Epsilon – Revista de Educación Matemática *2023, nº 114, 49-59*
Sección: Aportes desde la investigación en Educación Matemática

Diseño, implementación y análisis de una sesión de pensamiento algebraico en Educación Primaria

Lucía Flores Lamolda
Graduada en Educación Primaria (Universidad de Granada), *luciaflores@correo.ugr.es*

Resumen: *En este trabajo se presenta una propuesta para llevar a cabo el desarrollo del sentido algebraico en el aula de Educación Primaria. Para esto se han adaptado algunas de las tareas planteadas en la Unidad Didáctica realizada para la asignatura de Diseño y Desarrollo del Currículum de Matemáticas en Educación Primaria, que trataba acerca del trabajo con patrones a través de la búsqueda de regularidades. A partir de aquí se ha diseñado, desarrollado y analizado una sesión de clase que se ha puesto en práctica con alumnado de una clase de enriquecimiento curricular.*

Palabras clave: *pensamiento algebraico, patrones, generalización.* .

Desing, implementation and analysis of an algebraic thinking session in Primary Education

Abstract: *This work presents a proposal to carry out the development of the algebraic sense in the Primary Education classroom. For this, some of the tasks proposed in the Didactic Unit carried out for the subject of Design and Development of the Mathematics Curriculum in Primary Education have been adapted, which outlined working with patterns through the search for norms. From here, a class session has been designed, developed and analyzed that has been put into practice with students of a curricular enrichment class.*

Key words: *algebraic thinking, patterns, generalization.*

1. INTRODUCCIÓN

La presencia del álgebra en el currículum de primaria en España ha cambiado en los últimos años. En la Orden de 17 de marzo de 2015, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Primaria en Andalucía, se articula la asignatura de Matemáticas en torno a "Bloques de contenidos". Ninguno de estos bloques de contenidos es sobre álgebra, pero en el Bloque 1 "Procesos, métodos y actitudes matemáticas", que se formula como eje vertebrador del resto de bloques, se establece que el alumnado de primaria ha de ser capaz entre otras acciones de "encontrar regularidades, patrones y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos y funcionales" (pág 221).

Por otro lado, el actual currículum de primaria, es decir el Real Decreto 157/2022 (RD, en adelante) queda articulado en torno a sentidos matemáticos, entre los cuales se incluye específicamente el sentido algebraico. En el RD se explica que el sentido algebraico incluye los saberes relativos, entre otros, al "reconocimiento de patrones y la expresión de regularidades o la modelización de situaciones con expresiones simbólicas" (p. 24486).

Cómo citar: Flores Lamolda, L. (2023). Diseño, implementación y análisis de una sesión de pensamiento algebraico en Educación Primaria. *Epsilon*, *114*, *49-59.*

En cuanto a otros documentos que orientan la redacción del currículum de matemáticas, el Comité Español de Matemáticas (CEMAT), elaboró un documento llamado "Bases para la elaboración de un currículo de matemáticas en Educación no universitaria". En este documento, se define el sentido algebraico como "ver lo general en lo particular, reconociendo patrones y relaciones de dependencia entre variables y expresando estas regularidades mediante diferentes representaciones, así como modelizar situaciones matemáticas o del mundo real con expresiones simbólicas" (Calvo et al., 2021, p. 14).

En el libro "Principios y estándares para la Educación Matemática" publicado en 2003, se establece el álgebra como uno de los estándares de la Educación Matemática desde la Educación Primaria.

2. MARCO TEÓRICO

2.1. Sentido matemático y sentido algebraico

En el actual currículo de matemáticas se ha introducido el concepto de sentido matemático. Este concepto hace referencia a un aprendizaje de las matemáticas en el cual el sujeto que aprende da sentido a los contenidos, a través de la elaboración de significados, poniendo los contenidos en su contexto, identificando las situaciones en las que se debe usar cada contenido y a través de la propuesta de soluciones a las distintas cuestiones que los usos en contexto puedan provocar (Ruiz-Hidalgo y Flores, 2022).

Además, Ruiz-Hidalgo y Flores (2022) y la CEMAT presentan 4 enfoques del álgebra escolar recogidos por Stacey, entre los que se encuentra:

- Generalización de patrones numéricos, geométricos y de las leyes que gobiernan las relaciones numéricas (p.15).

Dentro de este primer enfoque, tomando lo relativo a patrones, la CEMAT establece una serie de objetivos para el alumnado en función de la etapa escolar. De esta forma se indica que en Educación Primaria todo el alumnado debería:

- Describir regularidades de manera generalizada con palabras, gráficos o tablas.
- Crear patrones.
- Extender regularidades determinando un elemento concreto de una sucesión: el elemento siguiente, uno lejano y uno genérico (Calvo et al., 2021, p. 16).

2.2. Patrones

En la Tesis de Castro (1995), recogiendo las aportaciones de otros autores se explica que un patrón es aquello a lo que se da lugar al haber una situación repetida con regularidad (p. 26). Torres et. al, (en prensa), señalan que hay dos características clave de los patrones: regularidad y previsibilidad, siendo la regularidad la forma en la que se organizan y relacionan los elementos de una secuencia, lo que podemos llamar estructura del patrón. En este trabajo las tareas que se presentan a los estudiantes se basan en su mayoría en patrones con representación numérica y pictórica. La estructura numérica de los patrones es aritmética.

2.3. Generalización

Ureña et. al, (2022), señalan que "algunos de los elementos destacables del proceso de generalización son el reconocimiento de la regularidad, la generación de nuevos casos y la representación" (p.4).

Podemos distinguir entre dos tipos de generalización: la generalización cercana, que supone encontrar un patrón para elementos próximos o elementos que pueden hallarse por conteo y generalización lejana, que implica el hallazgo de un término general (Merino et. al, 2013).

Algunas de las estrategias que se usan para resolver las tareas planteadas son las siguientes, recogidas por Ureña (2021, p. 42):

- Funcionales: consisten en expresar, generalizar o usar implícita o explícitamente una relación funcional entre dos variables.
- Recursivas: se emplea la diferencia común entre dos términos consecutivos.

3. MARCO TEÓRICO

Las tareas planteadas en este trabajo parten de una Unidad Didáctica que se elaboró usando el método del análisis didáctico. El análisis didáctico empleado en este curso parte de una consideración funcional del currículo, por lo que se interesa por examinar el significado del contenido, las potencialidades cognitivas que encierra y los medios de los que dispone el profesor para lograr su aprendizaje (Rico, 2015).

El análisis cognitivo se concretará en los objetivos de aprendizaje que se seleccionarán para alcanzar con las tareas propuestas.

- Hallar la regularidad de un patrón y explicarla oralmente.
- Expresar oralmente los razonamientos llevados a cabo en el trabajo con patrones.
- Expresar oral y simbólicamente la generalización de un patrón dado.
- Representar patrones de manera geométrica y numérica.

3.1. Tareas

El análisis de instrucción consiste en examinar qué tareas podemos poner en juego para lograr el aprendizaje, estudiar sus cualidades formularlas con precisión, determinando todos los elementos que las hagan operativas (Gómez y Romero, 2015). En este apartado se presenta la gestión de las mismas, es decir, cómo se diseña la tarea para el aula, detallando cómo y cuándo va a intervenir el profesor.

3.1.1. Tarea 1: Formamos cuadrados

Se comenzará presentando al alumnado la construcción mostrada en la Figura 1. Cada uno contará con una serie de palillos, de forma que se les pedirá que reproduzcan la figura. Después se preguntará qué cuántos cuadrados se observan en la figura y cuántos palillos se han necesitado para construirlos. Tras esto se construirá el siguiente término (Figura 2):

Figura 1

Primer término del patrón que se presentará a los alumnos

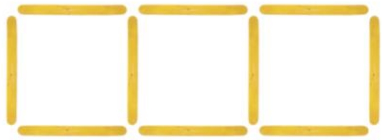
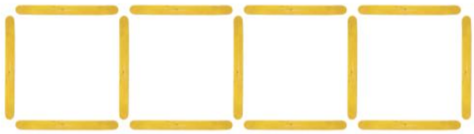


Figura 2

Segundo término que han de construir los alumnos



Se pedirá de nuevo que lo construyan con los palillos que tienen y que cuenten el número de cuadrados y la cantidad de palillos que han necesitado para construirlos.

Se plantean las siguientes cuestiones: *¿Qué ha cambiado de una figura a la siguiente? ¿Cuántos palillos se han puesto?*

Ahora rellenarán una ficha en la que aparece una tabla donde tendrán que dibujar algunos términos e indicar cómo se pasa de un término al siguiente. Se comenzará indicando cuál es el primer término que aparece en la ficha (el formado por dos cuadrados). Luego se aclarará que lo que deben hacer es poner las figuras que tienen 2, 3 y 4 cuadrados, contar los palillos que los forman y representar gráficamente la figura. A continuación, se explica el segundo ejercicio de la ficha en el que deben indicar la serie numérica, aclarando que el 4 que aparece en el primer círculo se refiere a los 4 palillos necesarios para construir el primer cuadrado.

Ahora se plantea la siguiente cuestión: *¿cuántos palillos se necesitan para construir la figura que tiene 10 cuadrados? ¿Se os ocurre cómo se puede saber?*

Se comienza preguntando para 10 palillos, se apuntan respuestas en la pizarra y se pregunta si el resto está de acuerdo. Se pretende señalar que para hallar un término tienen que multiplicar uno menos que el número de cuadrados por 3 y sumarle 4, para llegar a la conclusión de que la figura que tiene 10 cuadrados se calcula de la siguiente forma:

Los palillos necesarios para construir la figura que tiene 10 cuadrados: 4+9×3= 31.

En la Figura 10, el número de palillos sería: 4+9×3=31.

A continuación, se pregunta cómo se calcularía la cantidad de palillos para construir la figura que tiene 20 cuadrados. Se pide que, además de decir la expresión, se calcule la cantidad para comprobar si la cantidad de palillos necesaria para construir la figura que tiene 20 cuadrados es el doble de la necesaria para construir la figura que tiene 10 cuadrados.

Lo que se pretende es que el alumnado tome conciencia de que la forma de hallar un término cualquiera es calculando 4 más 3 por el número de cuadrados que tiene la figura menos uno. Para aproximarse a esto se empieza por números más o menos asequibles, como 10 o 20, pero se va llegando a números más grandes para poder hallar el término general. De esta forma pasamos a preguntar la expresión para calcular la cantidad de palillos necesarios para construir la figura que tiene 1200 cuadrados. En todos estos pasos se va pidiendo justificación oral del razonamiento llevado a cabo por el alumnado.

Para introducir la notación simbólica se hace la siguiente explicación: *los matemáticos llaman N a un número cualquiera, y si tú me dices la cantidad de cuadrados que quieres construir, yo te digo la cantidad de palillos que necesitas. Si por ejemplo quisiera saber cuántos palillos se necesitan para construir "tropecientos mil" cuadrados, ¿cuántos palillos habría?*

Una vez calculada la expresión con "tropecientos mil" se indica en la pizarra la notación simbólica usando *N*:

$$4+3\times(N\text{-}1)$$

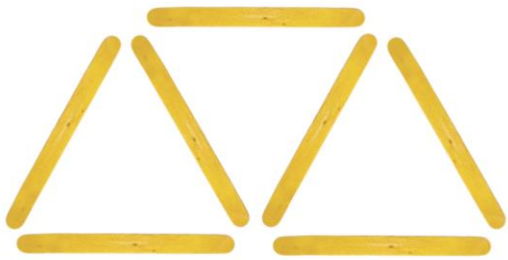
Ahora se hace el proceso inverso. Se plantea a los alumnos una cantidad de palillos para saber cuántos cuadrados se pueden construir. Por ejemplo 34 y 67.

3.1.2. Tarea 2: Formamos triángulos

Se presenta a los alumnos la figura 3 para que la construyan con palillos.

Figura 3

Representación pictórica del tercer término del patrón



Se plantean las siguientes cuestiones: *¿Cuántos triángulos observas?¿Cuántos lápices se han usado para construirlos?¿Cómo construirías la siguiente figura?*

Después se repartirá una ficha para que la rellenen de forma individual. Tras esto se plantean algunas cuestiones:

¿Cuántos lápices necesitamos para pasar de una figura a la siguiente?

Sabiendo la cantidad de lápices para pasar de una figura a la siguiente, y sabiendo cuántos lápices necesitas para construir el primer triángulo, ¿cuántos lápices necesitamos en este caso para construir la figura formada por 10 triángulos? ¿Y para la figura que tiene 20 triángulos?

Ahora se pide que escojan un número muy grande para volver a calcular el número de palillos necesarios, por ejemplo, un millón. Se señala entonces que para calcular eso haríamos 3+2 por un millón menos 1 y se les pide a partir de aquí que lo calculen en función de *N*, tal y como se había trabajado antes.

Ahora volvemos a hacer el proceso a la inversa, se plantea una cantidad de palillos y se pregunta cuántos cuadrados podrían construirse.

3.1.3. Tarea 3: Carrera a 21

Esta tarea se extrae de una propuesta por Brousseau “Carrera a 20” (1998). Para esto se comienza exponiendo las reglas del juego: este se juega por parejas y el objetivo es llegar a 21, de forma que se van diciendo números de forma alterna. Cada uno de los participantes puede únicamente sumar uno o dos al número anteriormente dicho. Se seleccionan distintas parejas de alumnos para que puedan practicar. Tras haber jugado algunas veces se hacen preguntas para ver cuál es la estrategia ganadora, identificando cuáles son los números que al decirlos ganas siempre y comprobando que las hipótesis expuestas son ciertas.

4. METODOLOGÍA

Las tareas descritas en el apartado anterior se llevaron a cabo en una clase de enriquecimiento curricular, en la que había 9 estudiantes: cuatro de cuarto de primaria, dos de quinto y tres de sexto.

Algunas de las características del alumnado con talento matemático recogidas de Greenes y otros autores por Ramírez (2012), son la “habilidad para la organización de datos” y la “habilidad para generalizar". Es por esto que la sesión se desarrolló en una clase de enriquecimiento curricular donde el alumnado tiene características que le predisponen a resolver esta clase de tareas.

4.1. Elementos de análisis

Para analizar el desarrollo del sentido algebraico en el alumnado que participó en el desarrollo de la sesión, se han usado algunos de los elementos recogidos en la justificación y marco teórico de este trabajo, que se exponen a continuación.

En primer lugar, se han tenido en cuenta los objetivos planteados por la CEMAT para alumnado de educación primaria en cuanto al trabajo con patrones:

- Describir regularidades de manera generalizada con palabras, gráficos o tablas
- Extender regularidades determinando un elemento concreto de la sucesión:
    a. El elemento siguiente
    b. Un elemento lejano
    c. Elemento genérico

También se ha estudiado qué tipo de generalización se lleva a cabo, teniendo en cuenta la distinción establecida por Merino et. al (2013): generalización cercana y generalización lejana. Para estudiar esto se tendrá en cuenta si el alumnado es capaz de identificar las regularidades además de generar nuevos casos y qué tipos de representaciones de la generalización se producen. En este caso entendemos la representación de la generalización como el modo en que el alumno evidencia y expresa de forma externa esta generalización (Ureña et al, 2022). De este modo se indicará si la representación es verbal o simbólica.

Por último, se ha hecho referencia a algunas de las estrategias usadas por los alumnos y alumnas para resolver las distintas cuestiones planteadas en las tareas, según las establecidas por Ureña (2021):

- Funcionales
- Recursivas

4.2. Resultados

Para analizar los resultados obtenidos tras implementar la sesión, se irán analizando las distintas tareas por separado. En el caso de las dos primeras tareas se comentarán en primer lugar las respuestas obtenidas en los cuestionarios y después se analizará la puesta en común.

En cuanto al cuestionario de la Tarea 1, 6 de los 9 alumnos dieron las respuestas esperadas. Con respecto a los otros tres cuestionarios, una alumna tuvo dificultades para completar la serie numérica, quedándose en el cuarto término. Otra alumna contó en vez de los cuadrados como los formados con palillos que habíamos construido en la realidad y aparecían como ejemplo, aquellos que quedaban dentro de los límites construidos con los palillos. Por último, un alumno señaló de forma incorrecta en algunos casos la regularidad, indicando "-3" en vez de "+3", aunque completó los términos correctamente.

En cuanto a la puesta en común, se comenzó mostrando un término de la sucesión construido con palillos para que así los alumnos y alumnas pudieran construirlo de forma individual. Tras esto, se pidió que se contaran la cantidad de palillos y que construyeran el siguiente término. Al preguntar cómo se pasa de un término a otro una alumna estableció lo siguiente:

> *Añadiendo tres palos más, porque este palo (señala el último vertical del término anterior) sirve para el siguiente*

Por lo tanto, se ha fijado en cómo continuar la estructura geométrica de la representación pictórica del patrón, pero ha establecido numéricamente cuál es la diferencia entre dos términos consecutivos de la sucesión aritmética. Vemos por tanto que ha sido capaz de identificar y describir regularidades con palabras además de establecer el elemento siguiente de una sucesión. Hasta aquí los resultados han sido hallados a través de estrategias de recursividad, ya que se parte del elemento anterior para construir el siguiente, contando los palillos que se añaden en cada caso.

Para continuar se quiere ver si son capaces de llevar a cabo una generalización cercana, es decir, ver si son capaces de generar nuevos casos. Para esto se preguntó la cantidad de palillos necesaria para construir la figura que tiene 10 cuadrados. Tras varias intervenciones, concluyeron en que debían de usar la siguiente expresión:

$$9 \times 3 + 4 = 31$$

Usaron una estrategia funcional para relacionar la cantidad de cuadrados que se quieren construir con la cantidad de palillos necesaria para hacerlo. Tras esto se les preguntó la cantidad de palillos necesarios para construir la figura que tiene 20 cuadrados. Ante esta situación comenzaron pensando que sería el doble a lo anterior, pero al compararlo con el caso de las figuras que tienen uno y dos cuadrados se dieron cuenta de que no funcionaba así. Al final establecieron la siguiente expresión:

$$3 \times 19 + 4 = 61$$

Se dieron cuenta por tanto que salía el doble que para construir 10 cuadrados menos 1.

Una vez comprobado que podían llevar a cabo la generalización hallando dos términos cercanos se les planteó si sabían calcular la cantidad de palillos necesaria para construir el término que tenía 1200 cuadrados, justificando la respuesta:

> Alumno 1: *4 y después serían 3 por 1199 . Porque yo creo que el cuadrado inicial como son 4 más 3 veces 1199 porque como 1200 cuadrados, como ya tienes el principal que son 4, solo tienes que multiplicarlo 3 veces por 1199 para que te salieran 1200 cuadrados.*

Alumna 1: *lo que estamos haciendo siempre es 4+3 y un número menos de lo que hemos dicho al principio.*

De esta forma vemos que los alumnos que participaron en la puesta en común fueron capaces de generar nuevos casos determinando elementos concretos de una sucesión. En este caso el elemento siguiente y elementos lejanos. Por tanto, se puede afirmar que se ha producido una generalización lejana usando una estrategia funcional.

Tras esto se les explicó que usamos "*N*" para llamar a un número que desconocemos, y que podemos saber para cualquier número de cuadrados que queramos construir la cantidad de palillos que necesitamos. Se les preguntó cuántos palillos necesitaríamos para construir "tropecientosmil cuadrados" y la respuesta fue: *4 + 3 × tropecientos mil menos 1.* Tras esto se apuntó en la pizarra el término general en función de *N*:

$$4 + 3 \times (N\text{-}1)$$

Por tanto, los alumnos que participaron en la puesta en común llegaron a la representación simbólica de la generalización. A partir de la descripción verbal de la regularidad presente en el patrón tanto en su representación numérica como pictórica, y la extensión de regularidades determinando tantos elementos cercanos como lejanos, fueron capaces de expresar el elemento general tras haber llevado a cabo una generalización lejana. Además, se preguntó a los demás si estaban de acuerdo en la representación simbólica de la generalización obtenida y los demás asintieron.

Para finalizar la tarea se llevó a cabo el proceso correspondiente a la función inversa, es decir, dada una cantidad de palillos, hallar el número de cuadrados que podrían formarse. En el caso de 34 palillos un alumno estableció que se descompondrá multiplicando 3 por 10 y sumando 4. En el caso de 67 palillos otro alumno declaró "*le restaría 4 y dividiría ese número entre 3*".

En cuanto a la Tarea 2, 7 de los 9 alumnos completaron como se esperaba al cuestionario. De los dos cuestionarios restantes, en uno de ellos una alumna no completó la serie numérica. En el otro, un alumno a la hora de representar el patrón de forma pictórica no lo hizo de manera secuencial.

En cuanto a la puesta en común, se procedió siguiendo los pasos de lo establecido en la gestión. Primero se pidió que construyeran algunos términos del patrón con palillos para que expresaran cómo se pasa de un término a otro.

Hasta aquí podemos extraer las conclusiones de la tarea anterior: el alumnado que participa en la puesta en común consigue describir regularidades con palabras y establecer el elemento siguiente del patrón. Es decir, identifica la regularidad. Las estrategias usadas inicialmente son de recurrencia, contando los palillos que se añaden para pasar de un término al siguiente. Al igual que en el caso anterior se han fijado en cómo continuar la estructura geométrica de la representación pictórica del patrón, pero habiendo establecido la diferencia aritmética entre ambos términos.

Se les volvió a preguntar cuántos palillos necesitaríamos para construir la figura que tiene 10 triángulos, y se obtuvieron las siguientes respuestas:

Alumno 1: *para 10 necesitamos 3 que son del primer triángulo más 2 por….*

Alumno 2: *tres más dos por nueve*

Entre todos establecieron en voz alta que el resultado de esto es 31. En esta ocasión, además, al preguntar la cantidad de palillos necesaria para construir la figura que tiene 20 triángulos responden que se tendría que calcular la expresión "3+2×19". Y un alumno indica que el resultado de esto es 41.

A continuación, se les pidió que eligieran un número grande de triángulos y un alumno dijo que 1 millón, las respuestas de la cantidad de palillos necesarios fueron las siguientes:

Alumno 1: *3+2 por 999.999*

Alumno 2: *sería más fácil poner 1 millón menos 1*

De esta forma podemos afirmar que son capaces de generar nuevos casos a través de estrategias funcionales.

Al preguntarles la cantidad de palillos necesaria para construir "N" triángulos, rápidamente un alumno respondió que sería: $3+2\times(N\text{-}1)$. Hallando de nuevo la generalización usando la representación simbólica. Asimismo, se les pregunta cómo se calcularía la cantidad de triángulos que podemos construir con 25 palillos y un alumno establece que se haría restando tres a 25, después dividiendo el resultado entre dos y por último sumando 1, de forma que con 25 palillos podemos hacer 12 triángulos. Es decir, hallan la relación inversa.

En cuanto a la Tarea 3, solo analizamos la puesta en común puesto que no se pasó ningún cuestionario. Al principio dos alumnos comenzaron a hacer el "juego". Cuando uno de ellos dijo el número 18, los demás ya se dieron cuenta de que ese había ganado. Se les preguntó por qué y se obtuvo la siguiente respuesta:

Porque ya como que ha dicho 18, dijese el otro el número que dijese, como de 18 no se puede llegar a 21, pues si el siguiente dice 1 quedan dos y se dice dos queda uno.

La pretensión era que hallaran los números menores que 18 que al decirlos ganas seguro. Propusieron el 16 pero se dieron cuenta de que no valía, pero usando el mismo razonamiento que para hallar el 18, llegaron a la conclusión de que el que dice 15 gana. De la misma forma concluyen que el que dice 12 gana, y en este momento un alumno señala que están bajando de tres en tres, por lo que el primer número que gana es el tres y esto significa que es el segundo jugador el que gana. Tras esto jugaron entre ellos para comprobarlo.

Por tanto, fueron capaces de identificar la regularidad, es decir, ver que la estrategia ganadora en el caso de que el número al que se tiene que llevar es el 21, es decir múltiplos de 3. La estrategia usada en este caso es de recurrencia, puesto que se van obteniendo números "ganadores" a partir del anterior. Por tanto, expresan la generalización en ese caso concreto a través de la representación verbal.

5. CONCLUSIONES

Con este trabajo queríamos abordar el desarrollo del sentido algebraico en estudiantes de enriquecimiento curricular de educación primaria.

La mayoría de los alumnos y alumnas respondieron correctamente a los cuestionarios planteados y en cuanto a la puesta en común, prácticamente todos los alumnos y alumnas participaron en algún momento. En los resultados de las distintas tareas vemos como para los distintos patrones propuestos fueron capaces de identificar la regularidad, usando estrategias de recursividad, al explicar cómo se iba completando el patrón tanto en su representación numérica como pictórica fijándose en el paso de un término a otro. Tras esto son capaces de generar nuevos casos, que cada vez son más lejanos al primer término planteado. Se aprecia por tanto cómo hallan una generalización cercana usando la estrategia más sofisticada, que es la funcional.

Por último, al introducirles al uso de la notación simbólica, son capaces de generalizar el patrón usando la representación simbólica. Además de esto fueron capaces de hallar la relación inversa.

En el caso de la Tarea 3, salvo casos aislados, aquellos que participaron en el juego y los que lo observaban fueron conscientes de que al decir el número 18 se ganaba, y a partir de aquí pudieron obtener la estrategia ganadora. Esto implica haber identificado la regularidad de los "términos" ganadores, además de representar esta regularidad verbalmente al establecer que eran múltiplos de 3.

Tomando los objetivos que se recogen en el análisis cognitivo y relacionándolos con lo expuesto en el apartado de resultados, se observa que el alumnado es capaz de hallar la regularidad de un patrón y explicar oralmente. Además, es capaz de expresar oralmente la generalización de un patrón, llegando incluso al punto de representarlo simbólicamente.

Por tanto, concluimos que los alumnos y alumnas que realizaron la sesión fueron capaces de cumplir tanto los objetivos propuestos como los que se plantean en documentos oficiales como el presentado por la CEMAT y las directrices curriculares mostradas en el RD 157/2022. Además, cabe señalar que aunque el alumnado que participó en la sesión pertenecía a diferentes cursos la participación se llevó a cabo casi por igual entre todos, sin menoscabo de los de cursos más bajos que también dieron respuestas que fueron una pieza clave para hallar la generalización de los patrones planteados.

6. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se ha realizado en el proyecto con referencia PID2020-113601GB-I00, financiado por la Agencia Estatal de Investigación (AEI) de España.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. La Pensée Sauvage.

Calvo Pesce, C., Carrillo de Albornoz Torres, A., de la Fuente Pérez, A., de León Rodríguez, M., González López, M. J., Gordaliza Ramos, A., Guevara Casanova, I., Lázaro del Pozo, C., Monzó del Olmo, O., Moreno Verdejo, A. J., Rodríguez Muñiz, L. J., Rodríguez Taboada, J. y Serradó Bayés, A. (2021). *Bases para la elaboración de un currículo de Matemáticas en Educación no Universitaria*. Comité Español de Matemáticas. https://matematicas.uclm.es/cemat/wp-content/uploads/bases2021.pdf

Castro, E. (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales*. Tesis Doctoral. Granada: Universidad de Granada. http://hdl.handle.net/10481/25009

Gómez, P. y Romero, I. (2015). Enseñar las matemáticas escolares. En P. Flores y L. Rico. (Coord.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria*. (61-88). Pirámide.

Orden de 17 de marzo de 2015, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Primaria en Andalucía. *Boletín Oficial de la Junta de Andalucía*, 60, de 27 de marzo de 2015. https://www.juntadeandalucia.es/boja/2015/60/1

Merino, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2013). Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización. *Edma 0-6. Educación Matemática en la infancia, 2*(1), 24-40.

https://doi.org/10.24197/edmain.1.2013.24-40
NTCM (2003). Estándares de las matemáticas escolares: desde Prekindergarden al nivel 12 inclusive. En NTCM, *Principios y Estándares para la Educación Matemática*, (pp. 30-75). NTCM

Ramírez, R. (2012). *Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático*. Tesis doctoral. Universidad de Granada. http://hdl.handle.net/10481/23889

Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado*, 52, de 2 de marzo de 2022. https://www.boe.es/buscar/act.php?id=BOE-A-2022-3296

Rico, L. (2015). Matemáticas escolares y conocimiento didáctico. En P. Flores, y L. Rico. (Coord.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria*, (pp. 21-40). Pirámide.

Ruiz-Hidalgo, J.F. y Flores, P. (2022). Sentido matemático escolar. En L.J. Blanco, N. Climent, M.T. González, A. Moreno, G. Sánchez-Matamoros, C. de Castro, y C. Jiménez.(Eds.), *Aportes al desarrollo del currículo desde la investigación en educación matemática*, pp. 55-79. Editorial Universidad de Granada.

Torres, M. D., Ayala-Altamirano, C. y Ramírez, R. (en prensa). Variabilidad en la invención de patrones en estudiantes de Educación Primaria.

Ureña, J. (2021). *Representaciones de generalización y estrategias empleadas en la resolución de tareas que involucran relaciones funcionales. Una investigación con estudiantes de primaria y secundaria.* Tesis doctoral. Universidad de Granada. http://hdl.handle.net/10481/66412

Ureña, J., Ramírez-Uclés, R., Cañadas, M.C. y Molina, M. (2022). Generalization strategies and representations used by final-year elementary school students, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* http://doi.org/10.1080/0020739X.2022.2058429 .