de salir de casa para ir al instituto lo desconectas del cargador y lo dejas en tu habitación con la batería completa.

El lunes pasado, cuando llegaste a tu casa del instituto miraste el móvil a la misma hora y tenía un 96% de batería. El martes, volviste a comprobarlo y tenía un 92% de batería. El miércoles, al repetir este “experimento” viste que tenía un 88% de batería y, por último, para corroborar tu teoría, volviste a comprobar la batería el jueves y tenía un 84%.

- ¿Podrías averiguar qué día de la semana es si tras volver del instituto miras el móvil y le queda un 64% de batería?
- ¿Cuánto tiempo debe pasar para que al llegar a casa te encuentres el teléfono apagado?
- Da una fórmula matemática que permita calcular la batería del móvil, conocidos los días que han pasado desde el lunes.

Se comenzó la sesión recordando la tarea resuelta en la sesión anterior y las diferentes propuestas de resolución que se expusieron. Posteriormente, se explicó que la clase en su

conjunto tiene que elegir un único método de resolución de la tarea y que puede ser uno de los expuestos en la sesión anterior o bien puede ser una mezcla, pero el grupo entero debía estar de acuerdo con el resultado final. Para desarrollar el debate de unos 20 minutos se les preguntó: ¿Tienen todos esos métodos algo en común? ¿Cuál os parece más ordenado? ¿Qué “nombres” os parecen más lógicos? ¿Preferís el orden de la primera propuesta y los nombres de la segunda?...

De esta forma se consiguió que el alumnado reconociese los procedimientos que se suelen utilizar para trabajar con progresiones aritméticas (identificar los elementos característicos, organizar los datos, reconocer el patrón, etc.). Tras elegir esa resolución de consenso, se realizaron las dos tareas propuestas para esta sesión con el fin de familiarizarse con el método. La interacción y la gestión del aula para las dos tareas fue la misma, se les entregó la tarea por escrito y se les pidió que la resolviesen de forma individual o por parejas. Tras resolver cada tarea, se pidió a varios alumnos o alumnas que la resolviesen en la pizarra y de nuevo se abrió debate para consensuar la resolución común aceptada por el grupo. Tuvieron un tiempo aproximado de 16 minutos por tarea para resolverla y ponerla en común en la pizarra. Una vez llegados a este punto, se consideró que el alumnado reconocía los elementos distinguidos de las progresiones aritméticas y se generó entonces la necesidad de consensuar una terminología identificando en todas las resoluciones consensuadas los elementos característicos de las progresiones aritméticas.

Para generar la necesidad de elegir una notación de consenso se abrió un debate final de una duración aproximada de unos 8 minutos en el que la profesora destacó las similitudes entre las resoluciones de las tareas. Por ejemplo, se señaló que en las resoluciones hay dos tipos de datos relevantes y una dependencia entre ellos además de un orden y un “patrón” que se sigue en cada caso. Se generó así una situación en la que existía la posibilidad de unificar terminologías de tal forma que sirviesen para todas las tareas propuestas. Para elegir esa terminología de consenso se les preguntó: ¿Cómo podemos llamar a los “números” que nos dicen la posición de los “datos”? ¿Cómo podemos llamar a los “datos”? ¿Cómo llamaríais a la “fórmula matemática”?... Al final se consiguieron una serie de términos para designar los distintos tipos de elementos distinguidos de las progresiones aritméticas (índice, término, diferencia, término general...).

2.1.3. Tercera sesión: Notación de consenso

Durante el desarrollo de esta sesión se pretendió consensuar una notación general con la que todo el alumnado estuviese de acuerdo y que sirviese para trabajar con progresiones aritméticas. Esta sesión se dedicó también a la resolución de tres tareas que se muestran en la Figura 4 para lo que se utilizaron los elementos característicos de las progresiones aritméticas, su terminología y su notación ya consensuada. Se buscó asentar los conocimientos y mecanizar la utilización de la notación de consenso.

La tercera sesión comenzó recordando lo trabajado en la sesión anterior, la propuesta de resolución de consenso y la terminología de consenso. Posteriormente se generó la necesidad de “denotar” los términos con la justificación de que puede ser muy tedioso escribir el nombre completo de cada elemento cada vez que se quiera hacer referencia a cada uno de ellos. Se explicó al grupo que tendrían que elegir una notación general teniendo en cuenta los términos seleccionados anteriormente. Se dedicó un tiempo aproximado de 20 minutos a este debate y

Figura 4
Tareas 3, 4 y 5

Alumno: _____ Fecha: _____

Tarea 3:

La luz de la cocina de tu casa está empezando a fallar, cada vez que le das al interruptor para encender la luz empieza a “parpadear”, es decir, se enciende y se apaga durante un tiempo hasta que se mantiene encendida por fin. La primera vez que le das al interruptor para encenderla, la luz “parpadea” 7 veces. La segunda vez que vas a la cocina y le das al interruptor, la luz “parpadea” 12 veces. La tercera y cuarta vez “parpadea” 17 y 22 veces.

- ¿Cuántas veces parpadeará la luz si pulsas el interruptor 20 veces?
- Da una fórmula matemática que permita calcular los “parpadeos”, conocidas las pulsaciones del interruptor.
- ¿Podrías averiguar cuántas veces han pulsado el interruptor si “parpadea” 42 veces?

Tarea 4:

En casa soléis actualizar el ordenador de sobremesa de forma habitual. Cada vez que se actualiza el ordenador de tu casa, necesita completar más pasos para terminar la actualización. Cuando aceptaste la primera actualización del ordenador, necesitó completar 7 pasos y en las dos siguientes actualizaciones, el ordenador completó 13 y 19 pasos respectivamente.

- ¿Podrías averiguar cuántas actualizaciones lleva el ordenador si un día necesita completar 43 pasos?
- Da una fórmula matemática que permita calcular los pasos a completar, conocidas las actualizaciones.

Tarea 5:

Cada sábado pones la alarma del despertador en el móvil a las 09:00 para ir a hacer deporte, pero odias levantarse tan temprano así que cada sábado cuando suena la alarma le das varias veces a la opción de “posponer”.

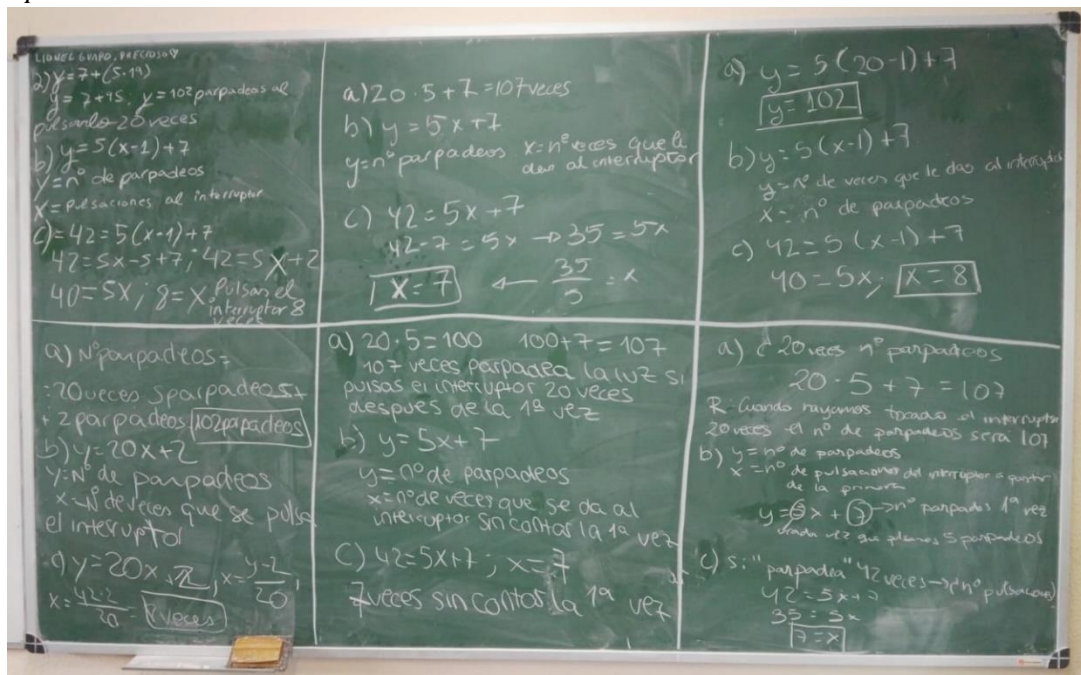
El sábado pasado, te despertó la alarma a las 09:00, le diste a “posponer” y te dormiste. Volviste a oírla a las 09:08 pero le diste de nuevo a “posponer” y otra vez te dormiste. A las 09:16 suena la alarma por tercera vez, pero sigues con mucho sueño y decides “posponer” una vez más hasta que a las 09:24 te levantas al fin.

- ¿Cuántas veces has pospuesto la alarma si ha sonado pasado 2 horas y 40 minutos desde las 09:00?
- ¿Podrías calcular cuántas veces has pospuesto la alarma si conoces el número de minutos que han pasado desde las 09:00?
- Da una fórmula matemática que permita calcular los “posponer”, conocidos los minutos que han pasado desde las 09:00.

posteriormente se resolvieron en gran grupo las tres tareas planeadas con el fin de afianzar la notación elegida (Figura 5), dedicándose aproximadamente 15 minutos a cada tarea.

Figura 5

Respuestas del alumnado a la tarea 3



Los tres grupos en los que se llevó a la práctica eligieron una notación funcional para las progresiones aritméticas, consiguiéndose el consenso rápidamente, sin discrepancias y de forma natural. Los tres grupos decidieron notar con “x” el índice de la progresión, con “y” el término general y el resto de elementos no han sido denotados pues los representaban con una tabla para cada tarea concreta.

2.1.4. Cuarta sesión: Evaluación del proceso

Durante el desarrollo de esta última sesión se quiso conocer si la elección de la notación de consenso ayudó al alumnado a comprender el contenido de “progresiones aritméticas”. La sesión se dedicó a la realización de una tarea final (Figura 6) de una dificultad similar a la inicial que permitió comprobar la evolución del alumnado. Al comenzar la sesión, la profesora explicó las normas para realizar la tarea que se debía entregar. La tarea debía hacerse de forma individual, teniendo en cuenta el espacio para contestar y sin olvidar poner el nombre. Tuvieron un tiempo aproximado de 45 minutos y no se respondieron dudas. Tras explicar estas normas se les repartió la tarea y se recogió al pasar el tiempo estipulado. Para finalizar la clase, se abrió un debate final de unos 10 minutos en el que se comentó la resolución en gran grupo y se le pidió al alumnado sus opiniones y consideraciones respecto a las tareas y la metodología usada a lo largo de las sesiones.

2.2. Evaluación del alumnado


Para llevar a cabo la evaluación del alumnado, se hizo una propuesta evaluativa acorde a la metodología utilizada. Puesto que el aprendizaje desarrollado ha sido un aprendizaje cooperativo basado en la resolución de problemas utilizando una metodología activa y


Figura 6
Tarea final

Tarea final: Alumno: _____ Fecha: _____

Te han regalado la saga de libros de Harry Potter y vas a empezar a leerlos. El primer día te lees 20 páginas y el segundo día 34 páginas. Te está gustando mucho la saga y el tercer día te lees 48 páginas. Te enganchas completamente a la saga y el cuarto día te lees 62 páginas y sigues aumentando el ritmo de lectura de la misma forma.

a) ¿Podrías averiguar cuánto tiempo llevas leyendo si un día te lees 104 páginas? ¿Y si te lees 160 páginas? Explica de forma razonada tu respuesta.





b) ¿Cuántas páginas te leerás 31 días después de empezar a leer la saga? Explica razonadamente cómo lo has averiguado.

RESPUESTA:

1

Alumno: _____ Fecha: _____

c) ¿Cuánto tiempo llevarías leyendo si un día te lees 272 páginas? Explica razonadamente cómo lo haces.

RESPUESTA:

d) ¿Podrías calcular cuántas páginas te lees cierto día, si sabes la cantidad de días que llevas leyendo? Explica por qué y cómo lo haces.

RESPUESTA:

e) Da una fórmula matemática que permita calcular las páginas que lees al día, conocidos los días que han pasado desde que empezaste a leer.

2

participativa, la evaluación y calificación se hizo de forma grupal y por sesiones. Las tablas 4, 5 y 6 recogen las rúbricas propuestas para la evaluación y calificación de cada sesión.

Tabla 4
Rúbrica de evaluación de la primera sesión

Identificadores	10	5	0
Introducción del tema	Más del 40% del alumnado del grupo resuelve la tarea inicial sin errores.	Entre el 40% y el 20% del alumnado del grupo resuelve la tarea inicial sin errores.	Menos del 20% del alumnado del grupo resuelve la tarea inicial sin errores.
Resoluciones del alumnado	El alumnado se muestra participativo a la hora de explicar sus resoluciones. La mayoría resuelve de forma correcta la tarea. Los errores que surgen son corregidos por el propio grupo.	El alumnado no se muestra muy participativo a la hora de explicar sus resoluciones. Hay errores en las resoluciones que se proponen	El alumnado no se muestra participativo

Tabla 5

Rúbrica de evaluación de la segunda y tercera sesión

Identificadores	10	5	0
Tareas	Más del 80% del alumnado del grupo resuelve las tareas.	Entre el 50% y el 80% del alumnado del grupo resuelve las tareas.	Menos del 50% del alumnado del grupo resuelve las tareas.
Consensos	El alumnado se muestra participativo a la hora de debatir para llegar a consenso. Son críticos, argumentan y justifican sus opiniones escuchándose entre ellos.	El alumnado no se muestra muy participativo a la hora de participar en el debate, pero se respetan entre ellos.	El alumnado no se muestra participativo y no se respetan entre ellos.

Tabla 6

Rúbrica de la evaluación de la cuarta sesión

Identificadores	20	10	0
Progresión del alumnado	Más del 60% del alumnado del grupo resuelve la tarea final sin errores.	Entre el 60% y el 40% del alumnado del grupo resuelve la tarea final sin errores.	Menos del 40% del alumnado del grupo resuelve la tarea final sin errores.
Notación de consenso	Más del 80% del alumnado utiliza la notación de consenso al resolver la tarea final.	Entre el 50% y el 80% del alumnado del grupo utiliza la notación de consenso al resolver la tarea final.	Menos del 50% del alumnado del grupo utiliza la notación de consenso al resolver la tarea final.

En base a la rúbrica de evaluación y a las valoraciones de la profesora que llevó a la práctica la UD se asignaron las puntuaciones a cada grupo que se muestran en la figura 7. La participación del alumnado fue muy alta, más del 80% del alumnado completaba las tareas en menos tiempo del establecido para ello. La mayoría de los miembros de los grupos quisieron salir a la pizarra a resolver los problemas y se llegó a consenso de notación desde prácticamente la primera sesión. Por tanto, las puntuaciones obtenidas asociadas a los indicadores “Resoluciones”, “Consensos” y “Tareas” son las máximas.

Figura 7

Calificación final de los grupos

Sesiones:	Sesión 1		Sesión 2		Sesión 3		Sesión 4		Nota final
Indicadores:	Introducción	Resoluciones	Tareas	Consensos	Tareas	Consensos	Progreso	Notación	
Grupo A:	5	10	10	10	10	10	10	20	8,5
Grupo B:	10	10	10	10	10	10	10	20	9
Grupo C:	5	10	10	10	10	10	10	20	8,5

3. RESULTADOS OBTENIDOS Y CONCLUSIONES

La propuesta de unidad didáctica fue llevada a la práctica en el Colegio Legamar, un colegio privado del municipio de Leganés, al sur de Madrid. Es un colegio aconfesional, con un alumnado que procedía de Leganés, Fuenlabrada y Getafe, de familias de nivel socioeconómico medio-alto. La muestra seleccionada para la evaluación de la propuesta estuvo compuesta por 72 estudiantes de 3º de la ESO, divididos en tres grupos: 3ºA, 3ºB y 3ºC compuestos por 24, 23 y 25 alumnas y alumnos, respectivamente. Todos los grupos compartieron la misma profesora para la asignatura de matemáticas, quien llevó a la práctica la unidad didáctica siguiendo las pautas explicadas en la sección anterior.

Para evaluar la propuesta se hizo uso de las respuestas a las tareas inicial y final del alumnado que conformaba los tres grupos en los que se llevó a la práctica y de las apreciaciones aportadas por su profesora sobre la dinámica de las clases. En la tabla 7 se muestra la correspondencia entre las variables de estudio propuestas para analizar las tareas y las preguntas que conformaron las tareas inicial y final.

Tabla 7
Correspondencia variables-preguntas

Variables	Preguntas				
	a)	b)	c)	d)	e)
Identificación del patrón	x	x			
Cálculo de Términos Concretos	x	x			
Problema Inverso			x		
Generalización				x	x

Una vez detalladas las variables de estudio se asignaron puntuaciones a los diferentes logros que se podían dar con cada variable y se obtuvieron las puntuaciones del alumnado. En la figura 8 se recoge esta información: el número de alumnos y alumnas que alcanzaron cada logro de las variables de estudio, tanto en la tarea inicial (IP0, CT0, PI0, GN0), como en la tarea final (IP1, CT1, PI1, GN1). Además, la última columna nos indica el número de estudiantes que utilizaron la notación de consenso (Not. Cons.) en la tarea final. La cifra que se encuentra en la fila del 0 muestra el alumnado que no usó la notación de consenso y la que se sitúa en la fila del 1 el que sí la utilizó.

Figura 8
Puntuaciones globales

Datos globales:		IP0	CT0	PI0	GN0	IP1	CT1	PI1	GN1	Not Cons
A+B+C	0	4	9	6	9	3	5	4	4	7
	0,33333333	1	20	5	12	3	7	4	8	
	Totales: 0,66666667	11	6	28	4	7	5	5	2	
	1	56	37	33	47	59	55	59	58	65
	Suma:	72	72	72	72	72	72	72	72	72
Media	0,884259	0,662037	0,740741	0,745370	0,898148	0,842593	0,884259	0,861111		
Varianza	0,066227613	0,14551817	0,09146235	0,14238828	0,06146757	0,09693966	0,07561728	0,08998435		
Mediana	1,000000	1,000000	0,666667	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000		

Si se observan los datos globales, el número de alumnas y alumnos que en la tarea inicial obtuvieron puntuaciones de 0, 1/3 y 2/3 disminuye en todas las variables con respecto a la tarea final. Se trata de un dato llamativo que conlleva además que el número de estudiantes que

obtuvieron 1 punto en las diferentes variables aumentó considerablemente. Las medias de las cuatro variables aumentaron y la que lo hace de forma menos acusada es la Identificación del Patrón (IP). También, la varianza de cada variable disminuyó, lo que indicó que los datos obtenidos de la tarea final están más próximos a la media que los obtenidos de la tarea inicial.

Con el fin de analizar la tipología de errores que se presentaron en la tarea inicial y final, se diferenciaron cinco tipos de errores: “despistes”, no considerar el término inicial de la progresión al hacer cálculos o al generalizar, no considerar resoluble la tarea por no ser realista, interpretar la tarea como un problema de proporcionalidad y error al generalizar o al hallar el término general de la progresión. En la figura 9 quedan recogidos los datos obtenidos al corregir las tareas.

Figura 9

Errores globales

Grupo	Número	IP0	CT0	PI0	GN0	Suma	IP1	CT1	PI1	GN1	Suma
A+B+C	Tipo 1:	10	9	5	0	24	8	5	6	4	23
	Tipo 2:	0	13	20	6	39	0	8	3	2	13
	Tipo 3:	1	2	3	3	9	0	0	0	0	0
	Tipo 4:	2	3	3	2	10	0	0	0	0	0
	Tipo 5:	4	7	8	14	33	5	4	4	7	20
	Suma:	17	34	39	25	115	13	17	13	13	56

Como se puede observar en la figura 9, el número de errores disminuyó en todas las variables y, además, en su totalidad pasó de ser 115 a 56. En la tarea inicial hubo más variedad de errores mientras que en la tarea final los errores del tipo 3 y 4 desaparecieron. Se pudo afirmar que, tras introducir el tema de progresiones, el alumnado no utilizó proporcionalidad para dar respuesta a las tareas ni se mostró crítico con la situación planteada. También se observó que se mantenían errores de tipo 1, 2 y 5. Los de tipo 1, ocasionados por despistes, son inevitables y los del tipo 2 se podrían explicar por la confusión que provocó la variable “páginas leídas al día” explicada en la siguiente sección. Por último, el tipo de error número 5, el que más nos concierne, pasa de presentarse en 18 estudiantes a presentarse en 9. El número de veces que aparece este error sigue siendo considerable, pero se concentra en un menor número de individuos.

3.1. Conclusiones y posibles mejoras

Tras evaluar la propuesta y a la vista de los resultados, se pudo afirmar que, al utilizar la notación de consenso, ninguna variable de estudio sufre disminución en su puntuación y en particular el proceso de generalización. Se pudo concluir finalmente que la introducción de las progresiones aritméticas mediante el uso de la propuesta de innovación ha ayudado al aprendizaje de los grupos en que se ha llevado a la práctica ya que evidencian mejoras en sus resultados.

Por otro lado, haciendo hincapié en los errores asociados a las progresiones aritméticas seleccionados, se concluyó que la propuesta de UD contribuyó a reducir a menos de la mitad el número de errores totales. Es más, también se redujo más de un 50% la presencia del tipo de errores ligados a la notación, los de tipo 2 y 5, que pasan de ser 72 a 33.

Con respecto a las observaciones hechas durante las experiencias del aula, se destacó la presencia de uno de los errores que más se ha presentado en la tarea final: la falta de justificaciones. Al tener una notación que permite modelizar las tareas, el alumnado dejó de utilizar el lenguaje natural para justificar sus ideas. Además, el hecho de haber utilizado tareas

que seguían el mismo esquema generó cierto desinterés o aburrimiento a la hora de enfrentarse a ellas. La idea original para la propuesta de la UD fue seleccionar tareas de dificultad y estructura similar para que estos factores no dificultasen el proceso de elección de una notación de consenso. Sin embargo, a la vista de la poca problemática que supuso esta elección, se cree conveniente introducir tareas que supongan un mayor grado de dificultad e incluso la introducción de nuevos contenidos como “la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética”.

Otro error concurrente en las resoluciones de la tarea final fue el utilizar en una misma tarea dos expresiones del término general diferentes, cada una considerando un término inicial distinto. Es decir, la pregunta “¿cuántas páginas te leerás 31 días después de haber empezado?” fue interpretada de dos formas diferentes. La variable “páginas leídas al día” llevó a confusión ya que parte del alumnado entendió que “después de haber empezado” no incluía el primer día pues sería el día en que se comienza la lectura. La otra interpretación sí consideró que pasaba un día desde que comienzas a leer hasta que llega el segundo día. Para evitar este tipo de errores sería conveniente especificar este hecho en los enunciados de las tareas. Otra posible propuesta para continuar con la iniciativa presentada es realizar un tercer test más espaciado temporalmente con el fin de constatar si se mantiene el uso de la notación de consenso con el tiempo. También se considera relevante introducir al alumnado la notación estándar de las progresiones aritméticas tras llevar a la práctica esta propuesta para investigar si el uso de la notación de consenso facilita el aprendizaje de la notación estándar.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alcaide, F., Hernández, J., Serrano, E., Moreno, M., Pérez, A., y Donaire, J. (2015). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. 3º ESO. SM*
- BOE (2013). Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa. BOE núm. 295. (2013).
- BOE (2015). Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y de Bachillerato. BOE núm. 3 (2015).
- BOE (2022). Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. BOE núm. 76 (2022).
- Davis, B. (2013). *Teaching mathematics: Toward a sound alternative*. Routledge. <https://doi.org/10.4324/9780203054802>
- Hernández, M. A. (2002). *La construcción del lenguaje matemático* (Vol. 174). Graó.
- Mason, J. (2018). Structuring Structural Awareness: A Commentary on Chapter 13. En M. G. Bartolini Bussi y X. H. Sun (Eds.), *Building the foundation: Whole numbers in the primary grades: The 23rd ICMI Study* (pp. 325–340). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-63555-2>
- Moreno, N. (2019). *Hacia una notación de consenso para el aprendizaje de las sucesiones* [Trabajo de Fin de Máster, Universidad de Granada].
- Rico, L. (2016). Matemáticas y análisis didáctico. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria* (pp. 85-99). Pirámide.
- Sánchez, G. (2018). *¿Influye la notación matemática en el aprendizaje de las progresiones aritméticas?* [Trabajo de Fin de Máster, Universidad de Granada].
- Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. En M. Camacho, P. Flores y M. P. Bolea (Eds.), *Investigación en educación matemática XI* (pp. 19-52). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.